suma+ 69
ARTÍCULOS
Marzo 2012
pp. 73-81

Detección y corrección de errores de concepto

FÉLIX MARTÍNEZ DE LA ROSA

En este artículo se abordan ciertos errores de concepto relativos al análisis matemático detectados en los alumnos, se analizan las posibles causas que los provocan y se aportan recursos visuales para corregirlos.

Palabras clave: Investigación didáctica, Errores de concepto, Visualización, Recursos Aprendizaje.

Identification and Correction of Misconceptions

This paper deals with several misconceptions concerning to mathematical analysis identified in students. Their possible causes are studied and some visual resources for their correction are addressed.

Key words: Educational Research, Misconceptions, Visualization, Resources, Learning.

El marco curricular de este artículo es el primer curso de Matemáticas en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Cádiz. Durante los últimos 10 años, he impartido docencia en Matemáticas, tanto en la Licenciatura en Administración y Dirección de Empresas como en la Diplomatura en Empresariales, y desde el curso 2009-2010, en las Matemáticas de los nuevos Grados de GADE (Administración y Dirección de Empresas) y FYCO (Finanzas y Contabilidad).

A lo largo del tiempo he podido observar algunos errores que, de manera sistemática, cometen los alumnos. Se pueden clasificar en tres tipos:

1) Errores de tipo operativo.
2) Errores al aplicar la fórmula de un teorema o un algoritmo.
3) Errores en los conceptos matemáticos.

En el primer tipo se engloban las equivocaciones cometidas al simplificar una expresión, despejar mal una incógnita, resolver una ecuación, etc. Unas veces se producen por falta de atención y cuidado en la resolución del ejercicio, y otras por falta de base para operar. En ocasiones, los errores al operar se deben al uso incorrecto de la notación

Artículo recibido en *Suma* en abril de 2010 y aceptado en diciembre de 2011

matemática o a simplificaciones erróneas que se realizan de forma automática.

Los errores del segundo tipo se analizan con detalle en (Martínez, 2006). Estos errores son provocados al aplicar, de forma indiscriminada, las fórmulas que nos proporcionan los teoremas sin verificar antes que se cumplen los requisitos para poder utilizarlas.

Los del tercer tipo son errores que se pueden observar al plantear cuestiones que no requieren la realización de ningún cálculo, sino la comprensión de un concepto.

En este artículo se muestra la manera en que se pueden detectar algunos de estos errores de concepto, se analizan los motivos por los que se producen, y se ofrecen recursos de tipo visual para intentar prevenirlos y erradicarlos.

Detección de errores

Los alumnos que se incorporan a la Universidad, sea cual sea el itinerario en el que han cursado la asignatura de matemáticas, deberían ser capaces de contestar con acierto a todas las preguntas del cuestionario de la tabla 1.

1. Calcular el valor de 1/2/3	Solución:
2. Se verifica que $16/64=1\cancel{6}/\cancel{6}4=1/4$	Verdadero/ Falso
3. Calcular *x*/*x*	Solución:
4. Calcular $\sqrt{x^2}$	Solución:
5. Calcular el límite de la sucesión {1,1/2,1,1/3,1,1/4,…}.	Solución:
6. La suma de los infinitos términos de una sucesión es infinito.	Verdadero/ Falso
7. Las asíntotas no cortan a la curva	Verdadero/ Falso
8. Si existe asíntota horizontal, no existe asíntota oblicua.	Verdadero/ Falso
9. Una recta tangente a una curva no puede atravesarla por su puntode tangencia.	Verdadero/ Falso
10. Si una función no es derivable en un punto, no existe extremo relativo en ese punto.	Verdadero/ Falso

Tabla 1. Cuestionario

Este cuestionario está formado por algunas de las preguntas que, año tras año, planteo a los alumnos de forma paulatina en los temas correspondientes. La gran mayoría es incapaz de responderlas acertadamente.

En el curso 2009-2010, he impartido docencia en el módulo de innovación docente e iniciación a la investigación educativa del nuevo Máster de formación del profesorado. El grupo, de 44 alumnos, estaba formado mayoritariamente por ingenieros, técnicos y superiores, y arquitectos. Resultado: tres alumnos obtuvieron la máxima nota de 7. Aprobaron menos de la mitad.

