suma+ 68
Noviembre 2011, pp. 37-46

¿Existen pentágonos que recubren el plano y hexágonos que no?

Se descubren propiedades geométricas de algunos hexágonos y pentágonos que aparecen en mosaicos y otros objetos del entorno. Como casos particulares de hexágonos se han considerado los parhexágonos de los cuales sorprenden sus "regularidades" geométricas y los teselados producidos por sus combinaciones con pentágonos "casita".
A partir de estas y otras formas geométricas se muestran actividades para el aula de Secundaria con diversos grados de dificultad y de métodos de resolución: aritmético, algebraico, geométrico, gráfico….

Palabras Clave: Investigación, geometría, recubrimientos, parhexágonos, actividades de aula.

Are there any pentagons which tessellate the plane and any hexagons which don't?

This article is mainly focused in finding geometric properties of some hexagons and pentagons that usually appear in the environment. As a particular case of hexagons have been considered parhexagons. These polygons present surprising geometric "regularities" and generate interesting tessellations after their combinations with some special pentagons.
From these and other geometric shapes, some math activities of high school are shown. These exercises present different degrees of difficulty and can be solved by arithmetic, algebraic, geometric or graphic methods.

Key words: Research, geometry, tilings, parhexagons, classroom activities.

Introducción

En teoría de mosaicos es bien conocido que cualquier hexágono regular recubre el plano y que un pentágono regular no lo hace, pero, abandonando la regularidad, ¿hay pentágonos que generan mosaico y hexágonos que no? En este trabajo tratamos de dar respuesta a esta pregunta.

El artículo contiene una primera parte de construcción y análisis de varios modelos de polígonos en los que se estudian algunas de sus propiedades geométricas, especialmente su carácter generador de mosaico. En la segunda parte se proponen actividades diversas por su dificultad y adecuación a los niveles de los alumnos; unas se caracterizan por tener un perfil más artístico o creativo, en otras intervienen los cálculos geométricos o las operaciones aritmético-algebraicas; las hay con soluciones concisas y cerradas, pero también otras que permiten soluciones abiertas a la imaginación del alumnado.

Hexágonos que recubren el plano. Parhexágonos

Además del hexágono regular existen otros hexágonos que recubren el plano. Un tipo de estos polígonos son los llamados parhexágonos, es decir, hexágonos cuyos lados son dos a dos iguales en longitud y paralelos (Fernández y Reyes, 2003 y Newman, 1956).

La característica de estos hexágonos especiales para generar mosaico está garantizada por su fácil transformación en un paralelogramo (ver figura 1), polígono que como es bien conocido, siempre tesela el plano.

A continuación se proponen algunas construcciones de parhexágonos que forman mosaico a partir de otros polígonos regulares.

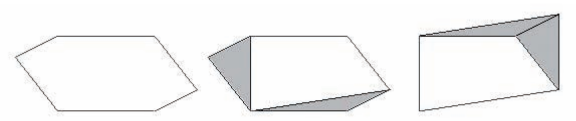

Figura 1

Inmaculada Fernández Benito
IES Núñez de Arce. Valladolid
Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

Parhexágono a partir de un triángulo equilátero

Tomando un triángulo equilátero y dividiendo sus lados en tres partes iguales se trazan segmentos paralelos a los lados como en la figura 2 se obtiene un hexágono regular que obviamente es un parhexágono.

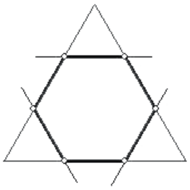

Figura 2

Parhexágonos a partir de un cuadrado

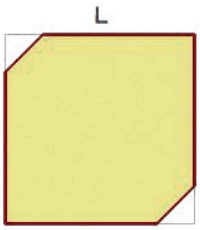

Figura 3

Eliminando dos triángulos rectángulos isósceles en dos vértices opuestos de un cuadrado se obtiene un tipo de parhexágono con cuatro lados iguales, dos ángulos rectos y los cuatro restantes de 135º (figura 3).

En la figura 4 se presenta un dibujo y una fotografía del teselado monoedral originado por este parhexágono.

