suma+ 69
Artículos
Marzo 2012
pp. 31-35

Cilindros y troncos de cono para ilustrar los peligros del paso al límite

Antonio M. Oller Marcén

A menudo se piensa que en las Matemáticas no hay lugar para el ensayo y el error, propagando la idea de que gran parte de la labor del matemático es tener la ocurrencia apropiada. En este artículo mostramos dos problemas que, aunque aparentemente deberían resolverse usando la misma idea, son resueltos sin justificación alguna en los libros de texto utilizando ideas diferentes. Además, presentamos otra situación mucho más próxima al estudiante con la misma dificultad subyacente y que sirve para explicar dicha dificultad de un modo más adecuado al nivel del alumno.

Palabras clave: Divulgación, Análisis, Integral definida y límites, Actitudes y razonamiento, Bachillerato.

Cylinders and Truncated Cones to Enlighten the Dangers in Taking Step to the Limit

Usually we think that there is no place in Mathematics for trial and error, thus spreading the idea that the Mathematician's job is mostly just to wait for the appropriate idea. In this article we present two problems that seem to admit similar methods of resolution, but which are nevertheless solved in textbooks without explanation using quite different ideas. Moreover, we present another situation sharing the same underlying problem, but closer to the pupil, that allows us to present an explanation more suitable for the student's level.

Key words: Popularization, Analysis, Definite integral and limits, Attitudes and reasoning, Higher secondary education.

A menudo se presentan las matemáticas en el aula como un producto ya terminado y perfecto. Pocas veces hay espacio para la discusión sobre la génesis de los conceptos y mucho menos aún para comentar las motivaciones que llevan a elegir una u otra técnica a la hora de resolver un problema. Es posible que hacerlo ralentizara el avance de la clase, pero no es menos cierto que haciéndolo contribuiríamos a mostrar el nada desdeñable componente subjetivo que posee esta ciencia. A fin de cuentas, por más que la verdad matemática pueda ser objetiva, el modo de llegar a ella y de presentarla no lo es en absoluto. Y si hay poco tiempo y espacio en el aula para justificar la elección de una técnica, mucho menos aún lo hay para justificar la no elección de otra. Porque está claro que para elegir un modo de resolver un problema, a menudo deben rechazarse otros enfoques posibles a priori.

En ocasiones la alternativa rechazada también conduce a una solución del problema, pero es dejada de lado por cuestiones de simplicidad, por cuestiones estéticas, porque no interesa presentar las técnicas que se utilizan o, incluso, por «tradición». Otras veces, sin embargo, no se sigue un camino aparentemente correcto porque sabemos de

Artículo recibido en *Suma* en septiembre de 2010 y aceptado en noviembre de 2011

antemano que no conduce a nada o que lleva por senderos demasiado complicados para el nivel del alumno. Pero hemos de ser conscientes que somos nosotros, como «expertos», los que sabemos esto. El alumno no es consciente de que dicho camino no va a llevarle a ninguna parte pese a que parezca que sí y cuando, sin explicación alguna, le instamos a rechazar esa opción inicial estamos fomentando en él la idea de que en matemáticas no hay espacio para la experimentación o para el ensayo y error, lo que es, desde luego, completamente falso.

En este artículo queremos ejemplificar la problemática que acabamos de comentar. Vamos a presentar, dentro del contexto de las aplicaciones de la integral, una situación en la que la aplicación de una técnica que ha funcionado a la hora de resolver un determinado problema no es posible en un problema muy similar. Los textos consultados soslayan este hecho utilizando sin más la nueva técnica. Proponemos también una situación que, dentro de un contexto mucho más elemental, presenta el mismo problema y que puede servir para ilustrar ante el alumno los «peligros» del paso al límite además de repasar conceptos geométricos básicos e interesantes.

La organización del artículo es la siguiente. En las dos primeras secciones presentamos, de manera estándar, los contenidos matemáticos en el contexto de los cuales surge la discusión posterior. En la siguiente se plantea la pregunta que da pie a dicha discusión. A continuación se introduce una situación más sencilla desde un punto de vista matemático, pero que da lugar a un problema equivalente y damos un intento de respuesta elemental a la pregunta inicial. Finalmente, cerramos el artículo con unas breves conclusiones.