Causas de los errores

Las *preguntas 1-4* no tienen que ver tanto con el cálculo de una operación en sí, sino con prácticas erróneas que se dan al operar.

La pregunta 1 advierte sobre el uso incorrecto de la notación matemática. A ella una mitad de los alumnos responde 3/2; y la otra, 1/6. Sólo después de una discusión llegan a la conclusión de que la fracción está mal escrita.

La pregunta 2 pretende hacer notar que no basta con que el resultado que se obtenga al operar sea correcto. Es necesario que todo el proceso lo sea. Aquí va otro ejemplo: «$\ln x - \ln 3 = \ln 5 - \ln(x-2)$, entonces $x-3 = 5-(x-2)$, luego $x = 5$». De hecho esa es la solución correcta.

La pregunta 3 hace hincapié en que la realización de forma impulsiva de una simplificación puede provocar la aparición de errores de cálculo. El primer impulso es responder 1 a esta pregunta. Con una pequeña reflexión sobre el valor de x, se llega a la respuesta correcta.

A la pregunta 4 se contesta, también de forma impulsiva, que x es la respuesta. El razonamiento falso: «$(-5)^2 = 5^{\ 2}$, entonces $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{5}$ y por tanto –5 = 5», pone de manifiesto la necesidad de meditar un poco la respuesta.

Las *preguntas 5-10* tienen que ver con la errónea comprensión de ciertos conceptos.

La pregunta 5 se refiere al concepto de límite. La respuesta que se da (0) denota la dificultad que tienen los alumnos para entenderlo. Su idea de límite suele ser la de un número al que se acerca la sucesión. Pero la formulación matemática del término «acercarse» no es trivial, ni tampoco lo es el que la sucesión deba «quedarse» cerca del límite. La dificultad de este concepto es evidente y conseguir transmitirlo a los alumnos es algo que los profesores no siempre conseguimos. Aunque al menos, podremos lograr que los alumnos sean capaces de realizar el cálculo del límite de muchas sucesiones (aún sin saber muy bien lo que es).

Pese a que los alumnos sean capaces de obtener la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica, la respuesta que se da a la pregunta 6 (verdadero), refleja que el concepto de una suma infinita no se entiende bien. De hecho no deja de sorprenderles que, después de todo, Aquiles llegue a alcanzar a la famosa tortuga.

Las respuestas que se dan a las preguntas 7 y 8 (verdadero) muestran que los conceptos de límite de una función y de asíntota no se entienden completamente. Respecto del primero, de nuevo nos encontramos ante las dificultades del concepto de límite y su complicada formulación. Respecto del segundo, los alumnos piensan que asíntota y curva se van acercando, pero sin tocarse nunca: no se han planteado que el parecido de ambas en el infinito no es óbice para que se corten antes. Tampoco suelen plantearse que una asíntota horizontal puede serlo sólo por un lado, por lo que no es incompatible con la existencia de una oblicua. Sin embargo, conocen muy bien la rutina de obtener las asíntotas de una función.

La respuesta que se da a la pregunta 9 (verdadero), hace ver que el concepto geométrico de recta tangente no está totalmente asimilado. El modelo visual que tienen de ella es el de la tangente a una circunferencia. Las rectas que se parecen a ese modelo son tangentes. Atravesar a una curva no se ajusta a ese modelo visual, por lo que queda descartada la tangencia. Sin embargo, el cálculo de una recta tangente no suele plantearles demasiadas dificultades.

Finalmente, la respuesta que se da a la pregunta 10 (verdadero), es debida a la creencia generalizada de los alumnos de que los extremos relativos se calculan únicamente igualando a cero la derivada. Ese tipo de ejercicios los resuelven con solvencia. Pero su modelo se reduce a éste y en él no entran las funciones no derivables.

En resumen, los alumnos tienen adquiridos una serie de conocimientos de los procesos «mecánicos» que hay que seguir para calcular el límite de una sucesión sencilla, la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica, las asíntotas de una función, la ecuación de una recta tangente o los extremos relativos de funciones derivables mientras que, al mismo tiempo, los conceptos a los que se refieren esas rutinas no están totalmente asentados (véase la tabla 2).