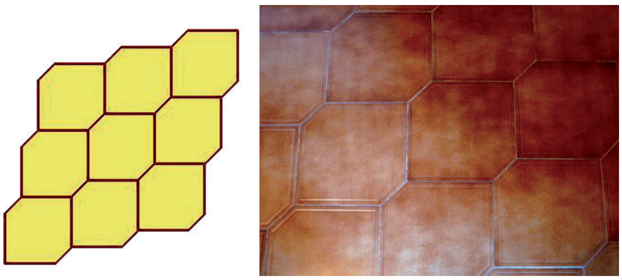

Figura 4

Es posible obtener un parhexágono equilátero siguiendo el mismo método. Basta con resolver el problema algebraicamente de la siguiente forma:

Si el cuadrado de partida tiene lado L y llamamos x al lado del parhexágono, se tiene la siguiente relación (parte derecha figura 5): $x^2=(L-x)^2+(L-x)^2$; operando $x^2=2(L^2-2Lx+x^2)$.

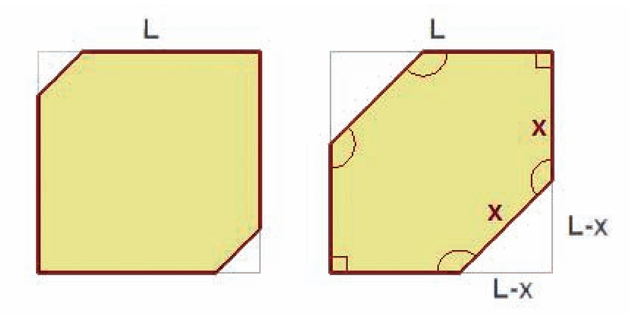

Figura 5

Es decir x es solución de la ecuación $x^2-4Lx+2L^2=0$ y al resolverla obtenemos: $x = L\left(2 \pm \sqrt{2}\right)$.

Puesto que deber ser: $x<L$ la longitud del lado del parhexágono será: $x = L\left(2 - \sqrt{2}\right)$

Este parhexágono equilátero da lugar a diferentes recubrimientos del plano como se observa en la figura 6.

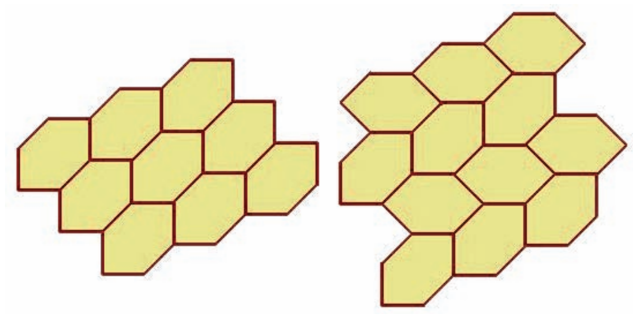

Figura 6

Parhexágonos a partir de hexágonos regulares

En la figura 7 se han dibujado tres modelos diferentes de parhexágonos, a partir de agrupaciones de dos, tres y cuatro hexágonos regulares. El proceso para obtener estos parhexágonos es unir convenientemente, mediante segmentos, algunos vértices de las configuraciones de hexágonos regulares.

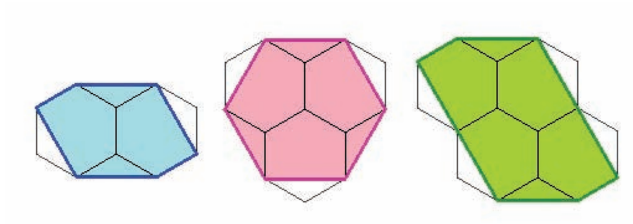

Figura 7

En la figura 8 se presentan tres mosaicos generados respectivamente con cada uno de estos parhexágonos.

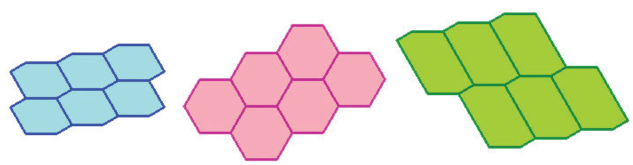

Figura 7

Hexágono que no recubre el plano

Después de todos estos ejemplos parece difícil encontrar un hexágono que no recubra el plano. A continuación mostramos un ejemplo de fácil construcción.