El volumen de un sólido de revolución

Entre las primeras y más sencillas aplicaciones de la integral definida se encuentra el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución. En general, si consideramos una función continua $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ y hacemos que dicha función rote en torno al eje x el volumen del sólido obtenido se obtiene mediante la expresión:

$$\int_a^b \pi \left(f(x) \right)^2 dx$$

La forma de justificar esta expresión consiste, en primer lugar (ver figura 1), en considerar una subdivisión del intervalo $[a, b]$ dada por una serie de puntos

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

Después se consideran los n rectángulos de base $(x_{i+1} - x_i)$ y altura, por ejemplo

$$f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right)$$

Si se hacen girar estos rectángulos en torno al eje OX se obtiene una aproximación del sólido de revolución generado por $y = f(x)$ mediante una serie de cilindros. El volumen de cada uno de ellos es:

$$V_i = \pi f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right)^2 (x_{i+1} - x_i).$$

De este modo el volumen de la aproximación será la suma de todos estos y para hallar el volumen del sólido considerado bastará hacer:

$$V = \lim_n \sum_{i=1}^{n-1} V_i$$

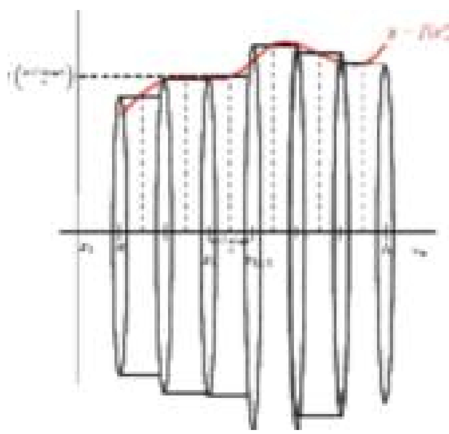


Figura 1. Aproximando el sólido por cilindros

Recordando, eso sí, la definición de integral como límite de sumas de Riemann. Este desarrollo puede encontrarse en cualquier texto de Bachillerato actual, como Edebé (2008) y Gómez (2008); del antiguo C.O.U., como Vizmanos y Anzola (1998) o Arenzana y otros (1978); de PREU (Bruño, 1969); y, por supuesto, tratado con un mayor rigor, en textos de niveles superiores como los de Ortega (1993), Piskunov (1980), Salas y Hille (1994) o Spivak (1996)[1].

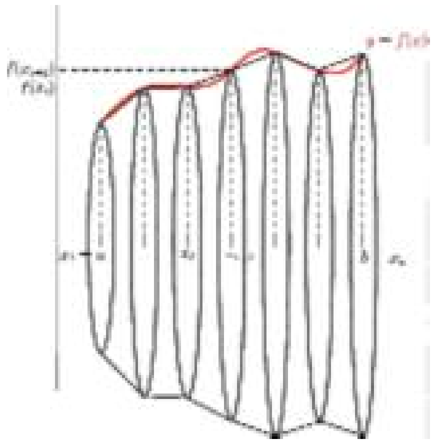


Figura 2. Aproximando el sólido por troncos de cono

El área de la superficie que limita un sólido de revolución

Otra aplicación interesante de la integral definida, que está relacionada con la anterior, consiste en el cálculo del área de la superficie que limita el sólido de revolución considerado anteriormente. En el mismo contexto que en la sección anterior, el área de la superficie de revolución obtenida al rotar la función $y = f(x)$ definida en $[a, b]$ en torno al eje OX viene dada por la expresión:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)}\,dx$$

