

«Tanto en uno como en dos»: un juego de dados medieval

JESÚS BASULTO SANTOS
JOSÉ ANTONIO CAMÚÑEZ RUÍZ
MARÍA DOLORES PÉREZ HIDALGO

Un juego de dados sencillo que aparece en el *Libro de los dados* de Alfonso X el Sabio, manuscrito del siglo XIII, es propuesto como ejemplo para alumnos que se inician en el cálculo de probabilidades. Una resumida exposición del contenido de ese manuscrito, una descripción de las maneras de la época para contar los resultados favorables y posibles al lanzar dados, un estudio del cálculo de la probabilidad de ganar el juego para cada uno de los jugadores intervinientes y, por último, tres variantes propuestas para convertir el juego inicial en un juego más justo (donde los jugadores tengan las mismas posibilidades de ganar) constituyen el contenido de este artículo.

Palabras clave: Libro de los dados, Alfonso X el Sabio, probabilidad, juego justo.

'So Much in One as in Two': a Medieval Dice Game

A simple dice game which appears in the *Book of the Dice* of Alfonso X the Learned, a manuscript of the thirteenth century, is proposed as an example for students who starts in the calculation of probabilities. A summary presentation of the content of this manuscript, a description of the way used at the time to count favorable results when throwing dice, a study from the calculation of the probability of winning the game for each of the players involved and, finally, three different proposals to make the initial play a fair game (where players have the same chance of winning) is the content of this article.

Key words: book of the dice, Alfonso X the Learned, probability, fair game.

El *Libro de los dados* es un fragmento de la obra manuscrita *El Libro de Ajedrez, Dados y Tablas*, cuya redacción fue ordenada por el rey Alfonso X el Sabio en el siglo XIII y concluida en la ciudad de Sevilla. En el *Libro de los dados* encontramos la descripción y reglas de 12 juegos distintos de los que se practicaban en la Castilla medieval. Esas descripciones nos permiten abordar cada uno de los juegos desde el punto de vista probabilístico y, así, calcular las posibilidades de cada uno de los jugadores al inicio del juego.

Uno de esos juegos, «Tanto en uno como en dos» tiene una descripción sencilla y una fácil matemática, sobre todo para estudiantes que se inician en el Cálculo de Probabilidades. Su encuadre histórico, el conocimiento de las apuestas y la introducción de variantes para hacer que el juego sea más justo son motivaciones añadidas. Todo ello es el objetivo de este artículo que se administra de la siguiente forma: en el apartado 1º. damos una breve descripción del manuscrito, en el 2º. analizamos las formas en que se comenzó a contar las diferentes combinaciones y permutaciones que se generan al lanzar tres dados, en el 3º. describimos y estudiamos los tres primeros juegos del *Libro de los dados* y, en particular, el más interesante de los

tres y que da título a este trabajo. Por último, en el 4º apartado introducimos tres variantes del juego en la búsqueda de un reparto más equitativo de las posibilidades de los jugadores.

El manuscrito de Alfonso X el Sabio

El Libro de Ajedrez, Dados y Tablas fue mandado redactar por el rey Alfonso X el Sabio. En su prólogo leemos «... fue comenzado e acabado en la cibdat de Sevilla por mandato del muy noble rey don Alfonso, fijo del muy noble Don Ferrando e de la reina Doña Beatriz,..., en la era del mill e trescientos e veint e un año». El año está calculado según la Era de Julio César que corresponde al año 1283 de la era Cristiana. Desconocemos el año de su comienzo. Se trata de un manuscrito del que sólo se conserva un ejemplar. El mismo figuró entre los libros que se incorporaron a la Biblioteca de El Escorial, procedentes de la Capilla Real de Granada, en cumplimiento de una Real Cédula dada por Felipe II el 31 de agosto de 1591. De este manuscrito se dice: «...libro de a folio en romance escrito demano en pergamino contiene las diferentes dell juego del ajedrez autor el rrey don alonso el savio». Este códice figura con la signatura T-I-6. Está formado por 98 folios de pergamino, hojas de gran tamaño, de 400 × 280 mm. El texto está dispuesto a dos columnas y su escritura, angulosa y puntiaguda, de quebrados trazos, es un ejemplo de letra gótica y de castellano del siglo XIII. Consta de siete partes, separadas por folios en blanco. Comienza con un prólogo (folios 1r a 2r) y, a partir de aquí, está dividido en los siguientes libros:

1. *El libro del ajedrez* (Folios 1r a 64r).
2. *El libro de los dados*. Que contiene los siguientes juegos: Mayores, de Menores y Tanto en uno como en dos, Triga, Azar, Marlota, Riffa, Par con as, Panquist, Medio azar, Azar pujado y Guirguesca (Folios 65r a 71v).
3. *El libro de las tablas*. Esta formado por los siguientes juegos: Quinze tablas, Doze canes o

Doze hermanos, Doblet, Fallas, Seis dos e as, Emperador, Medio emperador, Pareja de entrada, Cab e quinal, Todas tablas, Laquet y Bufa cortesa, Bufa de baldrac y Reencontrant (Folios 72r a 80r).

