suma+ 75
Artículos
Marzo 2014
pp. 57-69

Gaspar de Texeda y los algoritmos de la multiplicación

Vicente Meavilla Seguí
Antonio M. Oller Marcén

La historia de las Matemáticas pone de manifiesto que dicha disciplina es una ciencia viva cuyos conceptos y procedimientos suelen cambiar con el tiempo. Así, por ejemplo, los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales han ido evolucionando con el paso de los siglos hasta convertirse en los que se utilizan en la actualidad. En este artículo, apoyándonos en un libro español del siglo XVI, presentamos diversos algoritmos de la multiplicación y proponemos algunas intervenciones didácticas relativas a la enseñanza y el aprendizaje de dicha operación matemática elemental.

Palabras clave: Aritmética, Algoritmos de la multiplicación, Historia de las Matemáticas, Educación Matemática, Universidad, Gaspar de Texeda, siglo XVI.

English title

History of Mathematics shows that this discipline is a lively science whose concepts and procedures often change over time. For instance, the algorithms for the elementary arithmetic operations have evolved over the centuries until they have became those that are used today. In this paper, with the aid of a Spanish book from the XVI century, we present several algorithms for the multiplication and we propose some didactical comments related to the teaching and learning of this elementary operation.

Key words: word, word.

El 4 de enero de 1546 se acabó de imprimir en Valladolid la *Suma de Arithmetica pratica y de todas mercaderias con la horden de contadores* de Gaspar de Texeda[1].

Esta obra, desarrollada en sesenta y cuatro folios, es un buen ejemplo de las *aritméticas prácticas* que circulaban por la España del siglo XVI. Trata los contenidos usuales en dicho tipo de manuales: nombrar y numerar, operaciones aritméticas elementales (adición, sustracción, multiplicación, división, extracción de raíces cuadradas y cúbicas), reducción de monedas, progresiones, operaciones con fracciones, regla de tres, reglas de compañía sin tiempo y con tiempo, regla de testamentos, regla de aligación, reglas de una y dos falsas posiciones, medida de tierras, etc.

El estudio de los algoritmos de la multiplicación, a los que vamos a dedicar nuestra atención, se desarrolla a lo largo de los folios 14r al 16v.

La tabla de multiplicar

Antes de presentar diversos procedimientos que permiten calcular el resultado de una multiplicación,

Artículo recibido en *Suma* en ****** de 2012 y aceptado en **** de 2013

Gaspar de Texeda (fol. 7r) invita a los aprendices a aprender la tabla de multiplicar en los siguientes términos (figura 1):

Figura 1.
«Ahora conviene aprender la tabla de coro [= de memoria] y muy bien porque sin ella no se puede saber multiplicar. La cual tabla hallarás un poco adelante. Apréndela, que es fácil. Porque de otra manera perderás el tiempo que gastares en otra cosa.»

Más adelante (fols. 14r–14v) se ponen a disposición del estudiante tres tablas de multiplicar: la ordinaria, la cuadrada y la cúbica (figuras 2, 3 y 4).

Figura 2. Tabla ordinaria.
«Esta es la mejor tabla de las queordinariamente se pueden aprender; porque cuando hayas sabido lo del 9 lo demás no es nada de saber.»

Figura 3. Tabla cuadrada

Figura 4. Tabla cúbica (donde dice 1. ve 2 ——— 4, debe decir 2. ve 2 ——— 4)

Es interesante observar aspectos en los que el autor ahorra espacio. Por ejemplo, no aparecen en las tablas las multiplicaciones por 2; posiblemente por considerarse evidentes. Además se hace uso de la conmutatividad, de tal modo que el número de filas se va reduciendo en cada paso (una vez presentado el resultado de hacer «9 veces 8» ya no aparece el de «8 veces 9»)[2]. Extrañamente no aparece en ninguna de las tablas el producto «4 veces 3».

Algoritmos de la multiplicación

Texeda presenta once algoritmos de la multiplicación: (i) por escaquer o berricolo, (ii) por castellucio, (iii) por colona o taboleta, (iv) por croceta o casella, (v) por cuadrilátero, (vi) por gelosia o graticola, (vii) por repriego, (viii) por escapezo, (ix) por copa, (x) por conjunción, (xi) método del multiplicador móvil[3].

Multiplicación por escaquer o berricolo

Este algoritmo coincide con el actual (véase la figura 5, con un error).

Figura 5

Multiplicación por castellucio (figura 6)

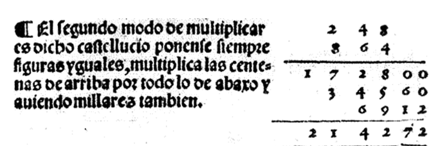

Figura 6.
«El segundo modo de multiplicar es dicho *castellucio*. Se ponen siempre figuras iguales. Multiplica las centenas de arriba por todo lo de abajo y habiendo millares también.»

En el ejemplo propuesto (246 × 864)la multiplicación se efectúa del modo siguiente:

$$246 \times 864 = (200 + 40 + 8) \times 864 =$$
$$= 172\,800 + 34\,560 + 6\,912 = 214\,272$$

Frente al método anterior, en este caso se descompone el multiplicando y no el multiplicador. Además, al comenzar a multiplicar por la cifra de mayor orden el desplazamiento de los productos parciales ha de hacerse hacia la derecha puesto que el resultado que se obtiene en cada paso es de un orden de magnitud una unidad menor al anterior.

Multiplicación por colona o taboleta (figura 7)

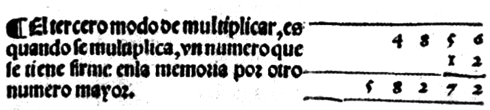

Figura 7.
«El tercer modo de multiplicar es cuando se multiplica un número que se tiene firme en la memoria por otro número mayor.»

Este procedimiento se usaba cuando uno de los factores era un número pequeño de más de una cifra. La multiplicación se llevaba a cabo operando como si el número pequeño tuviese una sola cifra.

Describimos el método en la tabla 1.