La forma de justificar esta expresión parte, como antes, de la consideración de una subdivisión del intervalo $[a, b]$. A continuación (ver figura 2) se consideran los trapecios determinados por los puntos

$$(0,x_i),(0,x_{i+1}),(x_i,f(x_i)),(x_{i+1},f(x_{i+1}))$$

Si se hacen girar estos trapecios en torno al eje OX se obtiene una aproximación del sólido de revolución generado por $y = f(x)$ mediante una serie de troncos de cono. El área lateral de cada uno de estos troncos de cono resulta ser:

$$A_i = \pi\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right)\sqrt{\left(x_{i+1}-x_i\right)^2+\left(f(x_{i+1})-f(x_i)\right)^2}$$

Así pues, para hallar el área de la superficie considerada, será suficiente considerar que:

$$A = \lim_{n} \sum_{i=1}^{n} A_i$$

junto con alguna pequeña manipulación algebraica y teniendo algunas precauciones puesto que la suma considerada no es una suma de Riemann.

Aunque sencilla, esta fórmula ya no aparece en los textos del Bachillerato actual ni del anterior COU. Sin embargo, sí lo está en textos del más antiguo PREU y en textos universitarios básicos de introducción al Análisis y creemos que podría presentarse sin ningún problema en el aula de Bachillerato[2].

Una pregunta peliaguda

En las dos secciones anteriores hemos presentado dos temas estándar en cualquier curso de Análisis Matemático o de Cálculo. Además lo hemos hecho siguiendo el tipo de razonamiento que aparece en la totalidad de los textos consultados y conocidos por el autor. Sin embargo hay un aspecto importante y que a menudo, por no decir casi siempre, se pasa por alto:

¿Por qué para calcular el volumen aproximamos el sólido de revolución mediante cilindros y para el área de la superficie de revolución lo hacemos mediante troncos de cono?

El autor debe confesar que no se había planteado explícitamente esta cuestión hasta que un alumno intentó justificar la fórmula de la sección 3 aproximando el sólido de revolución mediante cilindros para después proseguir el razonamiento del mismo modo que hicimos antes, pero utilizando la fórmula para el área lateral de un cilindro. Este razonamiento conduce a la obtención de la expresión (incorrecta, por supuesto):

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\,dx$$

Ante la explicación del proceso *correcto,* la reacción (muy natural, por otra parte) del alumno fue formular la pregunta anterior. Una respuesta detallada y rigurosa involucra sucesiones de funciones, de sus derivadas y conceptos como el de convergencia uniforme en intervalos. Sin embargo, en el momento en que surge la cuestión, que puede ser incluso en bachillerato, no es posible recurrir a dichos conceptos. Y, desde luego, diferir la respuesta a un momento posterior no es aceptable ni, a veces, posible.

Simplificando la situación

La cuestión se ha planteado en un contexto relacionado con la integración. Para poder dar una respuesta sencilla a la paradoja que se ha presentado se puede comenzar simplificando la situación del siguiente modo (ver figura 3). Consideramos un cono de altura *h* y cuya base tiene radio *R*. Dividimos dicha altura en segmentos iguales de longitud *h*/*n*. Trazamos planos paralelos a la base del cono por cada uno de los puntos de la subdivisión, obteniendo una serie de círculos paralelos a la base. Para cada uno de dichos círculos consideramos el cilindro de altura *h*/*n* que lo tiene como base. De esta forma hemos aproximado exteriormente el cono inicial mediante *n* cilindros.

Ahora, utilizando semejanza de triángulos es sencillo ver que el radio del cilindro *i*-ésimo es exactamente

$$r_i = \frac{r(n-i+1)}{n}$$

De esta forma el volumen y el área lateral de la columna de cilindros son, respectivamente:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \pi r_i^2 \frac{h}{n} = \frac{\pi R^2 h}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)^2 = \frac{\pi R^2 h}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i \frac{h}{n} = \frac{2\pi R h}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (n-i+1) = \frac{2\pi R h}{n^2} \frac{n(n+1)}{2}$$