4. *Ajedrez y tablas decimales*: El grant açedrez (doze casas) sin dados o con dados de ocho llanas, açedrez (diez casas) con dados de siete llanas y Tablas de diez casas con dados de siete llanas (Folios 81r a 85v).
5. *Otros juegos*: Açedrez de los Quatro tiempos y Tablas que dicen El Mundo (Folios 87r a 89v).
6. *El libro del Alquerque*: de doze, cercar la liebre, de nueve con dados y sin dados y de tres (Folios 91r a 93v).
7. *Juegos astronómicos*: de los escaques que se juega con un dado y Tablas con siete llanas (Folios 95r a 97v).

El *Libro de los Juegos de Ajedrez, Dados y Tablas* contiene 150 miniaturas que ilustran los textos recogidos en la mayoría de sus hojas. En particular, el *Libro de los dados* tiene 12.

Entonces, la obra está dividida en varios libros y entre ellos nos fijamos en el *Libro de los dados*, que aparece en segundo lugar, donde encontramos la descripción de doce juegos de los que se practicaban en esa época en la sociedad castellana como juegos de puro azar, con dados. Desde nuestro punto de vista, además de la curiosidad histórica y social, estos juegos de suertes constituyen una muestra muy valiosa de problemas que hoy resolvemos mediante cálculo de probabilidades.

El manuscrito proporciona bastante información acerca de las reglas de estos juegos lo que permite hacer una descripción de los mismos y analizar las posibilidades de cada jugador respecto a su ganancia o pérdida.

La mayor parte de los juegos son de apuestas, que se producen antes de empezar a jugar. Pero, además, hemos encontrado que el último de ellos, Guirguesca, admite en el transcurso del mismo lo que es conocido como «un envite».

Hemos podido recoger alguna información sobre las cantidades que se cruzaban en las apuestas a partir del *Libro de las taurerías* mandado redactar por el mismo rey, Alfonso X. En la Castilla del siglo XIII los juegos de apuestas eran prohibidos debido a las peleas, crímenes y blasfemias que provocaban hasta que, ante la imposibilidad de hacer cumplir los buenos deseos reales, el rey propone una política más realista consistente en regular los juegos de apuestas mediante las «Leyes de las taurerías». La taurería era una especie de casino bajo concesión real. Encontramos este tipo de establecimientos también fuera de Castilla, como por ejemplo, en el Reino de Aragón o en ciudades italianas como Roma, Bolonia, Nápoles o Viterbo (Ceccarelli, 2003).

Los juegos de suertes que aparecen en el libro que nos ocupa usan el lanzamiento de tres dados, exceptuando el juego de Guirguesca en el que se lanzan dos. Ahora bien, esta costumbre de lanzar tres dados cambiará en los siguientes siglos. Así, el famoso juego de Azar que se jugaba con tres dados en tiempos de Alfonso X pasará a jugarse con dos a partir del siglo XVII.

Un estudio cercano del Libro de los Dados lo encontramos en Paolo Canettieri (1996). Otros trabajos que estudian los juegos del Libro de los Dados, desde el punto de vista probabilístico, pueden verse en Basulto et al. (2005, 2006, 2007, 2008).

... *debemos considerar tanto el seso como la ventura en la toma de nuestras decisiones, y a esto le llama «cordura».*

En el prólogo del códice, folios 1r a 2r, el redactor del texto reflexiona sobre las actividades que podemos hacer en los períodos de ocio, caso de trabajar, o cuando por alguna enfermedad u otra causa tenemos un tiempo largo de reposo que debemos, de alguna manera, llenar.

Entonces, el objetivo que persigue Alfonso X al ordenar la redacción de esta obra es el de completar las actividades que se realizan cuando estamos obligados a trabajar con otras que debemos experimentar en los períodos de ocio, para así recuperar la alegría, que se manifiesta de muchas maneras. Como cuando realizamos actividades de saltar, lanzar piedras, etc., que nos sirve para que nuestros miembros «*sean por ello mas rezijos e recibam alegría*». O cuando somos «*viejos y flacos*», que debemos permanecer sentados, podemos jugar al ajedrez, dados y tablas, que nos producen placer y consuelo y evitan el estar «*baldíos*».