4 8 5 6 x 1 2 2	Unidades 12 × 6u. = 72u. = 7d. + 2u.
4 8 5 6 x 1 2 7 2	Decenas 12 × 5d. = 60d. 60 + 7 = 67d.= 6c.+7d.
4 8 5 6 x 1 2 2 7 2	Centenas 12 × 8c. = 96c. 96 + 6 = 102c.=10m.+2c.
4 8 5 6 x 1 2 5 8 2 7 2	Millares 12 × 4m. = 48m. 48 + 10 = 58m.

Tabla 1

Multiplicación por croceta o casella (figura 8)

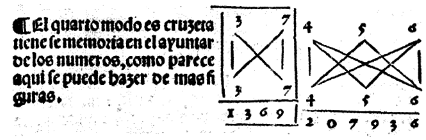

Figura 8.
«El cuarto modo es *cruceta.* Se tiene memoria en el ajuntar de los números, como parece aquí se puede hacer de más figuras.»

La multiplicación «per crocetta», *cross multiplication* en la terminología anglosajona, fue un procedimiento efectivo para el cálculo de productos de dos factores con dos cifras cada uno. Pacioli y Texeda lo aplicaron también a números con más dígitos.

Dado que Texeda no explica cómo se llega al resultado de las dos multiplicaciones propuestas, reproducimos el diagrama de Pacioli [*Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità.* Distinctio secunda. Tractatus tertitus, fol. 27v] para el caso 37 37 y la descripción que hace de las distintas etapas del método (figura 9).

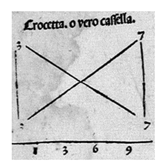

Figura 9.
«Primero asienta uno debajo del otro como se ve y empieza por la primera figura diciendo 7 por 7 hacen 49. Pon el 9 debajo de la raya y toma 4 para las decenas. Después, haz la cruz y di una vez 3 por 7, hacen 21. Después, otra vez 3 por 7, hacen 21. Suma estos dos productos, o sea 21 y 21, hacen 42 y 4 que tenias en la memoria hacen 46. Escribe el 6 y guarda 4. Después multiplica las últimas figuras, o sea 3 por 3, hacen 9, y 4 que guardabas hacen 13. Escribe el 13 al lado del 6 y el 9 que habías puesto antes y resultará 1369.»

Para comprender el funcionamiento del algoritmo vamos a llevar a cabo el segundo de los ejemplos presentados por Texeda. Se desea multiplicar 456 por 456. Para ello pensamos 456 = 4c + 5d + 6u, por lo que la operación a efectuar es:

$$(4c + 5d + 6u) \times (4c + 5d + 6u)$$

El resultado se consigue calculando en primer lugar las unidades del producto, después las decenas, etc, del siguiente modo:

— Las unidades se obtienen multiplicando sólo unidades por unidades; es decir, hay $6 \times 6 = 36u = 3d + 6u$. Se escribe el 6 y se guarda el 3.
— Las decenas se obtienen multiplicando sólo decenas por unidades o viceversa (además de las 3 que llevamos guardadas). Es decir, hay $5 \times 6 + 6 \times 5 = 60d + 3d = 63d = 6c + 3d$. Se escribe el 3 y se guarda el 6.
— Las centenas se obtienen multiplicando centenas por unidades o viceversa y multiplicando decenas por decenas (además de las 6 que llevamos guardadas). Es decir, hay $4 \times 6 + 6 \times 4 + 5 \times 5 = 73c + 6c = 79c = 7m + 9c$. Se escribe el 9 y se guarda el 7.
— Los millares se obtienen únicamente multiplicando centenas por decenas o viceversa (además de las 7 que llevamos guardadas). Es decir, hay $4 \times 5 + 5 \times 4 = 40m + 7m = 47m = 4dm + 7m$. Se escribe el 7 y se guarda el 4.
— Las decenas de millar se obtienen multiplicando centenas por centenas (además de las 4 que llevamos guardadas). Es decir, hay $4 \times 4 = 16dm + 4dm = 20dm$. Se escribe el 20 y hemos terminado.

De la descripción que acabamos de hacer se desprende el motivo de las líneas que aparecen en los diagramas. Además se observa que para llevarlo a cabo correctamente es necesario comprender con cierta profundidad el funcionamiento del sistema decimal.

Multiplicación por cuadrilátero

El «método del cuadrilátero» sólo difiere del actual en la disposición de los productos parciales, en el cálculo de las sumas que conducen al resultado final y en la ubicación del mismo.

En la figura 10 (en la que hay varios errores) se muestra el cálculo del producto 3497 × 3497 por el método del cuadrilátero que aparece en la obra estudiada.

Se observa cómo, en vez de desplazar en cada paso el producto parcial una posición hacia la izquierda, se colocan todos ellos alineados uno sobre otro y lo que se hace es sumar diagonalmente para obtener las cifras del resultado final.

Figura 10.
«El 5 modo de multiplicar es dicho *cuadrilátero* o *castellucio* (¿). Se suma a la traviesa.»

Multiplicación por gelosia o graticola (figura 11)

Figura 11.
«El 6 modo de multiplicar es dicho *graticola*. Se suman atravesadas.»

Texeda presenta este algoritmo de origen árabe sin explicación alguna ya que es bastante sencillo deducir su funcionamiento a partir de la imagen[4].

Para justificar el buen funcionamiento del algoritmo puede recurrirse a un razonamiento similar al que hicimos al presentar la multiplicación por *croceta* y observar, por ejemplo, que las decenas de millar del resultado final han de provenir necesariamente del producto de centenas por centenas (1 en la figura anterior) junto con las posibles «llevadas» de las unidades de millar que a su vez provienen exclusivamente de multiplicar decenas por centenas y viceversa (7 y 7 en la figura anterior). La disposición de los productos se hace de tal modo que las cantidades a sumar aparezcan alineadas sin dar lugar a dudas.