Conocimientos	*Carencias*
Calcular el límite de una sucesión	No entender el comportamiento de una sucesión respecto de su límite
Calcular la suma infinita de una progresión geométrica	No comprender que la suma de infinitos números puede se finita
Calcular el límite de una función	No identificar, gráficamente, los tipos de límite de una función.
Calcular asíntotas	Creer que una asíntota no puede cortar a la curva. Creer que una asíntota horizontal lo es por los dos lados, y que éstas son incompatibles la oblicua.
Calcular una derivada	No identificar, gráficamente, los puntos de no derivabilidad.
Calcular una recta tangente	No visualizar una recta tangente como límite de rectas secantes.
Calcular puntos críticos	No saber que pueden existir extremos en puntos donde no hay derivabilidad

Tabla 2. Conocimientos y carencias

El análisis de estas observaciones lleva a la conclusión de que, en la docencia de las matemáticas, se incide, y así hay que hacerlo, en la mecanización de ciertas rutinas que solucionan la mayoría de los problemas (entre ellos los del examen de acceso a la Universidad). Pero los conceptos involucrados, aunque se introducen de forma adecuada, no se analizan con demasiado detalle: no es fácil hacerlos comprender, y el tiempo es un recurso escaso.

Pero si la esencia del concepto no se entiende, lo que queda es una colección de recetas que, una vez superado el escollo (la prueba de acceso o cualquier otro examen), suelen olvidarse a una velocidad vertiginosa.

Visualización de conceptos

En el contexto de la educación matemática existe una tendencia a hacer del razonamiento visual una práctica aceptable y habitual para el aprendizaje. Una buena imagen intuitiva ayuda a la comprensión de los conceptos y de su correspondiente expresión analítica. Por tanto, la visualización es una de las herramientas que mejor ayudan al proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En los libros (Nelsen, 2000 y 2001) están recogidas muchas demostraciones visuales y sin palabras, que facilitan la comprensión de conceptos. Un recurso con muchas posibilidades para la enseñanza es la página web siguiente:

<http://demonstrations.wolfram.com/>

En ella se encuentran visualizaciones de los conceptos matemáticos, a todos los niveles. Pulsando en el centro de la imagen que se haya elegido aparece el mensajeque nos permitirá acceder a una versión interactiva de la visualización:

download live version with active controls

Moviendo los controles correspondientes podremos manipular la imagen como queramos.

A continuación se exponen algunos recursos visuales de los que nos podemos valer para solucionar los errores de concepto detectados y descritos antes.

Recursos para la visualización del concepto de límite de una sucesión y sumas infinitas

Uno de los conceptos más difíciles de transmitir a los alumnos es el de límite de una sucesión. La definición les resulta farragosa y difícil de entender. Para mejorar la comprensión de este concepto se puede recurrir a la figura 1 (reproducida más abajo) de la dirección de Internet:

<http://demonstrations.wolfram.com/LimitOfASequence/>

Moviendo los controles, se puede elegir el tamaño del entorno alrededor del límite y observar que todos los miembros de la sucesión, a partir de uno dado, se van introduciendo en él. Ver el comportamiento de los términos de la sucesión convergente, acercándose de forma paulatina al entorno elegido y quedándose en él, ayuda mucho a entender la idea y la descripción analítica de este concepto.

La convergencia de las series geométricas

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n, \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

puede observarse en las figuras 2 y 3 de la web:

<http://demonstrations.wolfram.com VisualComputationOfThreeGeometricSums/>

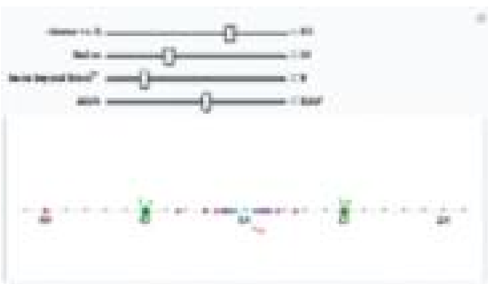


Figura 1 (Autor: Izidor Hafner)

La observación de la evolución de los dibujos al aumentar el valor de *n* y sumar cada vez más términos de cada serie proporciona grandes dosis de intuición y motivación, y facilita además el cálculo visual de sus respectivas sumas (1, 1/2 y 1/3).