A continuación se pasa a exponer la organización y, en particular, el orden de exposición del libro. Así, el texto va a clasificar y ordenar los juegos en los que son de «seso», los de «ventura» y, por último, los de «cordura». Esta disposición va a ser seguida en los tres primeros libros, Ajedrez-Dados-Tablas, para que, en los siguientes, por ejemplo, en el cuarto, llamado de *Ajedrez y Tablas Decimales*, el orden se aplique a los juegos incluidos en el mismo.

Fijado el interés del rey en el análisis de las tres situaciones: seso, ventura y cordura, se recurre a un cuento, que sirve para indagar sobre los pros y los contras de cada una de las tres alternativas. Se trata de una historia antigua de la India, donde un rey hace «argüir a los sabios sobre los hechos que nacen de las cosas. Había tres que tenían sus razones. Uno de ellos decía que más valía seso que ventura porque el que usa su seso hace las cosas con orden y, aunque a veces no consiga lo que desea no sería culpa de él. Otro de los sabios decía que más valía ventura que seso ya que si hay posibilidad de ganar y de perder es claro que por mucho seso que tengamos no podremos modificar la posibili-

dad de que ocurra un evento contrario al deseado. Por fin, el tercero opina que debemos considerar tanto el seso como la ventura en la toma de nuestras decisiones, y a esto le llama cordura».

Una vez que los sabios dieron sus razones, «el Rey les mandó que presentasen allí cada uno algo que probase aquello que decían, y les dio de plazo el que demandaron, y ellos se fueron y miraron sus libros, cada uno según su razón».

«Y cuando se cumplió el plazo, vino cada uno ante el Rey con su muestra. El que defendía la razón del seso, trajo el ajedrez con sus juegos, mostrando que el que mayor seso tuviese, y estudiase para prepararse, podría vencer al otro. Y el segundo que usaba la razón de la ventura trajo los dados, mostrando que no valía nada el seso sino la ventura, según parece por la suerte, llegando todo por ella, a favor o en contra. El tercero, que decía que era mejor tomar de lo uno y de lo otro, trajo el tablero con sus fichas contadas y puestas ordenadamente en sus casilleros, y con sus dados que las moviesen para jugar...».



Imagen 1. *Libro del ajedrez, dados y tablas*, folio 2v.
Los tres sabios antes el Rey

Contando resultados favorables y posibles

Al analizar las posibilidades de cada jugador, el lanzamiento de tres dados plantea el problema de cómo calcular las combinaciones con repetición, también denominadas configuraciones, y las permutaciones con repetición.

Una combinación con repetición es, por ejemplo, 4-1-1, la cual describe que, al lanzar tres dados, uno de ellos muestra 4 puntos y los otros dos 1. En el juego de Triga (uno de los incluidos en el *Libro de los dados*), una combinación con repetición es presentada de la siguiente forma: «*los seys puntos pueden venir en esta manera, quatro amas as o tres dos as, dos dos alterz*», es decir, la puntuación 6, el total de los tres dados, se genera por 4-1-1, 3-2-1 ó 2-2-2.

En el libro escrito en latín *Liber de Ludo Aleae* de Cardano (1663), se describen las combinaciones con repetición de dos dados a la manera de este juego de Triga. Así, para la puntuación 10, total de dos dados, se dice: «*Decen autem ex bis quinque, et sex et quatuor*», o sea, 5-5 o 6-4. Cardano señala a continuación que «*hoc autem variatur dupliciter*», es decir, la combinación 6-4 genera las permutaciones (6,4) y (4,6), siendo por lo tanto las permutaciones con repetición de la puntuación 10 igual a (5,5), (4,6) y (6,4).

Si cuando lanzamos dos dados queremos calcular la probabilidad de que ocurra una puntuación de 10, debemos contar los casos favorables, que en este caso son las tres permutaciones con repetición, y los casos posibles son 36. En cambio, si en los favorables contamos sólo las combinaciones con repetición, que son dos, entonces cometeremos un error, ya que la regularidad frecuencial de la puntuación 10 lanzando dos dados perfectos no se comporta según la probabilidad $2/3$.

Posteriormente, Cardano calcula las cantidades de permutaciones con repetición según las puntuaciones totales, para dos y tres dados. También Galileo (Camúñez, 2004) realizará de nuevo este análisis entre 1613 y 1623.

No deja de sorprendernos la aparición en el siglo XIII del poema manuscrito *De Veturula*, una especie de best-seller medieval muy divulgado en la época y con una extensión de tres volúmenes. Un fragmento del mismo está dedicado a describir las combinaciones resultantes al lanzar tres dados (combinaciones con repetición, *sortis* en la terminología usada), las cuales son clasificadas según la suma de puntuaciones. Además, incorpora el número de permutaciones con repetición asociado a cada combinación (*cadentiae*, en latín), todo echo con una claridad y exactitud que, como se ha dicho, sorprende que se produzca en época tan temprana. Estos cálculos probablemente fueron tomados de fuentes hindúes o árabes (Bellhouse, 2004). Para Piron (2007), las fuentes son claramente árabes.