Uniendo vértices en la configuración de siete hexágonos regulares de la figura 9 se origina un hexágono cuyos ángulos son todos iguales (120º) y sus lados son paralelos dos a dos.

Claramente no es un parhexágono al ser los lados paralelos de distinta longitud (Chamoso, Fernádez y Reyes, 2009).

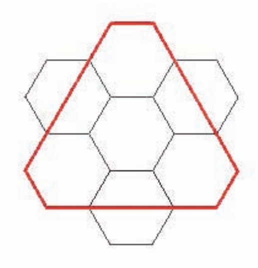

Figura 9

El mismo polígono puede obtenerse cortando los lados contiguos de un triángulo equilátero por un segmento paralelo al tercer lado, generalizando la construcción de la figura 2. En la figura 10 se ha dibujado un parhexágono de estas características, tomando el lado del triángulo dividido en seis partes iguales, resultando el polígono congruente con el trazado sobre la configuración hexagonal de la figura 9.

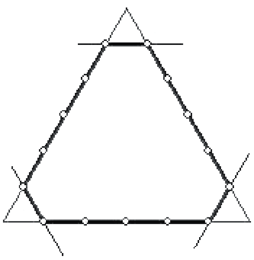

Figura 10

Este parhexágono aparece dando forma a objetos como la alcantarilla de Oporto o la fuente del claustro de la catedral de Coimbra de la figura 11.

Figura 11

A pesar de la existencia de ejes de simetría, este hexágono no genera ningún teselado monoedral. No obstante, combinando parhexágonos de este tipo con hexágonos regulares de lado igual al menor del parhexágono, se forma un mosaico diedral como el de la figura 12, correspondiente a un pavimento de la catedral de Burgos (Chamoso, Fernández y Reyes, 2009).

Figura 12

Pentágonos que no cubren el plano

Es imposible recubrir el plano con pentágonos regulares, como ya constató Durero, en sus trabajos sobre mosaicos (Durero, 2000). Presentamos a continuación algunos pentágonos no regulares que recubren el plano pese a tener una morfología que les confieren ciertas características de cuasi-regularidad: lados, ángulos, ejes de simetría, etc.

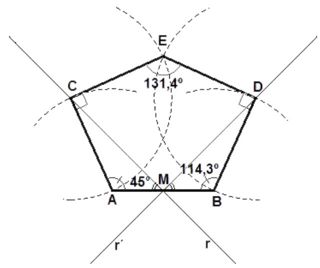

Figura 13

Pentágono equilátero de "El Cairo"

Recibe este nombre por aparecer con frecuencia en los pavimentos de la ciudad egipcia de El Cairo (Fernandez y Reyes, 2003 y Martin, 1982). El pentágono se construye de la siguiente forma (figura 13):

- Por el punto medio de un segmento AB se trazan dos semirrectas formando con él un ángulo de 45º.
- Dos arcos de circunferencia centrados en los puntos A y B y radio AB cortan a las semirrectas anteriores en los puntos C y D respectivamente.
- Dos nuevos arcos de circunferencia en C y D con el mismo radio AB determinan el punto E.

Por construcción, el pentágono obtenido ABCDE es equilátero. Se comprueba que posee dos ángulos rectos y por tanto no puede ser regular.

En la parte izquierda de la figura 14 se muestra la disposición de cuatro de estos pentágonos para formar un parhexágono. El recubrimiento obtenido se conoce como teselado de "El Cairo". En el centro y la parte derecha de la figura 14 se observan dos ejemplos de recubrimientos con apariencia de "El Cairo".

Figura 14

El teselado anterior ofrece diferentes percepciones al observador: bien en una red de parhexágonos trasladados, o estos mismos parhexágonos entrelazados o como piezas en forma de cruz creadas por la rotación de 90º de un pentágono en torno a uno de sus vértices (figura 15).