De forma similar, en la figura 4 (Unal, 2009), se visualizan los valores:

$$\left\{1, 1-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}, 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}, \cdots\right\}$$

Éstos corresponden a la sucesión de sumas parciales de la siguiente serie alternada cuya suma, 3/4, se visualiza en el último dibujo de la figura 4.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Otras series cuyas sumas pueden visualizarse usando diferentes técnicas están en las direcciones:

<http://demonstrations.wolfram.com/SumOfATelescopingSeries/>

<http://demonstrations.wolfram.com/SumOfTheAlternatingHarmonicSeriesI/>

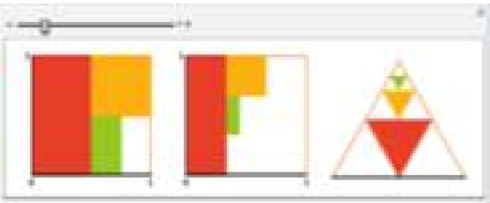


Figura 2 (Autores: Soledad Sáez Martínez y Félix Martínez de la Rosa)

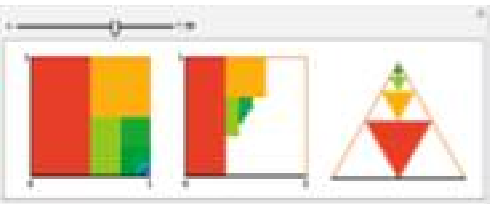


Figura 3 (Autores: Soledad Sáez Martínez y Félix Martínez de la Rosa)

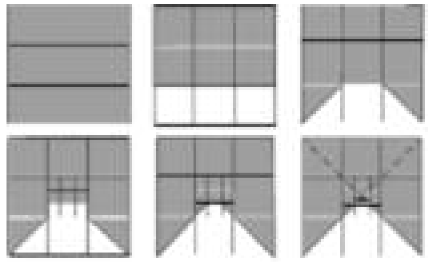


Figura 4

Recursos para la visualización del concepto de límite de funciones y asíntotas

Los distintos tipos de límite de una función se visualizan en las figuras 5 a 8 de las direcciones:

<http://demonstrations.wolfram.com/FiniteLimitAtAFinitePoint/>

http://demonstrations.wolfram.com/InfiniteLimitAtAFinitePoint/

<http://demonstrations.wolfram.com/InfiniteLimitAtInfinity/>

<http://demonstrations.wolfram.com/FiniteLimitAtInfinity/>

Moviendo los controles se puede elegir el tamaño del entorno alrededor del límite. A partir de él, las figuras proporcionan el correspondiente entorno alrededor del punto donde se calcula el límite. Visualizar esta relación facilita la comprensión visual y la descripción analítica del concepto.

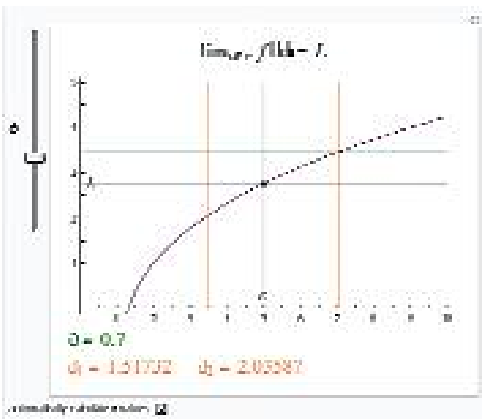


Figura 5 (Autor: Abby Brown)

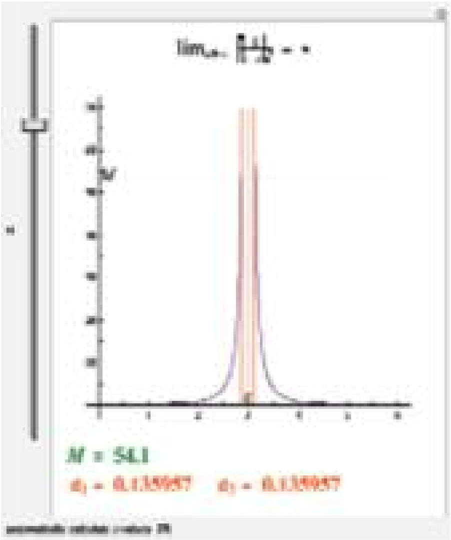


Figura 6 (Autor: Abby Brown)