La palabra probabilidad significaba antiguamente lo que hoy llamamos probabilidad subjetiva, mientras que la palabra chance o suerte era utilizada como nuestra probabilidad objetiva. Ahora bien, la palabra suerte no ha tenido un significado probabilístico en su origen. Como muy bien recoge Kendall (1956), la palabra chance (en nuestro caso suerte) era, por ejemplo, en el caso del juego de Azar (incluido en el *Libro de los dados*), obtener cualquier puntuación del conjunto «suerte», definido por {7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14}. El jugador lanzaba los dados para dar las suertes: primero, al otro jugador; a continuación, a él mismo. Y una vez que las suertes estaban repartidas (¡la suerte está echada!), el jugador debía lanzar los dados de forma consecutiva hasta que viniese su suerte, que le hacía ganar, o la del otro jugador que le hacía perder y, por lo tanto, ganar al contrario.

Igual ocurre con la palabra azar, que de origen árabe corresponde a la palabra «al

zahr». Era una flor que se pintaba en una de las caras del dado. En el juego de ese nombre del *Libro de los dados* una puntuación «azar» era cualquiera del conjunto {3, 4, 5, 6, 15, 16, 17, 18}. Este término «azar» hoy es utilizado en nuestro lenguaje cotidiano con un sentido mucho más amplio. Aparecen también los términos «fortuna» y «ventura», donde este último se emplea para englobar a todos los juegos de este libro, los que sólo dependen del azar (juegos de ventura).

En todo este conjunto de términos no debemos olvidar dos palabras básicas que constituyen el inicio de la terminología: «riesgo» (*resicum*), asociada a los seguros marítimos, ya utilizados en el medioevo, y a los créditos, y «peligro» (*periculum*), asociada a los contratos mercantiles y, en particular, a los juegos con apuestas. Con el tiempo, ambos términos acabaran coincidiendo en su significado (Piron, 2007; Ceccarelli, 2003).

Estas notas, de alguna forma son reivindicativas de la contribución del rey Alfonso X a la historia de los juegos en general, y a la historia de la probabilidad en particular. Y aunque los juegos del Libro de los Dados sólo nos informan sobre sus reglas, lo que hemos investigado nos muestra que las estructuras matemáticas de estos juegos, que aparecerán en libros de probabilidades de los siglos XVII y XVIII, están diseñadas para dar resultados coherentes con las reglas del Cálculo de Probabilidades.

Si para Bellhouse (2004) el libro de Cardano, *Liber de Ludo Aleae*, es el iniciador de los manuales sobre juegos de azar, ¿qué pensaría del libro que nos ocupa escrito más de dos siglos antes que el de Cardano?

Los tres primeros juegos: «De mayores», «De menores» y «Tanto en uno como en dos»

Por su sencillez a la hora de explicar sus reglas y, sobre todo, al estudiarlos de manera probabilística,

proponemos el análisis de los tres primeros juegos de dados como ejemplos ilustrativos. En el *Libro de los dados* leemos (mostramos sólo la transcripción al castellano actual):

El juego de mayores y el de tanto en uno como en dos. El primer juego de los que usan los hombres, es que gane el que más puntos lance, y a este juego llaman a mayores.

Todas las otras formas de juego que hay en ellos son convenios establecidos por los hombres entre si, y estos son juegos diferentes.

Así, como el que lance menos puntos que gane.

O tanto en el uno como en los dos, que es que si dijese en un dado seis, que diga en los otros dos cinco y as, o cuatro y dos, o ternas. Y si dijese en uno cinco, que diga en los otros dos cuatro y as, o tres y dos. Y si dijese en uno cuatro, que diga en los otros tres y as, o dos y dos. Y si dijese en el otro tres, que diga en los otros dos y as. Y si dijese en el otro dos, que diga en los otros as y as. (Basulto, Camúñez y Ortega, 2007).

En esta miniatura aparecen dos grupos de personas jugando con tres dados a los juegos *De mayores* y de *Tanto en uno como en dos*. Un detalle curioso es que la suma de las puntuaciones del juego de la izquierda, 15, es complementaria, de la suma del juego de la derecha, 6, entendiendo complementaria en el sentido de que la suma de ambas es $15 + 6 = 21$, lo que suman las seis caras del dado. En algunos de los siguientes juegos el autor dirá que una puntuación es la «zozobra» de la otra.