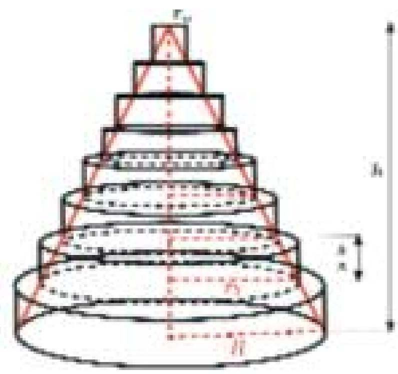


Figura 3. Un cono aproximado exteriormente por cilindros

Parece claro que si hacemos crecer *n* indefinidamente, la columna de cilindros se parecerá cada vez más al cono inicial y, por lo tanto, su volumen y su área lateral deberán ser los mismos. Sin embargo:

$$V_{co} = \lim_n V_n = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

$$A_{co} = \lim_n A_n = \pi R h$$

Por lo que de nuevo nos encontramos con que el razonamiento es correcto para calcular el volumen, pero no es correcto para el área lateral. La ventaja en este caso es que nos hallamos en un contexto más elemental, fácil de manejar y visualizar para el alumno y que no involucra funciones ni integrales, sino simplemente figuras geométricas sencillas.

De este modo podemos introducir el mismo problema sin necesidad de tener a nuestra disposición las integrales. Basta con algunas nociones sobre límites, las fórmulas para las sumas de los naturales y sus cuadrados, y las expresiones para los volúmenes y áreas laterales de cilindros y de conos[3]. En Dubnov (1994) pueden encontrarse diversas situaciones con la misma problemática subyacente, aunque ésta nos parece más interesante por la familiaridad del alumno con los elementos implicados en ella[4].

Un intento de respuesta elemental

Como ya hemos señalado, una respuesta rigurosa al problema queda fuera del alcance del alumno en el momento en el que ha surgido la pregunta. Así pues está justificado buscar una respuesta en ese preciso momento. No pretendemos que sea una respuesta completamente rigurosa, nos conformamos con un argumento correcto, sencillo y que sea convincente para el alumno. Una respuesta posible sería similar a la que sigue.

Si comparamos la fórmula que hemos obtenido para el área lateral, $A = \pi Rh$, con la correcta, $A = \pi Rg$, vemos que la diferencia radica en que se ha sustituido la generatriz del cono por su altura. Si observamos la columna de cilindros que aproxima al cono, nos damos cuenta de que su generatriz se halla aproximada por una serie de segmentos que, en total, miden siempre h con independencia del n elegido. De este modo, no se cumple que la longitud de la generatriz sea el límite de las longitudes de las líneas que la aproximan, pues dicho límite es h.

Así pues, lo que hemos justificado es que *la longitud de la línea límite no es el límite de las longitudes de las líneas que la aproximan*. Por lo tanto, puesto que dicha longitud juega un papel importante en el cálculo del área lateral, tampoco el área lateral obtenida como límite de áreas laterales de columnas de cilindros será válida. Sin embargo, como en el caso del volumen sólo intervienen el área de la base y la altura (que están siempre fijas con independencia del valor de n), la fórmula obtenida sí que será válida.

Referencias bibliográficas

Arenzana, V., P. Buera y C. Verge (1978). *Matemáticas COU,* Cenlit, Tafall.

Bruño (1969): *Matemáticas. Curso Superior,* Bruño, Madrid.

Dubnov, Ya. S. (1994): *Errores en las Demostraciones Geométricas,* Rubiños-1860, Madrid.

Edebé (2008) *Matemáticas II. Bachillerato*, Edebé, Madrid.

Ortega, J. M. (1993): *Introducción al Análisis Matemático*, Labor, Barcelona: .

Piskunov, N. (1980): *Cálculo Diferencial e Integral. Volumen I*, Mir, Moscú.

Salas, S. L., y E. Hille (1994): *Calculus*, Reverté, Barcelona.

Gómez, M. D. (2008): *Maemáticas 2.° de Bachillerato. Proyecto la Casa del Saber,* Santillana, Barcelona

Spivak, M. (1996): *Cálculo Infinitesimal,* Reverté, Barcelona.

Vizmanos, J. R., y M. Anzola (1998): *Algoritmo. Matemáticas I, COU,* SM, Madrid.