Multiplicación por repriego (figura 12)

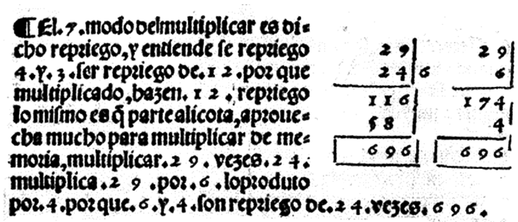
El. 7. modo del multiplicar es dicho repriego, y entiende se repriego 4. y. 3. ser repriego de. 12. porque multiplicado, hazen. 12. repriego lo mismo es q parte alicota, aprouecha mucho para multiplicar de memoria, multiplicar. 29. vezes. 24. multiplica. 29. por. 6. lo produto por. 4. porque. 6. y. 4. son repriego de. 24. vezes. 696.

Figura 12.
«El 7 modo de multiplicar es dicho *repriego*, y se entiende repriego 4 y 3 ser repriego de 12 porque multiplicado, hacen 12. Repriego es lo mismo que parte alícuota, aprovecha mucho para multiplicar de memoria. (Para) multiplicar 29 veces 24, multiplica 29 por 6 (y) el producto por 4, porque 6 y 4 son repriego de 24 veces, 629.»

La multiplicación por repriego consiste, pues, en descomponer el multiplicando o el multiplicador en producto de factores de un solo dígito y aplicar la asociatividad del producto.

Multiplicar por escapezo (figura 13)

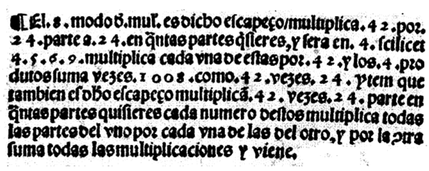
El. 8. modo d. mul. es dicho escapeço / multiplica. 42. por. 24. parte a. 24. en qntas partes qsieres, y sera en. 4. scilicet 4. 5. 6. 9. multiplica cada vna de estas por. 42. y los. 4. produtos suma vezes. 1008. como. 42. vezes. 24. ytem que tambien el dho escapeço multiplica. 42. vezes. 24. parte en qntas partes quisieres cada numero destos multiplica todas las partes del vno por cada vna de las del otro, y por la otra suma todas las multiplicaciones y viene.

Figura 13.
«El 8 modo de multiplicar es dicho *escapezo.* Multiplica 42 por 24. Parte 24 en cuantas partes quisieres y será en cuatro: 4, 5, 6 y 9. Multiplica cada una de estas por 42 y los cuatro productos suman 1008, como 42 veces 24, del mismo modo que también el dicho escapezo multiplican 42 veces 24. Parte en cuantas partes quisieres cada número de estos, multiplica todas las partes del uno por cada una de las del otro, y por la otra suma todas las multiplicaciones y viene.»

Este procedimiento consiste en descomponer alguno de los factores como suma de números de un solo dígito y, acto seguido, aplicar la distributividad del producto respecto de la suma.

Por ejemplo:

$$42 \times 24 = 42 \times (4+5+6+9) =$$
$$= (42 \times 4) + (42 \times 5) + (42 \times 6) + (42 \times 9) =$$
$$= 168 + 210 + 252 + 378 = 1008$$

Multiplicación por copa (figura 14)

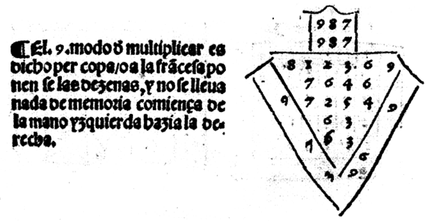
El. 9. modo d multiplicar es dicho per copa / o a la frãcesa pónen se las dezenas, y no se lleua nada de memoria comiença de la mano yzquierda hazia la derecha.

Figura 14.
«El 9 modo de multiplicar es dicho *por copa* o a la francesa. Se ponen las decenas y no se lleva nada de memoria. Comienza de la mano izquierda hacia la derecha.»

Este algoritmo se llama así dado que los productos parciales se distribuyen de forma caprichosa, según sus órdenes de magnitud, de modo que la estructura final recuerda la silueta de una copa.

La localización de cada uno de los productos parciales del ejemplo de Texeda (en el que hay varios errores) se detalla en la tabla 2 (Sánchez Pérez, 1949, p.143):

9 8 7 9 8 7 a a b c f k b c e h d d f k e g g h 9 7 4 1 6 9	9 × 9 = 81 = aa 9 × 8 = 72 = bb 9 × 7 = 63 = cc 8 × 9 = 72 = dd 8 × 8 = 64 = ee 8 × 7 = 56 = ff 7 × 9 = 63 = gg 7 × 8 = 56 = hh 7 × 7 = 49 = kk

Tabla 2

Nuevamente, como en casos anteriores, es estrictamente necesario conocer el orden de magnitud del resultado de cada uno de los productos parciales puesto que su ubicación en el esquema depende estrictamente de dicho orden de magnitud.

Multiplicación por conjunción (figura 15)

Este método se apoya en la identidad:

$$(10a+b)(10a+c) = (10a+b+c)10a + bc$$

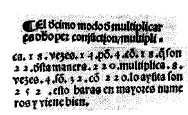
El décimo modo d multiplicar es dho per conjũcion / multiplica. 18. vezes. 14. põ. 4. cõ. 18. q son 22. dsta manera. 220. multiplica. 8. vezes. 4. sõ. 32. cõ 220. lo ayũta son 252. esto haras en mayores numeros y viene bien.

Figura 15.
«El décimo modo de multiplicar es dicho *por conjunción.* Multiplica 18 veces 14. Pon 4 con 18, que son 22, de esta manera 220. Multiplica 8 veces 4, son 32. Lo ajuntas con 220, son 252. Esto harás en mayores números y viene bien.»

Nótese que, pese a la optimista afirmación «esto harás con mayores números y viene bien», este método no admite una generalización demasiado directa. Esto es así porque el hecho de que ambos números tengan la misma cifra de las decenas juega un papel crucial en la identidad anterior.