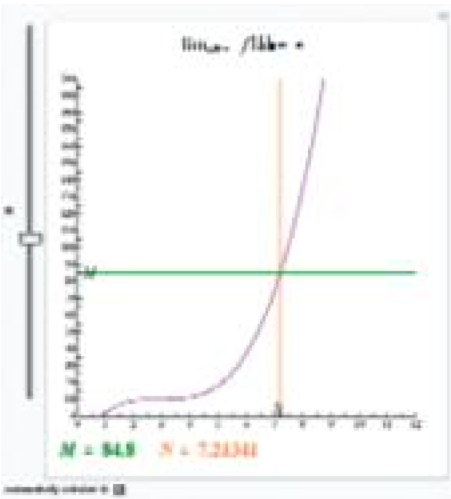


Figura 7 (Autor: Abby Brown)

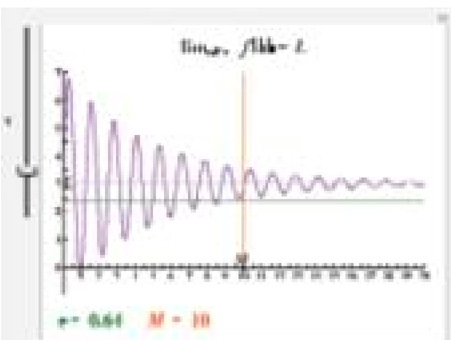


Figura 8 (Autor: Abby Brown)

En lo referente a las asíntotas, hay varias creencias erróneas que debemos erradicar. La figura 9 muestra que una asíntota puede cortar a la función antes de que se produzca el comportamiento asintótico. La figura 10 muestra que las asíntotas horizontales a derecha e izquierda pueden ser distintas.

El hecho de que no es incompatible la existencia simultánea de asíntotas horizontales y oblicuas, puede ser analizado con la gráfica de $f(x) = (x^2 - 4) / x$, (figura 11).

La idea es obtener gráficas de funciones con los dos tipos de asíntotas. Para ello observamos que en la figura 11 la asíntota oblicua divide a la gráfica en dos partes inyectivas (para $x < 0$ en la figura 12, y para $x > 0$ en la figura 13).

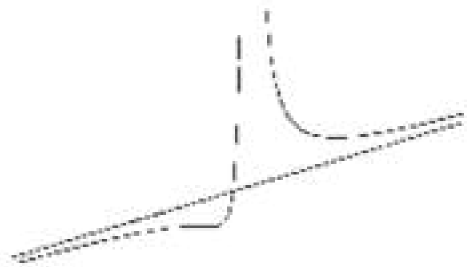


Figura 9. $f(x) = x^3 / (1 - x^2)$

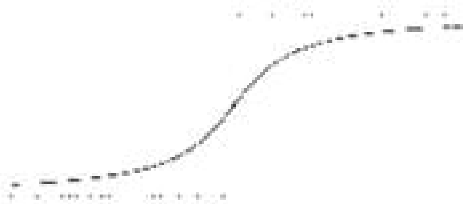


Figura 10. $f(x) = \operatorname{arctg} x$

Figura 11

Eligiendo ambas por separado e intercambiando los ejes obtenemos las gráficas buscadas, que son las inversas correspondientes (figuras 14 y 15).

Un ejemplo de función con asíntotas de todos los tipos se muestra en la figura 16.

Figura 12

Figura 13

Figura 14

Figura 15

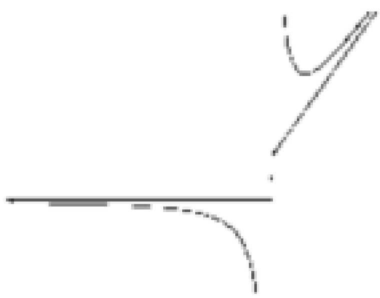


Figura 16. $f(x)=\frac{1}{\operatorname{arctg} x}+x+\sqrt{x^2}$

Para hallar sus asíntotas basta tener en cuenta las asíntotas horizontales de la función arco tangente (figura 10), por la derecha ($y=\pi/2$) y por la izquierda ($y=-\pi/2$), y el hecho de que $\sqrt{x^2}=|x|$.

Funciones con tres tipos de asíntotas pueden visualizarse en las figuras 17 y 18 de la dirección

<http://demonstrations.wolfram.com/FunctionsWithVerticalHorizontalAndObliqueAsymptotes/>

Moviendo los controles se obtienen diversas funciones con los tres tipos de asíntotas.