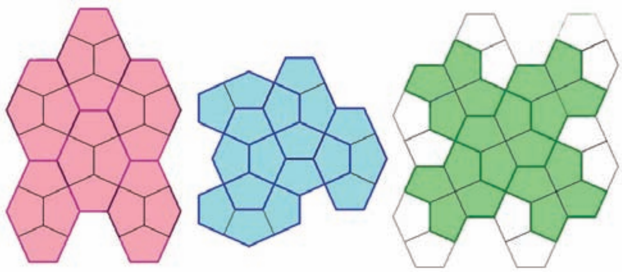

Figura 15

En la literatura sobre teselados aparece con el mismo nombre de pentágono de “El Cairo” otro pentágono que tiene solo cuatro lados iguales, es decir, no equilátero, cuyos ángulos miden: dos 90º, dos 108º y uno 144º. Cuatro pentágonos de este tipo pueden disponerse formando un parhexágono.

Mostramos a continuación pentágonos que recubren el plano trazados a partir de cuadrados y hexágonos regulares.

Pentágono derivado de un cuadrado (dos o tres lados iguales)

Tomando un cuadrado y eliminando una sola de sus esquinas de forma similar a la realizada en el apartado *Parhexágonos a partir de un cuadrado*, se construye un pentágono con tres ángulos rectos y dos de 135º (figura 16). El pentágono así construido recubre el plano porque al hacer un giro de 180º por el punto medio de uno de sus lados se forma un parhexágono.

Figura 16

Este pentágono siempre tiene al menos dos lados iguales, pero puede tener hasta un máximo de tres, dependiendo de la longitud del cateto del triángulo rectángulo isósceles suprimido.

a. Para que los tres lados iguales del pentágono sean consecutivos (figura 17, parte izquierda), la medida del cateto x ha de ser exactamente la obtenida en el apartado *Parhexágonos a partir de un cuadrado*, es decir:

$$x = L\left(2-\sqrt{2}\right)$$

b. Para que los lados iguales del pentágono sean la hipotenusa del triángulo recortado y los dos originales del cuadrado formando ángulo recto, la longitud de los lados denotados por y (figura 17, centro) será la solución de la ecuación: $L^2=(L-y)^2+(L-y)^2$, de donde se obtiene como único valor:

$$y = \frac{L\left(2-\sqrt{2}\right)}{2} \quad \text{puesto que } y<L.$$

Obsérvese que el lado y del segundo pentágono mide la mitad que el lado x del primero.

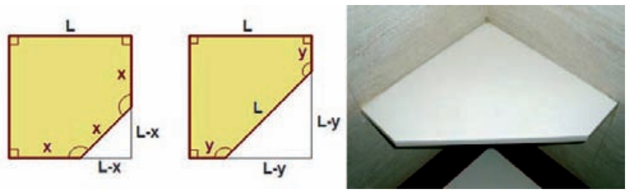

Figura 17

Otro pentágono derivado de un cuadrado (tres lados iguales)

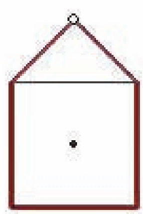

Figura 18

Tres lados de un cuadrado y los segmentos que resultan al unir los dos vértices del cuarto lado con el punto simétrico del centro del cuadrado respecto de este lado, determinan un polígono de cinco lados, tres de ellos iguales (figura 18). El pentágono tiene tres ángulos de 90º y dos de 135º. Su forma recuerda el dibujo esquemático de una casa por lo que se le denomina “pentágono casita” (Alsina, Pérez y Ruiz, 1989).

Este pentágono ofrece diferentes posibilidades de generar mosaicos. En la parte izquierda de la figura 19 se agrupan de dos en dos para formar parhexágonos, también el mosaico de la parte derecha está generado por parhexágonos, pero en este caso formados por grupos de cuatro pentágonos. El mosaico de la parte central está configurado por cruces griegas diseccionadas en pentágonos del mismo tipo.