Método del multiplicador móvil (figura 16)

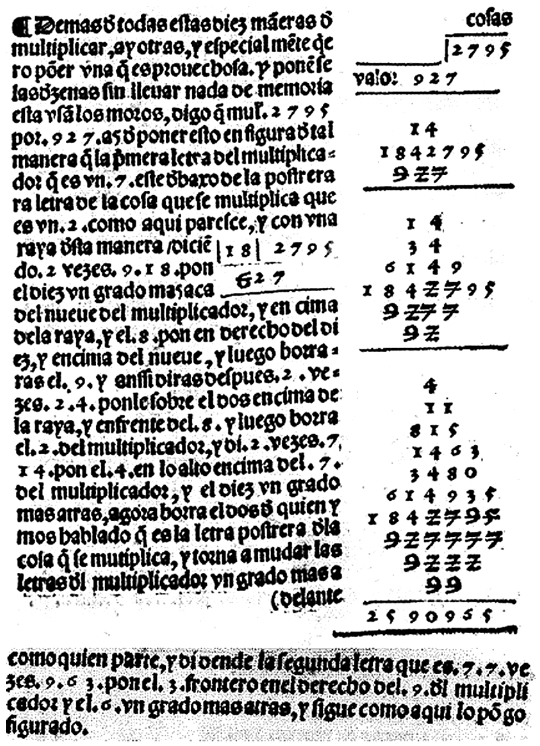
Ademas d todas estas diez maneras d multiplicar, ay otras, y especial mente de ro poner vna q es prouechosa. y ponense las dezenas sin llevar nada de memoria esta vsan los moros, digo q mul. 2795 por. 927. as d poner esto en figura d tal manera q la primera letra del multiplicador q es vn. 7. este debaxo de la postrera letra de la cosa que se multiplica que es vn. 2. como aqui paresce, y con vna raya desta manera /diciendo. 2 vezes. 9. 18. pon el diez vn grado mas aca del nueue del multiplicador, y en cima dela raya, y el. 8. pon en derecho del diez, y encima del nueue, y luego borraras el. 9. y anssi diras despues. 2. vezes. 2. 4. ponle sobre el dos encima de la raya, y enfrente del. 8. y luego borra el. 2. del multiplicador, y di. 2. vezes. 7. 14. pon el. 4. en lo alto encima del. 7. del multiplicador, y el diez vn grado mas atras, agora borra el dos d quien ya mos hablado q es la letra postrera dla cosa q se multiplica, y torna a mudar las letras dl multiplicador vn grado mas adelante como quien parte, y di dende la segunda letra que es. 7. 7. vezes. 9. 63. pon el. 3. frontero en el derecho del. 9. dl multiplicador y el. 6. vn grado mas atras, y sigue como aqui lo pongo figurado.

Figura 16.

«Además de todas estas diez maneras de multiplicar, hay otras, y especialmente debo poner una que es provechosa y se ponen las decenas sin llevar nada en la memoria, esta usan los moros. Digo que multipliques 2795 por 927.Has de poner esto en figura de tal manera que la primera letra del multiplicador que es un 7 esté debajo de la postrera letra de la cosa que se multiplica, que es un 2, como aquí parece y con una raya de esta manera.

Diciendo 2 veces 9 son 18. Pon el 10 un grado más acá del nueve del multiplicador y encima de la raya, y el 8 pon en derecho del diez y encima del nueve y luego borrarás el 9 [del multiplicador] y así dirás después: 2 veces 2, 4. Ponle sobre el dos encima de la raya y enfrente del 8 y luego borra el 2 del multiplicador y di: 2 veces 7, 14. Pon el 4 en lo alto, encima del 7 del multiplicador, y el diez un grado más atrás. Ahora borra el dos de quien hemos hablado, que es la letra postrera de la cosa que se multiplica,

Y torna a mudar las letras del multiplicador un grado más adelante, como quien parte, y di desde la segunda letra, que es 7, 7 veces 9, 63. Pon el 3 frontero en el derecho del 9 del multiplicador y el 6 un grado más atrás y sigue como aquí lo pongo figurado.»

El procedimiento descrito por Texeda presenta un rasgo interesante: la disposición inicial del multiplicando y multiplicador. En el caso concreto que se estudia (2795 927), las cifras de los factores ocupan seis columnas; por consiguiente, el «tamaño» del producto será de seis o siete cifras según sea el tamaño del producto de las cifras de mayor orden del multiplicando y multiplicador. Este hecho, que va en la misma dirección que algunos comentarios realizados al presentar algoritmos anteriores, demuestra un buen conocimiento del sistema de numeración decimal por parte del creador del algoritmo.

Por lo demás, el método del multiplicador móvil goza de las características siguientes: (i) se opera de izquierda a derecha, (ii) se escriben «al completo» los productos parciales.

En la tabla 3 siguiente presentamos el desarrollo del ejemplo de la *Suma*.

Aspectos didácticos

Sobre la definición de multiplicación

Hemos sido incapaces de encontrar la definición de multiplicación en la *Suma de Arithmetica pratica y de todas mercaderias con la horden de contadores*. Dicha omisión nos parece grave dada su importancia a la hora de comprender las diversas técnicas que se pueden utilizar para efectuar dicha operación.

Entre las diversas definiciones-descripciones que aparecen en textos españoles del siglo XVI, nos parece didácticamente apropiada la que el valenciano Miguel Gerónimo de Santa Cruz ofrece en su *Libro de Arithmetica especvlativa, y practica, intitvlado, el Dorado Contador* (edición de 1625)[5]:

> La quarta especie de la Aritmetica pratica, es el multiplicar, y la tercera regla de las cinco principales, no es otra cosa que breue sumar,