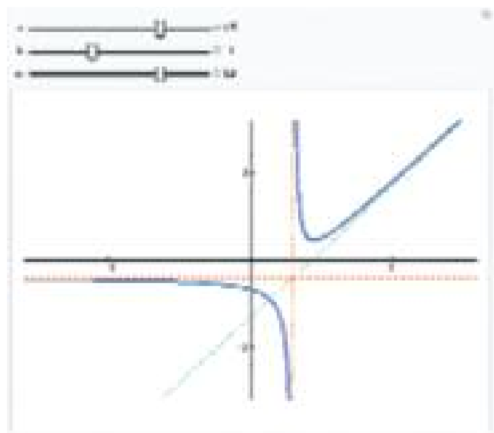


Figura 17 (Autores: Soledad Sáez Martínez y Félix Martínez de la Rosa)

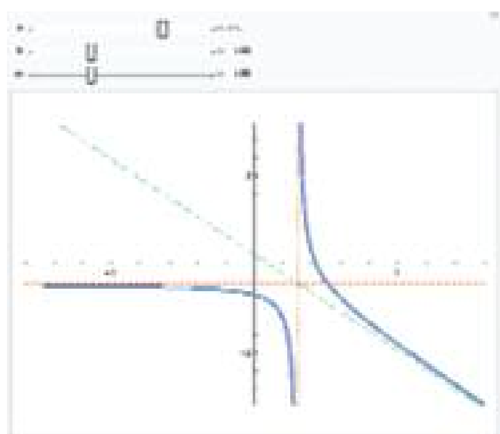


Figura 18 (Autores: Soledad Sáez Martínez y Félix Martínez de la Rosa)

Recursos para la visualización del concepto de derivada, recta tangente y extremos relativos

El concepto de derivada y su relación con la recta tangente es conocido por la mayoría de los alumnos. No lo es tanto la idea geométrica de la tangente como límite de rectas secantes. La obtención de la recta tangente a una curva en un punto como la posición límite de las secantes por $(x_0 + h, f(x_0 + h))$y $(x_0, f(x_0))$, cuando h tiende a cero, se muestra en las figuras 19 y 20, de la dirección de Internet

<http://demonstrations.wolfram.com/SecantAndTangentLines/>

En estas figuras, podemos elegir el punto y, disminuyendo el valor de h, apreciar el comportamiento de las sucesivas secantes aproximándose a la tangente.

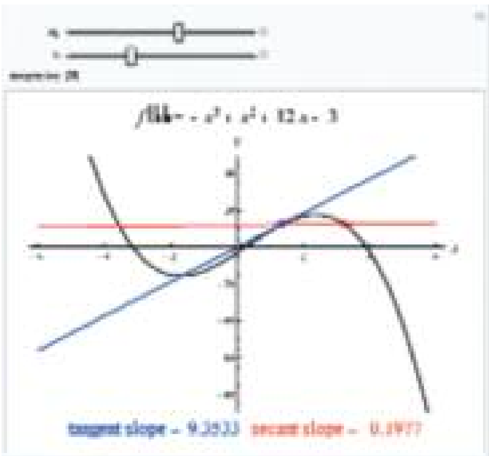


Figura 19 (Autores: Joshua Fritz, Angela Sharp y Chad Pierson)

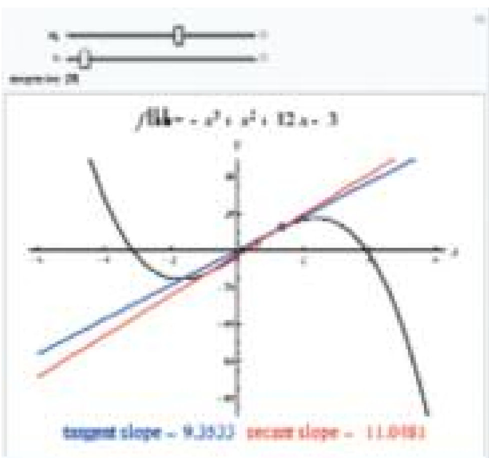


Figura 20 (Autores: Joshua Fritz, Angela Sharp y Chad Pierson)

La recta tangente a la curva en un punto también se obtiene como la posición límite de las secantes por los puntos $(x_0 + ah, f(x_0 + ah))$ y $(x_0 - ah, f(x_0 - ah))$, cuando h tiende a cero, y para constantes $a, b > 0$ (Martínez, 2007). Esto se puede visualizar en las figuras 21 y 22 de la dirección:

<http://demonstrations.wolfram.com/TangentLineUsingManyDifferentLimitConfigurations/>

En estas figuras, podemos elegir el punto x_0 y los valores de las constantes a y b. Al hacerlo, se visualiza el haz de secantes que convergen hacia la tangente.