Todos los cálculos que vienen a continuación son realizados para dados equilibrados, o sea con sus 6 caras equiprobables. Aunque ya el propio rey, en su *Libro de las taburerías* nos advierte de la existencia de dados «engañosos» que los clasifica en «plomados» (con pesos incrustados en una de las caras

para que salga la cara opuesta), «desvenados» (con puntos casi borrados para engañar al incauto con la ayuda de compinches mirones) y «afeitados» (con algunas aristas redondeadas para hacer más difícil la aparición de determinadas puntuaciones).

El primer juego que se cita, que llama «De mayores», es de práctica muy sencilla: gana el que, al lanzar los tres dados, consigue la puntuación más alta. Si en el juego participan dos jugadores, es fácil comprobar que la probabilidad de que gane cualquiera de los dos es igual a 0,5, o sea, se trata de un «juego justo», expresión usada un poco después por los autores que comenzaron a escribir sobre cálculo en juegos de azar, como Cardano, Pascal o Huygens.

En efecto, consideremos las parejas de valores (j, k) , donde j representa los posibles resultados del primer jugador al lanzar los tres dados ($j = 3, \dots, 18$) y k los posibles resultados del segundo ($k = 3, \dots, 18$). Las parejas que tengan primera componente mayor que la segunda serán favorables al primer jugador; las que la tengan menor, al contrario, serán favorables al segundo; y las que tengan las dos componentes iguales producirán empate. Es fácil comprobar que hay 16 posibles empates, y que el resto de posibles parejas, 240, se divide en dos grupos de 120 donde el primer resultado es superior al segundo, y otros 120 donde ocurre lo contrario. Por tanto, los dos jugadores tienen igual probabilidad de ganar sin importar quien sea el que comience lanzando.

El segundo, que el Libro llama «De menores», tiene la misma mecánica que el primero, al tratarse de un juego donde gana el jugador que, al lanzar los dados, saca la puntuación más pequeña. Igual



Imagen 2. *Libro del ajedrez, dados y tablas*, folio 66r. Los juegos «De mayores» y «Tanto en uno como en dos»

que antes, ambos jugadores tienen la misma probabilidad de ganar.

El tercer juego es «Tanto en uno como en dos», que también se practica con tres dados. Consiste en que un primer jugador, al que vamos a llamar Pedro, lanza los tres dados y si ocurre la situación en la que la puntuación de un dado coincide con la suma de los otros dos (de ahí el nombre del juego), entonces Pedro gana el total apostado. Si no, pasa los dados al segundo, Pablo, que lanza e intenta el mismo resultado que Pedro. Si Pablo tampoco acierta, vuelve de nuevo a Pedro (si sólo hay dos jugadores) que lanza de nuevo buscando otra vez el resultado. Así sucesivamente, hasta que uno de los dos lo consigue, llevándose entonces el total apostado. Entonces, cada dos lanzamientos, el juego se encuentra como al principio. El objetivo es que el jugador consiga en su lanzamiento una de las siguientes combinaciones: 6-5-1, 6-4-2, 6-3-3, 5-4-1, 5-3-2, 4-3-1, 4-2-2, 3-2-1 o 2-1-1.

Las nueve combinaciones anteriores se pueden clasificar en dos grupos: aquellas cuyos tres resultados son distintos, 6-5-1, 6-4-2, 5-4-1, 5-3-2, 4-3-1 y 3-2-1, y las que presentan dos resultados iguales, 6-3-3, 4-2-2, y 2-1-1. Las primeras pueden aparecer de seis maneras distintas (permutaciones de 3 elementos). Por ejemplo, la combinación 6-5-1 puede ocurrir según las siguientes permutaciones: (6, 5, 1), (6, 1, 5), (5, 6, 1), (5, 1, 6), (1, 6, 5) y (1, 5, 6). Las segundas, como por ejemplo 6-3-3, pueden aparecer según las 3 permutaciones (6, 3, 3), (3, 6, 3) y (3, 3, 6). Esto nos permite calcular las probabilidades que tiene un jugador de obtener uno de los resultados que le favorecen, teniendo en cuenta que el número de resultados posibles al lanzar tres dados es $6^3 = 216$.

En este juego de *Tanto en uno como en dos*, no se soratea qué jugador debe comenzar lanzando los tres dados. En otros del *Libro de los dados* eso sí se hace (en el manuscrito se dice «hacer batalla»). En el caso que nos ocupa el hecho de ser el primero en lanzar es una ventaja. Veámoslo.