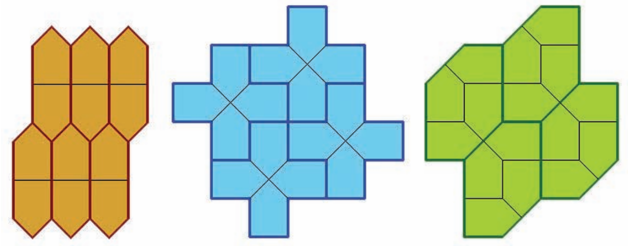

Figura 19

Pentágono derivado de un hexágono (cuatro lados iguales)

Se construye con cuatro lados consecutivos de un hexágono regular y el quinto lado es el segmento que une los vértices extremos. El pentágono así construido es una variación del "pentágono casita".

Al yuxtaponer dos de estos pentágonos por su lado desigual o hacer un giro de 180º por el punto medio de éste, se determina un parhexágono. En la parte derecha de la figura 20 se muestra el dibujo de un mosaico realizado con estas losetas pentagonales.

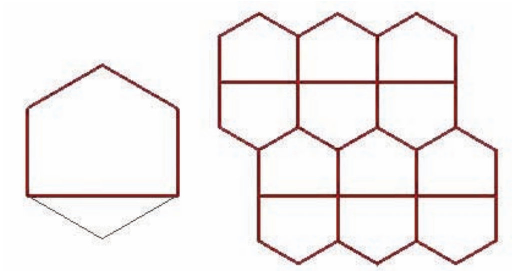

Figura 20

Otro pentágono derivado de un hexágono (cuatro lados iguales)

Su trazado se realiza de la forma siguiente: desde dos vértices alternos del hexágono regular se dibujan dos arcos del mismo radio (lado del hexágono). Estos arcos determinan dos vértices del pentágono cuando cortan a las dos diagonales del hexágono trazadas desde los mismos vértices en que se trazaron los arcos. Los tres vértices restantes del pentágono coinciden con vértices del hexágono de partida (figura 21). Los cuatro lados iguales del pentágono obtenido tienen la misma longitud que el lado del hexágono inicial.

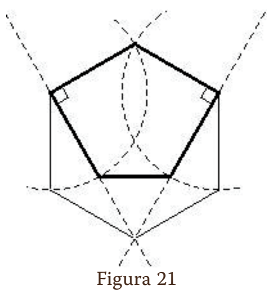

Figura 21

Uno de los ángulos del pentágono es el interior del hexágono, es decir, de 120º, otros dos miden 90º (la primera diagonal del hexágono regular siempre es perpendicular a un lado del mismo) y los dos restantes, al ser iguales, han de medir 120º cada uno.

La apariencia del mosaico monoedral generado por este pentágono resulta similar a la de los mosaicos obtenidos con pentágonos de "El Cairo" (Figura 15).

Pentágono derivado de un hexágono (tres lados iguales)

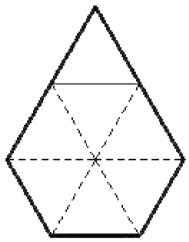

Figura 22

Yuxtaponiendo un triángulo equilátero en uno de los lados de un hexágono regular (figura 22) se obtiene un pentágono que ofrece diferentes formas de recubrir el plano como se muestra en la Figura 23. Obsérvese que en el mosaico de la izquierda dos pentágonos, girados 180º por el punto medio de un lado, se combinan formando un parhexágono, y en la configuración de la derecha seis pentágonos se disponen de forma cíclica, al girar uno de ellos 60º con centro en su vértice desigual.

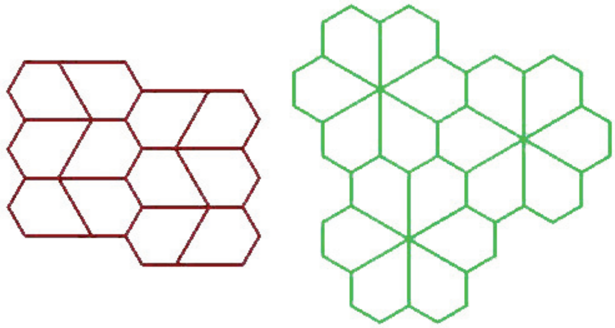

Figura 23

Pentágono derivado de un hexágono (pares de lados iguales)

Al diseccionar un hexágono regular como se muestra en la parte izquierda de la figura 24 cada una de las tres piezas resultantes es un pentágono con dos ángulos rectos y tres de 120º. Uno de sus lados es el lado del hexágono, otros dos miden la mitad de éste y los dos restantes son apotemas del hexágono. Es evidente que este pentágono genera un mosaico. (figura 24 - parte derecha).