Disposición inicial							Interpretación
		2	*7*	*9*	*5*		2795 × 927
9	*2*	*7*					
Primera fase							**Interpretación**
		1	**4**				
1	**8**	*4*	*2*	*7*	*9*	*5*	927 × 2000
	9	*2*	*7*				
		1	4				Se borran las cifras del multiplicador y la de cuarto orden (2) del multiplicando y se vuelve a escribir el multiplicador desplazándolo un lugar hacia la derecha.
1	8	4		*7*	*9*	*5*	
	9	*2*	*7*				
Segunda fase							**Interpretación**
		1	**4**				
		3	**4**				
	6	1	4	**9**			927 × 700
1	8	4		*7*	*9*	*5*	
		9	*2*	*7*			
		1	4				Se borran las cifras del multiplicador y la de tercer orden del multiplicando (7) y se vuelve a escribir el multiplicador desplazándolo un lugar hacia la derecha.
		3	4				
	6	1	4	9			
1	8	4			*9*	*5*	
			9	*2*	*7*		
Tercera fase							**Interpretación**
			1				
		8	**1**				
		1	4	**6**			
		3	4	**8**			927 × 90
	6	1	4	9	**3**		
1	8	4			*9*	*5*	
			9	*2*	*7*		
			1				Se borran las cifras del multiplicador y la de segundo orden del multiplicando (9) y se vuelve a escribir el multiplicador desplazándolo un lugar hacia la derecha.
		8	1				
		1	4	6			
		3	4	8			
	6	1	4	9	3		
1	8	4				*5*	
				9	*2*	*7*	
Cuarta fase							**Interpretación**
			4				
			1	**1**			
		8	1	**5**			
		1	4	6	**3**		927 × 5
		3	4	8	**0**		
	6	1	4	9	3	**5**	
1	8	4				*5*	
				9	*2*	*7*	
			4				
			1	1			
		8	1	5			
		1	4	6	3		Se borran las cifras del multiplicador y la de primer orden del multiplicando (5).
		3	4	8	0		
	6	1	4	9	3	5	
1	8	4					
Quinta fase							**Interpretación**
			4				
			1	1			
		8	1	5			Se suman los productos parciales y se obtiene el resultado de la multiplicación propuesta.
		1	4	6	3		
		3	4	8	0		
	6	1	4	9	3	5	
1	8	4					
2	**5**	**9**	**0**	**9**	**6**	**5**	

Tabla 3

> y se inuentò para sumar con presteza y facilidad, lo que por la primera regla de sumar fuera cosa pesada, y de gran dilacion, porque si quisieses sumar 159 varas de terciopelo, por precio de 3450 marauedis cada vara, auias de assentar el numero del dicho precio tantas vezes como vnidades se contienen en las varas de terciopelo, y sumar todas las partidas, para saber el valor del dicho terciopelo, pues mira el tie(m)po y cansera q(ue) seria menester para hazer la tal cue(n)ta, quanto mas, que suceden partidas muy mayores sin comparacion: las quales serian muy dificultosas y tardias de hazer por la primera regla de sumar, como arriba dixe. Por tanto conuiene q(ue) se hagan las quentas semejantes por multiplicar (...).

La definición de multiplicación como suma reiterada no es la única. Esta definición surge de una aproximación a los números naturales que se basa en la idea de contar (formalizada por los axiomas de Peano). Sin embargo, si se entienden los números naturales desde un punto de vista conjuntista, considerados como los cardinales de conjuntos finitos (idea introducida por Cantor), la multiplicación surge al considerar el cardinal del producto cartesiano de dos conjuntos. Ambas definiciones deben abordarse en la formación de maestros, pues existen contextos y situaciones que se abordan mejor siguiendo uno u otro enfoque.

No obstante, pensamos que la identificación de la multiplicación como una suma de sumandos iguales es fundamental para establecer un orden didáctico en la enseñanza de las operaciones aritméticas elementales, para construir los diferentes tipos de tablas de multiplicar y para analizar los diversos algoritmos que se presentan.

Sobre la cronología curricular *de las cuatro operaciones elementales*

En el manual de Texeda, en las *Aritméticas* del siglo de oro español y en la totalidad de los manuales consagrados a la enseñanza de la aritmética que hemos podido consultar, el orden en que se enseñan las cuatro operaciones aritméticas elementales es: adición, sustracción, multiplicación, división.

Es cierto que en Educación Infantil parece conveniente introducir «problemas de restar» simultáneamente con «problemas de sumar» puesto que ambas situaciones están íntimamente ligadas y las técnicas de resolución informales que pueden utilizar los niños son muy similares en ambos casos (recuento progresivo o regresivo , por ejemplo). En todo caso, en ese punto los niños no son (ni tienen necesariamente que ser) conscientes de estar sumando o restando. Sin embargo, ya en la Educación Primaria, cuando se formalizan los procesos anteriores y se presentan los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales, pensamos que muy bien podría optarse por la siguiente «cronología curricular»: adición, multiplicación, sustracción, división.

En todo caso cabría hacerse la pregunta sobre qué operación surge de forma más natural si la resta o la multiplicación. Según Freudenthal (recogido por Puig y Cerdán (1988, pág. 79)) «la multiplicación es la operación que surge de forma más natural ya que posee un soporte lingüístico en el lenguaje vernáculo gracias a términos como doble, triple, etc., y a las expresiones con veces».

Sobre la tabla de multiplicar

Hay unanimidad entre los autores renacentistas en que la tabla de multiplicar debe aprenderse de memoria. Compartimos esta idea siempre que la tabla no sea un producto ajeno al aprendiz; en otras palabras: el estudiante (atendiendo a la definición de multiplicación que hemos considerado en el apartado «Sobre la definición de multiplicación») debe construir su propia tabla de multiplicar. En este senido, según Gómez (1988):

> Hay un punto de vista tradicional que aboga por el aprendizaje «a ciegas» o memorístico de las tablas, y otro que defiende que esto no es necesario ya que la mayoría logra un dominio efectivo del cálculo cuando recurre a desarrollar estrategias personales (…) Para tomar una decisión sobre cuál es la línea de actuación más adecuada, conviene tener presente que quizá un planteamiento conduce a otro. Aunque esto no se da en los dos sentidos: El uso de estrategias puede acabar en memorización de resultados, pero la memorización de resultados no sólo no conduce al diseño de estrategias, sino que las obstruye.

Recomendamos que el alumno construya las tablas usuales desde la del cero[6] hasta la del nueve; las tablas del 10, 20, 30, … , 90; las tablas del 100, 200, 300, …, 900; las tablas del 1000, 2000, 3000, … , 9000; las tablas del con a partir de las cuales debe descubrir las reglas para multiplicar un número de una cifra por 10, 100, 1000, … y para multiplicar un número de un dígito por un número *formado* por una cifra significativa seguida de ceros.