En cada lanzamiento hay $6 \times 6 + 3 \times 3 = 45$ (6 combinaciones con 6 permutaciones asociadas a cada combinación y 3 combinaciones con 3 permutaciones asociadas) resultados que son favorables al jugador que lanza y $216 - 45 = 171$, resultados que hacen que pase el turno de lanzar al segundo jugador. Por tanto, en cada lanzamiento, la probabilidad de conseguir el resultado buscado («tanto en uno como en dos») es

$$\frac{45}{216} = \frac{5}{24}$$

y la de que pase el lanzamiento al otro jugador

$$\frac{171}{216} = \frac{19}{24}$$

Asociamos dos esperanzas al primer jugador, Pedro, a las que llamamos e_1 y e_2 , y que valoran para este jugador las dos posibles circunstancias del juego: cuando éste va a realizar el primer lanzamiento, y cuando se va a realizar el segundo lanzamiento por parte del segundo jugador, Pablo, tras haber realizado Pedro el primero sin éxito. Si ambos lanzamientos se producen sin éxito, en el tercero el juego se encuentra en la misma circunstancia que en el primero, en el cuarto igual que en el segundo, etc., lo que presenta una periodicidad que resulta eficaz y simplificadora del cálculo.

Supongamos que el total apostado es representado por a . Al inicio del juego, Pedro tiene probabilidad $5/24$ de ganar el total apostado y $19/24$ de no tener éxito y ceder el turno de lanzar, pasando, por tanto, a tener esperanza e_2 . Podemos escribir, según la definición de esperanza matemática (suma de los productos cruzados entre premios y probabilidades de obtención de esos premios), que:

$$e_1 = \frac{5}{24} \cdot a + \frac{19}{24} \cdot e_2$$

Cuando se va a realizar el segundo lanzamiento, que lo hace Pablo, Pedro tiene probabilidad $5/24$

de perder, de ganar 0, (si Pablo consigue el resultado buscado en su lanzamiento) y $19/24$ de volver a tener la posibilidad de lanzar, de volver a la posición de partida, si Pablo no acierta en su lanzamiento. Así,

$$e_2 = \frac{5}{24} \cdot 0 + \frac{19}{24} \cdot e_1 = \frac{19}{24} \cdot e_1$$

Resolviendo el sistema formado por ambas igualdades, obtenemos $e_1 = 0,5581 \cdot a$, y, por tanto, la probabilidad de que el primer jugador gane el juego es 0,5581. Entonces, la probabilidad de ganar del segundo jugador es $1 - 0,5581 = 0,4419$.

En general, se puede obtener una fórmula sencilla que permite calcular directamente la probabilidad de que el jugador que inicie el juego gane, en el caso de juegos como el que se ha comentado, con dos jugadores que lanzan por turnos, una sola vez en cada turno, y donde ambos buscan el mismo objetivo, cuya probabilidad de alcanzarlo en cada lanzamiento la representamos por w .

Igual que antes, asociamos dos esperanzas al primer jugador, e_1 y e_2 , valorando para él el juego en las dos posibles circunstancias del mismo: cuando se va a realizar el primer lanzamiento, y cuando se va a realizar el segundo por parte del otro jugador tras realizarse el primero sin éxito. Supongamos que el total apostado es representado por a . Al inicio del juego, el primer jugador tiene probabilidad w de ganar el total apostado y $1 - w$ de no tener éxito y ceder el turno de lanzar, pasando, por tanto, a tener esperanza e_2 . Podemos escribir $e_1 = w \cdot a + (1 - w) \cdot e_2$. Después del primer lanzamiento, sin éxito, la esperanza del segundo jugador es $e_2 = 0 \cdot w + (1 - w) \cdot e_1$. Resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones obtenemos:

$$e_1 = \frac{1}{2 - w} \cdot a$$

Por tanto, al inicio del juego, la probabilidad que tiene el jugador que lanza primero de ganar el juego es $p = 1/(2 - w)$, que es una función creciente de w . Para el rango de valores de w (entre 0 y 1), esa probabilidad p toma valores entre 0,5 ($w=0$) y 1 ($w=1$), lo que demuestra que, en este tipo de juegos, la primacía en el lanzamiento hace

que la probabilidad del que la tiene, de ganar el juego, sea superior a 0,5. Cuanto más próximo esté w de 0 más equitativo será el juego.

Tres variantes más justas del juego «tanto en uno como en dos»

Este método para calcular la probabilidad de cada jugador, basada en la periodicidad de las situaciones, fue usado por primera vez por Huygens (1629-1696) (de hecho, durante un tiempo fue conocido como «método analítico de Huygens») en su tratado publicado en 1657, *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, en la Proposición XIV del mismo. En ese texto encontramos dos ejercicios con juegos donde aparecen turnos de lanzamiento de los jugadores hasta que uno de ellos gana. Recordamos uno de ellos:

A y B juegan juntos con dos dados con la condición siguiente: A habrá ganado si lanza 6 puntos, B si lanza 7. A hará en primer lugar un solo lanzamiento; a continuación B dos lanzamientos sucesivos; después de nuevo A dos lanzamientos; y así sucesivamente, hasta que uno u otro haya ganado. Se pide la relación de la chance de A a la de B. (Huygens, 1657)

Aquí Huygens introduce la variante de que el primero que lanza, sólo lo hace una vez, mientras que en los siguientes turnos, cada jugador lanza dos veces. De esta forma, el autor intenta compensar la ventaja que supone la primacía permitiéndole sólo un lanzamiento en el primer turno.