La idea geométrica de la recta tangente facilita el reconocimiento visual de situaciones algo atípicas.

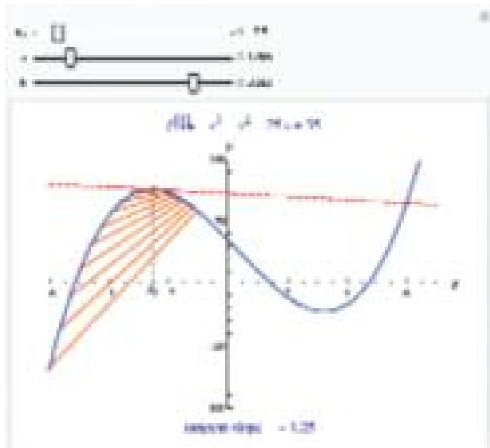


Figura 21 (Autores: Soledad Sáez Martínez y Félix Martínez de la Rosa)

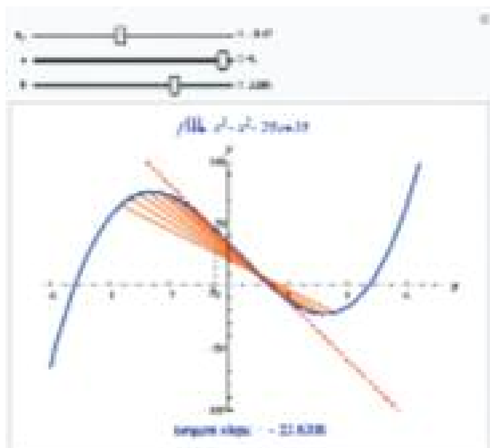


Figura 22 (Autores: Soledad Sáez Martínez y Félix Martínez de la Rosa)

Por ejemplo, puntos donde la tangente atraviesa a la curva en el punto de tangencia (figura 23), puntos donde la tangente es vertical (figuras 24 y 25), puntos donde las tangentes trazadas a cada lado no coinciden (figura 26), extremos relativos que se encuentran en puntos donde no hay derivada (figuras 25 y 26) o extremos relativos que se encuentran en un punto en el que existe la primera derivada, pero no la segunda (figura 27).

La utilización de los recursos visuales es muy del agrado de los alumnos, los motiva y hace mejorar su predisposición a las matemáticas, porque estos recursos las hacen más intuitivas y facilitan la comprensión de los conceptos y de su expresión analítica.

Figura 23. $f(x)=x^5-3x^3$

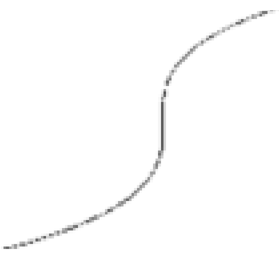


Figura 24. $f(x)=x^{1/3}$

Figura 25. $f(x)=x^2(2x-3)^{2/3}$

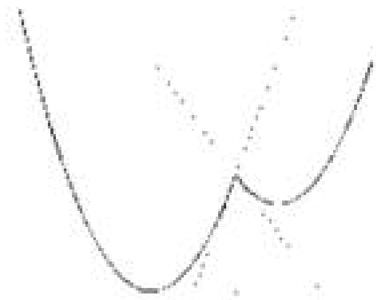


Figura 26. $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{si } x\le 2 \\ (x-3)^2+3, \text{si } x>2 \end{cases}$

Figura 27. $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{si } x\ge 0 \\ -x^2, \text{si } x<0 \end{cases}$

Bibliografía

Martínez de la Rosa, F. (2006): ¿Teoremas o fórmulas?, *Suma,* n.° 51, (31-39).