0 × 0 , 0 × 1 , 0 × 2 , 0 × 3 , … , 0 × 9
1 × 0 , 1 × 1 , 1 × 2 , 1 × 3 , … , 0 × 9
....
9 × 0 , 9 × 1 , 9 × 2 , 9 × 3 , … , 9 × 9

10 × 0 , 10 × 1 , 10 × 2 , 10 × 3 , … , 10 × 9
20 × 0 , 20 × 1 , 20 × 2 , 20 × 3 , … , 20 × 9
....
90 × 0 , 90 × 1 , 90 × 2 , 90 × 3 , … , 90 × 9

100 × 0 , 100 × 1 , 100 × 2 , 100 × 3 , … , 100 × 9
200 × 0 , 200 × 1 , 200 × 2 , 200 × 3 , … , 200 × 9
....
900 × 0 , 900 × 1 , 900 × 2 , 900 × 3 , … , 900 × 9

1000 × 0 , 1000 × 1 , 1000 × 2 , 1000 × 3 , … , 1000 × 9
2000 × 0 , 2000 × 1 , 2000 × 2 , 2000 × 3 , … , 2000 × 9
....
9000 × 0 , 9000 × 1 , 9000 × 2 , 9000 × 3 , … , 9000 × 9

Tabla 4

Aunque la comprensión del algoritmo de la multiplicación es un proceso muy complejo (Gallardo, 2004), pensamos que el conocimiento de estas tablas resultará fundamental para el alumno a la hora de aplicar los diversos algoritmos de la multiplicación.

Sobre los algoritmos de la multiplicación

Para descubrir los beneficios didácticos de los algoritmos de la multiplicación presentados por Texeda, parece natural que detectemos las deficiencias pedagógicas, si es que las hay, del procedimiento que se utiliza actualmente para obtener el producto de dos números naturales.

Primera caso. El multiplicador tiene una sola cifra

Consideremos, por ejemplo, la multiplicación siguiente:

$$\begin{array}{r} 4\,567 \\ \times\ 8 \\ \hline 36\,536 \end{array}$$

Dicha operación se efectúa atendiendo a la regla (Rey Pastor y Puig Adam, 1935):

> Para multiplicar un número de varias cifras por un multiplicador de una sola, se escribe éste debajo de aquél; se multiplican luego sucesivamente cada una de las cifras del multiplicando por el multiplicador, empezando por la derecha, e inscribiendo solamente la cifra de las unidades, y añadiendo la cifra de las decenas de cada producto a las unidades del producto siguiente.

En la tabla 5 ofrecemos un listado con algunas de las ventajas e inconvenientes de este algoritmo:

VENTAJAS	INCONVENIENTES
• Ocupa poco espacio físico. • Se obtienen las cifras del resultado progresivamente, en orden creciente de magnitud. • Requiere únicamente el conocimiento de las tablas de multiplicar de números de una cifra.	• Se deben memorizar las «llevadas». • Se pierde de vista la definición de multiplicación. • Se omite la justificación de la posición que ocupa cada producto parcial. • Se multiplica de derecha a izquierda.

Tabla 5

¿Cuál es el fundamento de la regla anterior?

Si se atiende a la definición de multiplicación que estamos manejando, la multiplicación propuesta es una suma de ocho sumandos iguales a 4567.

Por consiguiente:

$$\begin{array}{r} 4\,567 \\ \times\ 8 \\ \hline 4\,567 \\ 4\,567 \\ 4\,567 \\ 4\,567 \\ 4\,567 \\ 4\,567 \\ 4\,567 \\ 4\,567 \\ \hline 36\,536 \end{array}$$

Esta forma de multiplicar a la que podría llamarse «multiplicar sumando» es la más natural cuando el multiplicador tiene una sola cifra y debería ser el primer algoritmo utilizado por cualquier aprendiz.

Por otro lado, esta suma se efectúa del modo siguiente:

Suma unidades = 7 × 8 = 56 unidades [= 5 decenas y 6 unidades]
Suma decenas = 6 × 8 = 48 decenas [= 4 centenas y 8 decenas][7]
Suma centenas = 5 × 8 = 40 centenas [= 4 millares][8]
Suma millares = 4 × 8 = 32 millares [= 3 decenas de millar y 2 millares][9]

Entonces, el cálculo del producto viene dado por[10]:

DM	*M*	*C*	*D*	*U*
	4	5	6	7
			×	8
			5	6
		4	8	0
	4	0	0	0
3	2	0	0	0
3	*6*	*5*	*3*	*6*

Consecuentemente, para este tipo de multiplicaciones conviene que el docente siga, en este orden, las secuencias didácticas (1) + (2) y (1) + (3) que se esquematizan en la figura 17.

Notemos que en cada una de estas dos secuencias se solventan la mayoría de los inconvenientes ex-

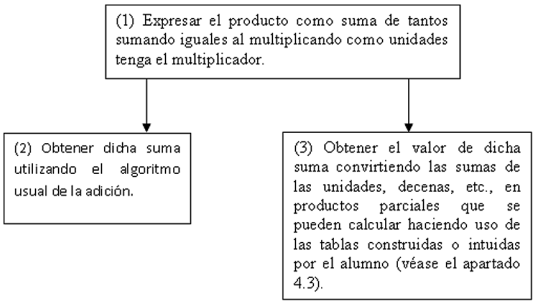

Figura 17

puestos en la tabla precedente. Por otro lado, justo es decirlo, el proceso es más largo.

Atendiendo a esta propuesta, resulta claro que (antes de aplicar el algoritmo actual) en la fase (3) se puede proponer algún «procedimiento histórico».

Entre todos los algoritmos propuestos por Texeda, *la multiplicación por castellucio* se ajusta perfectamente a nuestro propósito.

En el ejemplo que nos ocupa, el «método del castillo» se podría aplicar así:

$$\begin{array}{rl} 4\,567 & \\ \times\ 8 & \\ \hline 32\,000 & [= 4\,000 \times 8] \\ 4\,000 & [= 500 \times 8] \\ 480 & [= 60 \times 8] \\ 56 & [= 7 \times 8] \\ \hline 36\,536 & \end{array}$$

La *multiplicación por gelosia o graticola* también encajaría en la fase (3). Dado que en su desarrollo no aparecen los ceros que indican el rango de los productos parciales, este algoritmo debería introducirse cuando el aprendiz comprenda y aplique de forma competente la técnica del *castellucio*. Otros procedimientos similares (*multiplicación por copa* y *método del multiplicador móvil*) también podrían incluirse en el currículo antes de interiorizar el algoritmo actual restringido a multiplicadores de una cifra.