Para resolver este problema, Huygens plantea la periodicidad del juego con respecto a la intervención de los jugadores y que, en este caso, seguirá la sucesión: ABBA ABBA Esa periodicidad (y la independencia de los lanzamientos)

le lleva a simplificar el cálculo, reduciéndolo a un conjunto de cuatro igualdades.

Como *primera variante* del juego «Tanto en uno como en dos» podemos pensar y proponer a los estudiantes una de este tipo para comprobar cómo se reduce la ventaja del primer jugador. Supongamos entonces que Pedro realiza un lanzamiento cuando inicia el juego, después Pablo dos lanzamientos, después Pedro dos, y así hasta que uno u otro consiga el resultado de que un dado coincida con la suma de los otros dos. Entonces, la secuencia de lanzamientos sería Pedro, Pablo, Pablo, Pedro, Pedro, Pablo, Pablo, ... que, siguiendo a Huygens, la mostramos con el siguiente efecto de periodicidad Pedro-Pablo-Pablo-Pedro, Pedro-Pablo-Pablo-Pedro, ...

Definimos cuatro esperanzas matemáticas asociadas a Pedro, e_1 , e_2 , e_3 y e_4 que valoran el juego para este jugador en las cuatro posibles circunstancias del mismo: (1) al inicio del mismo, o sea, cuando él va a realizar el primer lanzamiento (con probabilidad $5/24$ de ganar el total apostado y $19/24$ de no ganarlo y, por tanto, pasar el turno a Pablo), (2) cuando se va a realizar el segundo (cuando Pedro ha lanzado sin éxito y es el turno de Pablo, con probabilidad $5/24$ de que gane Pablo, o sea, 0 para Pedro, y $19/24$ de que Pablo no acierte y le llegue su segunda oportunidad), (3) cuando se va a lanzar por tercera vez (cuando Pablo ya ha lanzado la primera de sus dos veces sin éxito y va a lanzar su segunda vez, con probabilidad $5/24$ de que gane Pablo, o sea, 0 para Pedro, y $19/24$ de que Pablo no acierte y le llegue la primera de sus oportunidades a Pedro), y (4) cuando se va a lanzar por cuarta vez (cuando Pablo ha realizado su segundo lanzamiento sin éxito y es ahora el turno del primer lanzamiento de Pedro en su segunda tanda, con probabilidad

$5/24$ de ganar, o sea, el total apostado para Pedro, y $19/24$ de que Pedro no acierte y le llegue su segunda oportunidad). En el quinto lanzamiento se inicio un nuevo ciclo coincidente en las valoraciones con el anterior. Llamando a al total apostado, esas cuatro esperanzas son:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{5}{24} \cdot a + \frac{19}{24} \cdot e_2 & e_2 &= \frac{5}{24} \cdot 0 + \frac{19}{24} \cdot e_3 = \frac{19}{24} \cdot e_3 \\ e_3 &= \frac{5}{24} \cdot 0 + \frac{19}{24} \cdot e_4 = \frac{19}{24} \cdot e_4 & e_4 &= \frac{5}{24} \cdot a + \frac{19}{24} \cdot e_1 \end{aligned}$$

Resolviendo en e_1 , obtenemos $e_1 = 0,5133 \cdot a$, con lo que la probabilidad de que el primer jugador gane este juego es 0,5133, o sea, más próximo al «juego justo» que el inicialmente propuesto.

Como *segunda variante* proponemos el mismo procedimiento establecido en el Libro de los Dados, la secuencia Pedro, Pablo, Pedro, Pablo, ... pero más exigencia para el éxito, con el objeto de disminuir el valor de la cantidad w antes introducida. El que gane ha de obtener «tanto en uno como en dos» pero dos caras han de arrojar el mismo resultado. O sea, gana aquél que lance en su turno cualquiera de estas combinaciones 6-3-3, 4-2-2, 2-1-1 que, como ya se ha dicho, da lugar a 9 permutaciones o resultados favorables al que lanza, de un total de 216. Por tanto, en este caso, $w = 9/216 = 1/24$, siendo entonces $p = 1/(2-w) = 24/47 = 0,5106$, probabilidad muy parecida a la de la variante anterior.