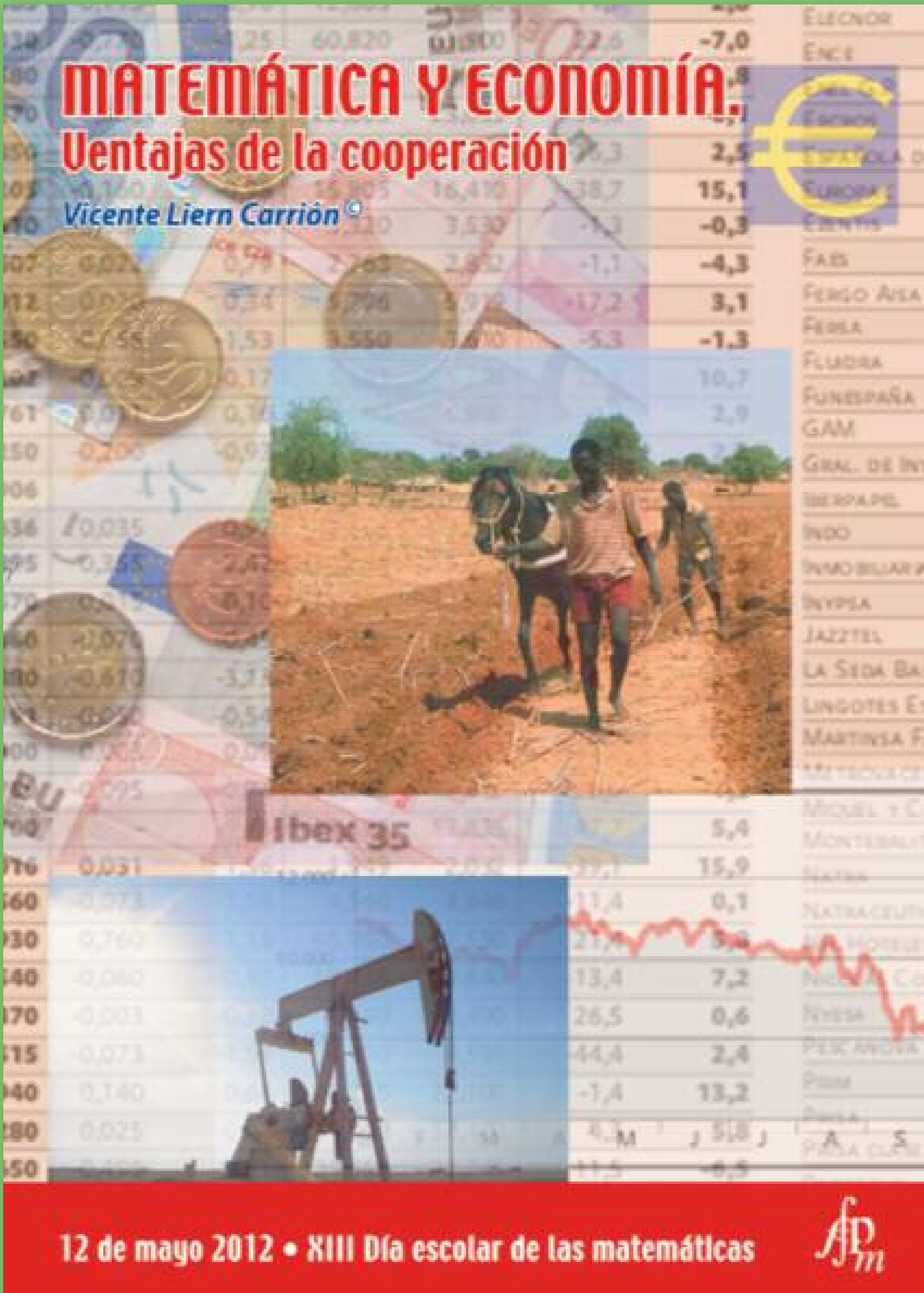
Martínez de la Rosa, F. (2007): Aspectos educativos de las otras definiciones de la derivada, *Números* 68 <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/68/ideas_02.pdf>.

Nelsen, R. B. (2001): *Demostraciones sin palabras*, Proyecto Sur de Ediciones, Granada.

— (2000): *Proofs without words II*, The Mathematical Association of America, Washington.

Unal, H. (2009): Proof without words: Sum of an infinite series, *The college mathematics journal*, vol. 41(1), 39.

Félix Martínez de la Rosa
Departamento de Matemáticas
Universidad de Cádiz
<felix.martinez@uca.es>


MATEMÁTICA Y ECONOMÍA:
Ventajas de la cooperación
Vicente Liern Carrión
12 de mayo 2012 • XIII Día escolar de las matemáticas