Segundo caso. El multiplicador es un número de dos cifras compuesto

Sea la operación 234 × 18.

Aplicando la definición de multiplicación se tiene que:

$$234 \times 18 = \underbrace{234 + \ldots + 234}_{18 \text{ veces}} =$$

$$= \underbrace{(234+234) + \ldots + (234+234)}_{9 \text{ veces}} =$$

$$= \underbrace{(234 \times 2) + \ldots + (234 \times 2)}_{9 \text{ veces}} =$$

$$= (234 \times 2) \times 9 = 468 \times 9 = 4212$$

Esta forma de multiplicar [= *multiplicación por repriego*] puede ser una buena excusa para introducir la propiedad asociativa de la multiplicación a partir de la propiedad asociativa de la adición.

Tercer caso. El multiplicador es un número cualquiera de dos cifras

Sea la multiplicación 234 × 17

En esta situación, se tiene que:

$$234 \times 17 = \underbrace{234 + \ldots + 234}_{17 \text{ veces}} =$$

$$= \underbrace{234 + \ldots + 234}_{9 \text{ veces}} + \underbrace{234 + \ldots + 234}_{5 \text{ veces}} +$$

$$+ \underbrace{234 + \ldots + 234}_{3 \text{ veces}}$$

Entonces:

$$234 \times 17 =$$

$$= (234 \times 9) + (234 \times 5) + (234 \times 3) =$$

$$= 2106 + 1170 + 702 = 3978$$

Esta manera de proceder [= *multiplicar por escapezo*] permite introducir la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.

Cuarto caso. El multiplicador es un número en el que todas las cifras, salvo la de mayor orden, son ceros

Supongamos que queremos efectuar las operaciones siguientes:

73 × 20, 235 × 300, 7 891 × 4 000,

Aplicando la definición de multiplicación se tiene que:

$$73 \times 20 = \underbrace{20 + \ldots + 20}_{73 \text{ veces}} =$$
$$= \underbrace{10 + \ldots + 10}_{2\times 73 \text{ veces}} = 1460$$

$$235 \times 300 = \underbrace{300 + \ldots + 300}_{235 \text{ veces}} =$$
$$= \underbrace{100 + \ldots + 100}_{3\times 235 \text{ veces}} = 705000$$

$$7891 \times 400 = \underbrace{4000 + \ldots + 4000}_{7891 \text{ veces}} =$$
$$= \underbrace{1000 + \ldots + 1000}_{4\times 7891 \text{ veces}} = 31564000$$

A partir de estos resultados, se infiere la regla siguiente (Serret, 1881):

> Para multiplicar un número por una cifra significativa seguida de uno o varios ceros, basta multiplicar el número por esta cifra y escribir a la derecha del resultado tantos ceros como haya a la derecha de la cifra.

Quinto caso. El multiplicando y el multiplicador tienen varias cifras significativas

Esta situación se resuelve sin dificultad calculando los productos parciales del multiplicando por las unidades, decenas, centenas, etc., del multiplicador. Valen aquí reflexiones similares a las que hemos hecho al analizar el primer caso (el multiplicador tiene una sola cifra).

En lo que se refiere a los desplazamientos hacia la izquierda del segundo producto parcial, tercer producto parcial, etc., que aparecen en el algoritmo actual, nos parece muy apropiado el siguiente párrafo (Salinas y Benítez, 1933):

> Como cada producto parcial ha de representar unidades de igual orden que la cifra del multiplicador, a que corresponde, terminará respectivamente en uno, dos, tres, etc., ceros según que provenga de multiplicar el multiplicando por las decenas, centenas, etc., del multiplicador; mas como dichos ceros no influyen en la suma de los mencionados productos, podrán suprimirse siempre que se tenga la precaución de colocar convenientemente las primeras cifras de la derecha de los diversos productos parciales, obtenidos en igual forma que si todas las cifras del multiplicador representasen unidades simples.

Guión para una unidad didáctica sobre multiplicación de números naturales dirigida a alumnos de magisterio

Los algoritmos presentados en el apartado «Algoritmos de la multiplicación», además de su evidente interés histórico, tienen también interés didáctico (Meavilla, 2008, 2010). Para comprender su funcionamiento y entender los motivos por los que dichos algoritmos funcionan se requiere una profunda comprensión sobre el funcionamiento del sistema de numeración posicional de base 10, además de algunas propiedades básicas de las operaciones.

Este es el tipo de comprensión que pensamos que se debe fomentar entre los futuros maestros de primaria. Conocer los diferentes algoritmos de la multiplicación que han existido a lo largo del tiempo, su funcionamiento, sus ventajas e inconvenientes, permitirá a estos futuros maestros, entre otras cosas, anticipar y tratar de paliar las dificultades de sus alumnos a la hora de aprender a multiplicar.

Atendiendo a estas consideraciones y teniendo en cuenta que el uso de estas fuentes históricas puede resultar interesante en el trabajo con maestros en formación (Jahnke et al., 2000), hemos confeccionado el siguiente listado de contenidos relativos a la enseñanza y aprendizaje del algoritmo de la multiplicación de números naturales para su posible inclusión en el temario de una asignatura dedicada a la Didáctica de la aritmética en el Grado en Magisterio de Educación Primaria.

— Definición de multiplicación de números naturales como suma de sumandos iguales.
— Construcción de las tablas de multiplicar. ¿Cuáles son necesarias?

- — La propiedad conmutativa de la multiplicación y las tablas de multiplicar.
- — Multiplicaciones en las que el multiplicador sólo tiene una cifra. El método de «multiplicar sumando»: ventajas e inconvenientes.
- — Multiplicaciones en las que el multiplicador es un número en el que todas las cifras, salvo la de mayor orden, son ceros.
- — Multiplicaciones en las que el multiplicando y multiplicador tienen varias cifras significativas.
- — Análisis de algunos algoritmos clásicos de la multiplicación: multiplicación por *castellucio*, multiplicación *por gelosia*, multiplicación *por copa* método del multiplicador móvil.
- — La propiedad asociativa de la multiplicación: multiplicación *por repriego*.
- — La propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición: multiplicar *por escapezo*
- — Multiplicación *por cuadrilátero*: Hacia el algoritmo actual de la multiplicación
- — Valoración didáctica del algoritmo actual de la multiplicación.