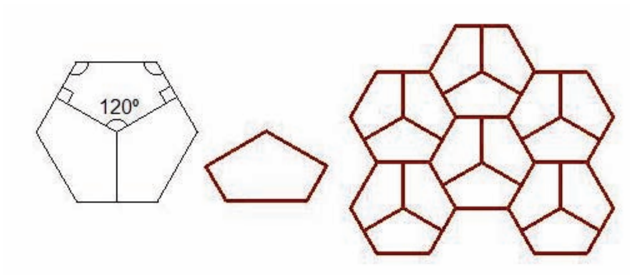

Figura 24

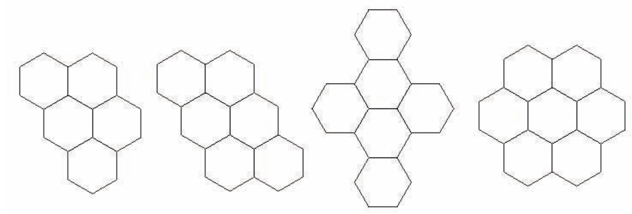

Figura A2-1

Actividades para el aula

Actividad 1. Enunciado

a. A partir de un cuadrado y su girado respecto de uno de sus vértices 180º, construir un parhexágono y calcular su área y perímetro.

b. ¿Qué sucede si los cuadrados son de diferente tamaño? ¿Qué polígono se forma? ¿Es un parhexágono?

Actividad 1. Solución

a. En la parte derecha de la figura A1-1 se observa el parhexágono construido. Si el cuadrado inicial tiene lado L, es evidente, que el área del parhexágono es $A=3L^2$ y su perímetro:

$$P = 4L + 2\sqrt{2}\,L = 2\left(2+\sqrt{2}\right)L.$$

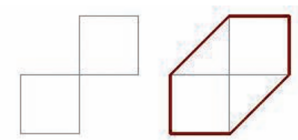

Figura A1-1

b. Se forma también un hexágono que no es parhexágono porque dos de sus lados opuestos no son paralelos y además los lados paralelos no poseen la misma longitud como puede verse en la figura A1-2.

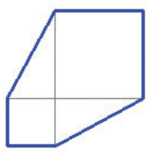

Figura A1-2

Actividad 2. Enunciado

Uniendo vértices de los contornos de las siguientes configuraciones de cinco, seis y siete hexágonos regulares, cada uno de lado L y área A, (figura A2-1), dibujar diferentes parhexágonos y calcular sus perímetros y áreas.

Actividad 2. Solución

En la figura A2-2 se muestran cinco parhexágonos diferentes.

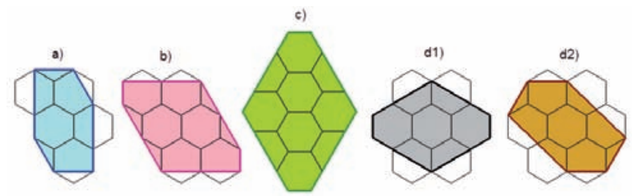

Figura A2-2

Para calcular los perímetros hay que tener en cuenta que las dos diagonales distintas D y D' de un hexágono regular de lado L, miden: $D=\sqrt{3}L$ y $D'=2L$ (figura A2-3) (Fernández y Reyes, 2003).