Por último, como *tercera variante*, la más obvia. Ya se ha comentado que en otros juegos del Libro de los Dados se «hace batalla» antes de comenzar a jugar para decidir quién lanza primero, o sea, se sortea el orden de los lanzamientos. Si proponemos «hacer batalla» en este juego, si lanzamos una moneda equilibrada para decidir la prioridad del que lanza y el resto del juego mantiene las reglas establecidas, entonces, por el Teorema de la Probabilidad Total escribimos:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[\text{gane Pedro}] &= \mathcal{P}[\text{gane Pedro} | \text{lanza el primero}] \cdot \\ &\cdot \mathcal{P}[\text{lanza el primero}] + \mathcal{P}[\text{gane Pedro} | \text{lanza el segundo}] \cdot \\ &\cdot \mathcal{P}[\text{lanza el segundo}] = 0,5581 \cdot 0,5 + 0,4419 \cdot 0,5 = 0,5 \end{aligned}$$

convirtiéndose así en un juego justo.

Referencias bibliográficas

- BASULTO, J., J. A. CAMÚÑEZ y F. J. ORTEGA (2006). «El juego que llaman Azar del Libro de los Dados de Alfonso X El Sabio», en *Historia de la Probabilidad y la Estadística (III)*, Publicaciones Delta, Madrid.
- (2006): «Azar Game in the Book of Dice of Alfonso X The Learned. Its relation with the Hazard Games of Montmort, Cotton, Hoyle, De Moivre and J. Bernoulli», *Math. & Sci. Hum.-Mathematics and Social Sciences*, n.º 174, 5-24.
- (2007): «Juegos de azar, guirguesca y marlota del Libro de los Dados del Alfonso X El Sabio.», *Alcanate. Revista de Estudios Alfonsíes*, 89-116.
- BASULTO, J., J. A. CAMÚÑEZ y C. BORDON (2008): «El Libro de los Dados de Alfonso X. Su relación con el Cálculo de Probabilidades», en *Historia de la Probabilidad y la Estadística (IV)*, Universidad de Huelva, Huelva.
- BASULTO, J., y J. A. CAMÚÑEZ (2009): «El juego guirguesca del Libro de los Dados de Alfonso X (siglo XIII) y el actual juego de craps. Similitudes y diferencias en el cálculo de sus probabilidades», *Estadística Española*, vol. 51, n.º 170, 63-82.
- BASULTO, J., y M. D. PÉREZ, (2009): «The Book of Chess, Dice and Tables of Alfonso X The Learned. A dice's game called Guirguesca», *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, vol. 25, n.º 3, octubre 2009, 226-237.
- BELLHOUSE, D. R. (2004): Decoding Cardano's Liber de Ludo Aleae. *Historia Matemática*. (1-22).
- (2000): «De Vetula: a Medieval Manuscript Containing Probability Calculations», *International Statistical Review*, n.º 68, 123-136.
- CAMÚÑEZ RUIZ, J. A. (2004). «Un fragmento de Galileo sobre cálculo en juegos de azar», en *Lecturas de Economía Aplicada (Homenaje al profesor Antonio Rallo)*, Edición Digital @tres, Sevilla, 235-244.
- CANETTI, P. (1996): *Alfonso X el sabio. Il libro dei giochi*, Edizioni Cosmopoli srl, Bologna.
- CARDANO, G. (1663): *Liber de Ludo Aleae*. A cura di Massimo Tamborino. Filosofia e Scienza Nell'Età Moderna, Francoangeli.
- CECCARELLI, G. (2003): *Il gioco e il peccato*, Il Mulino, Bologna.
- GARCÍA SOLALINDE, A. (1915): «Intervención de Alfonso X en la redacción de sus obras», *Revista de Filología Española*, II, 283-288.
- HUYGENS, C. (1657): *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, printed in *Exercitationum Mathematicarum* by F. Van Schooten, Elsevirii, Leiden.
- KENDALL, M. G. (1956): Studies in the History of Probability and Statistics: II. The Beginning of Probability Calculus. *Biometrika*, vol. 43, No.1/4, (1-14).
- MACDONALD, R. A. (1995): «Libro de las tahurerías: a special code of law, concerning gambling, drawn up by Maestro Roldán at the command of Alfonso X of Castile», *Madison Hispanic Seminary of Medieval Studies*.
- PIRON, S. (2007): «L'apparition du *resicum* en Méditerranée occidentale, XII– III siècles», *Journal Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistiques*, vol. 3, n.º 1.

JESÚS BASULTO SANTOS
<basulto@us.es>

JOSÉ ANTONIO CAMÚÑEZ RUIZ
<camunez@us.es>

MARÍA DOLORES PÉREZ HIDALGO
<mdperez@us.es>

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Sevilla