1. Calcula el resultado de la multiplicación 4567 × 9.

2. ¿Conoces algún procedimiento, distinto del que has utilizado, que te permita calcular el resultado de la operación anterior?

3. Intenta calcular el resultado de la multiplicación anterior multiplicando de izquierda a derecha.

4. En la multiplicación siguiente, explica por qué el segundo producto parcial (contando de arriba hacia abajo) está «desplazado» hacia la izquierda.

```
          3 0 2 5
        x 2 0 9
      2 7 2 2 5
  6 0 5 0
  6 3 2 2 2 5
```

5. ¿Cómo crees que se deben introducir las tablas de multiplicar a los alumnos?
(*i*) Las debe construir el alumno.
(*ii*) Se deben dar ya hechas al alumno.
(*iii*) Cualquiera de las dos opciones anteriores me parece correcta.

6. ¿Estás o no de acuerdo en que las tablas de multiplicar se han de aprender de memoria?

7. ¿Crees que se deberían enseñar varios algoritmos de la multiplicación y que cada alumno opere con el que más le guste? Razona tu respuesta.

Figura 18

A modo de epílogo: una encuesta para futuros maestros

Presentamos una propuesta de cuestionario para alumnos del Grado en Magisterio de Educación Primaria (figura 18). Este cuestionario se podría utilizar como instrumento de evaluación después de trabajar los contenidos enunciados en el parágrafo anterior.

Sin embargo pensamos que resultaría más interesante su utilización como punto de partida para ir introduciendo algunas de las ideas discutidas anteriormente y para suscitar el debate entre los estudiantes.

Referencias bibliográficas

BERGGREN, J. L. (1986), *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam,* Springer-Verlag, Nueva York.

GALLARDO, J. (2004), *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales,* Tesis Doctoral, Universidad de Málaga.

GÓMEZ, P. (1988). *Numeración y cálculo,* Síntesis, Madrid.

JAHNKE, H.N., A. ARCAVI, E. BARBIN, O. BEKKEN, F. FURINGHETTI, A. EILDRISSI, C. M. SILVA DA SILVA y CH. WEEKS, (2000), «The use of original sources in the mathematics classroom», en J. Fauvel y J. van Maanen (eds.), *History in mathematics education: the ICMI study,* Kluwer, 291-328

MEAVILLA, V. (2008) [2.ª edición], *Aspectos históricos de las matemáticas elementales*, Prensas Universitarias de Zaragoza, Zaragoza.

— (2010), *La sinfonía de Pitágoras. El fascinante mundo de la Aritmética,* Almuzara, Córdoba.

PUIG, L., y F. CERDÁN (1988), *Problemas aritméticos escolares,* Síntesis, Madrid.

REY PASTOR, J., y P. PUIG ADAM (1935) [8.ª tirada], *Elementos de Matemáticas*, Unión Poligráfica, Madrid.

SALINAS, I., y M. BENÍTEZ (1933) [13.ª edición revisada], *Aritmética*, Librería y casa editorial Hernando, Madrid.

SÁNCHEZ PÉREZ, J. A. (1949), *La aritmética en Roma, en India y en Arabia,* Consejo Superior de Investigación Científica, Madrid.

SANTA CRUZ, M. G. de (1625), *Libro de Arithmetica especvlativa, y practica, intitvlado, el Dorado Contador*, Viuda de Alonso Martín, Madrid.

SERRET, J. A. (1881) [3.ª edición], *Tratado de Aritmética*, Imprenta y litografía de la Guirnalda, Madrid.

SMITH, D. E. (1958), *History of mathematics*, Dover, Nueva York.

TEXEDA, G. de (1546). *Suma de Arithmetica pratica y de todas mercaderias con la horden de contadores*, Francisco Fernandez de Cordoua, Valladolid.

Referencias web

http://www.divulgamat.net/ [*Luca Pacioli (Algunos algoritmos de la multiplicación)*]

<http://fondosdigitales.us.es/books/digitalbook_view?oid_page=218154> [L. Pacioli (1494), *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità*]

VICENTE MEAVILLA SEGUÍ
Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza
<meavilla@unizar.es>

ANTONIO M. OLLER MARCÉN
Centro Universitario de la Defensa, Academia General Militar
<oller@unizar.es>

1 De Gaspar de Texeda desconocemos cualquier dato biográfico.

2 Aunque para un lector de la época (e incluso para un alumno actual) el hecho de que 9 veces 8 sea lo mismo que 8 veces 9 no ha de ser en absoluto evidente.

3 Los ocho primeros algoritmos ofrecidos por Texeda son los que presenta Luca Pacioli en la *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità* (1494).

4 La «multiplicación por gelosía», al no esconder resultados intermedios, permite descubrir los errores sin necesidad de rehacer la operación. Además, el orden de ejecución es irrelevante (Gómez, 1988).

5 La primera edición del *Dorado Contador* es de 1594.

6 La tabla del cero puede presentar algún problema a la hora de aplicar la definición de la multiplicación como suma con todos los sumandos iguales. De hecho, puesto que es más conveniente introducir inicialmente el 0 como símbolo (cifra) antes que como una cantidad, puede ser interesante indicar a los alumnos que «$0 \times$ algo = 0».

7 Este producto debe ser conocido por el aprendiz si se atiende a las consideraciones del apartado «Sobre la tabla de multiplicar».

8 Este producto debe ser conocido por el aprendiz si se atiende a las consideraciones del apartado «Sobre la tabla de multiplicar».

9 Este producto debe ser conocido por el aprendiz si se atiende a las consideraciones del apartado «Sobre la tabla de multiplicar».

10 Nótese que, en esta situación, en el cálculo del producto surge de forma natural la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.