Antonio M. Oller Marcén
Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza
<oller@unizar.es>

1 La bibliografía reseñada no pretende, ni mucho menos, ser exhaustiva. Se trata únicamente de los textos a los que el autor tiene un acceso más directo.

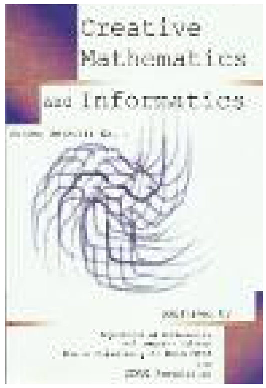
2 De hecho, puede constituir un interesante tema de trabajo que proponer a los alumnos interesados para que investiguen por su cuenta. Precisamente este trabajo autónomo es lo que puede dar lugar a situaciones como la presentada en este artículo.

3 Pensando en la implementación en el aula, podría proponerse la recopilación de todos estos ingredientes a los alumnos —vía internet— como un trabajo previo.

4 Además de que la misma situación nos sirve para mostrar un caso en el que el paso al límite sí funciona (y nos permite obtener la fórmula del volumen del cono) y un caso en el que no.

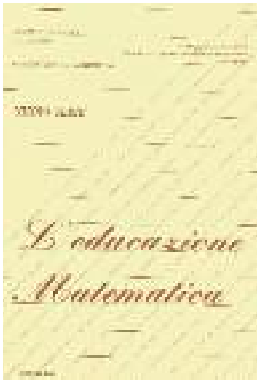
Publicaciones recibidas (y 2)

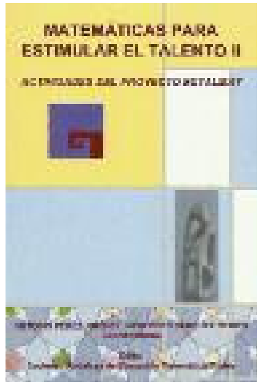
Santaló, Sunyer, Dou i Teixidor: quatre destacats mateàtics gironins de la dècada 1911-1920
Carles Perelló (Ed.)
UdG
Girona
ISBN 978-84-8458-381-3



Creative Mathematics and Informatics
Department of Mathematics and Computer Science
Vol. 20 nº. 2
2011
North University of Baia Mare
Romania
ISSN 1584-286X

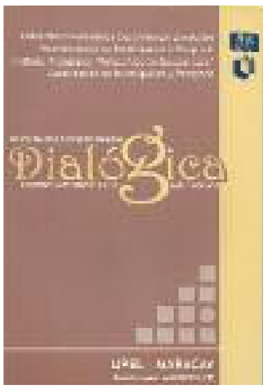
L'educazione matematica
Centro de ricerca e sperimentazione dell'educazione matematica (RSEM)
Vol. 1, nº. 1
Aprile 2011
Cagliari, Italia
ISSN 1120-4850

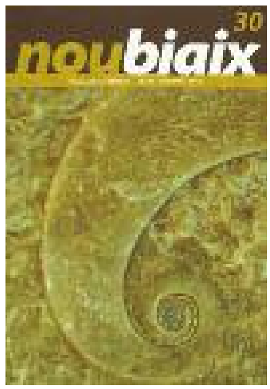




Matemáticas para estimular el talento II
A. Pérez y M. Sánchez (Coord.)
S.A.E.M. THALES
Sevilla
2011
ISBN 978-84-937577-6-2

Dialógica
Revista Multidisciplinaria
Vol. 6, nº. 2
Diciembre 2011
Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL)
Maracay, Venezuela
ISSN 1690-8961





NouBiaix
Feemcat-SCM
Nº. 30
Setembre 2011
ISSN 1133-4282

Boletín Das Ciencias
ENCIGA
Asociación dos Ensinantes de Ciencias de Galicia
Nº 73
Novembro 2011
Santiago de Compostela
ISSN: 0214-7807

Problemes Olímpics
Revista de problemes de matemàtiques
Nº. 62
Desembre 2011
SEMCV Al Khwarizmi
València
ISSN 1578-1771