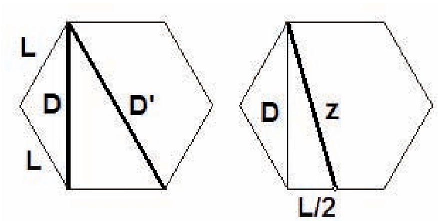

Figura A2-3

La longitud del segmento z de la figura A2-3 se calcula aplicando el teorema de Pitágoras:

$z^2 = 3L^2 + \dfrac{L^2}{4}$ de donde resulta: $z = \dfrac{\sqrt{13}}{2}L$

El área de un hexágono regular en función de su lado L es:

$$A = \frac{6L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}L}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}L^2$$

En la siguiente tabla se muestran los valores de los perímetros y de las áreas de los cinco parhexágonos dibujados:

Parhexágono	Perímetro	Área
a)	$\left(6+4\sqrt{3}\right)L$	$4A = 6\sqrt{3}L^2$
b)	$\left(2+8\sqrt{3}\right)L$	$6A = 9\sqrt{3}L^2$
c)	$18L$	$8A = 12\sqrt{3}L^2$
d1)	$14L$	$5A = \frac{15\sqrt{3}}{2}L^2$
d2)	$4z + 4\sqrt{3}L = \left(2\sqrt{13}+4\sqrt{3}\right)L$	$5A = \frac{15\sqrt{3}}{2}L^2$

Actividad 3. Enunciado

Manteniendo los tres lados iguales del "pentágono casita" derivado de un cuadrado, y uniendo los vértices extremos de esta línea poligonal con el centro del cuadrado, se obtiene un pentágono cóncavo, figura A3-1.

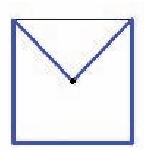

Figura A3-1

Si el lado del cuadrado es L, calcular el área y perímetro del pentágono. Construir con él un recubrimiento del plano.

Actividad 3. Solución

El área del pentágono será la del cuadrado de lado menos la de un triángulo isósceles de base L y altura $L/2$, por tanto el área es:

$$A = L^2 - \frac{1}{2}L\frac{L}{2} = \frac{3L^2}{4}$$

Los lados del pentágono son tres lados del cuadrado y dos medias diagonales del mismo, por consecuencia su perímetro es:

$$P = 3L + 2\frac{\sqrt{2}}{2}L = \left(3+\sqrt{2}\right)L$$

En la figura A3-2 se ha realizado un mosaico utilizando como tesela este pentágono cóncavo.

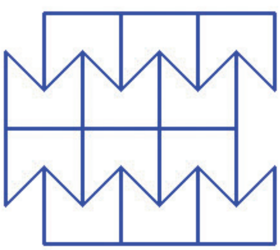

Figura A3-2

Actividad 4. Enunciado

El mosaico de la fotografía, figura A4-1, ofrece distintas interpretaciones en cuanto a las losetas que lo forman. Por ejemplo, puede visualizarse formado por parhexágonos y cuadrados.

Figura A4-1

El parhexágono se ha diseñado a partir de un cuadrado trazando segmentos paralelos a una diagonal por los puntos medios de los lados (procedimiento similar al descrito en apartado *Parhexágonos a partir de un cuadrado*). figura A4-2, parte izquierda.

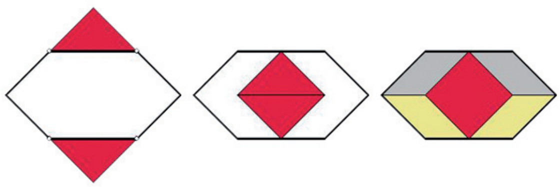

Figura A4-2

Los triángulos rectángulos isósceles suprimidos se disponen formando un cuadrado, como en la parte central de la figura A4-2, resultando una disección de este parhexágono convexo en un cuadrado y dos nuevos parhexágonos cóncavos que se dividen a su vez en cuatro paralelogramos coloreados por pares (Parte derecha de la figura A4-2). El parhexágono así construido es semejante al trazado en la Actividad 1.

Al combinar los parahexágonos iniciales con cuadrados del mismo color y tamaño que los cuadrados interiores a ellos se genera el mosaico de la figura A4-3.

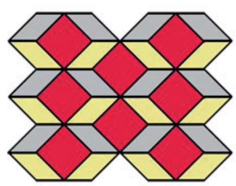

Figura A4-3

a. ¿Cuánto miden los ángulos del parhexágono convexo? (figura A4-2).
b. Si el lado del cuadrado de partida es L. ¿Cuánto miden los lados del parhexágono anterior? ¿Cuál es su área?
c. ¿Cuál es el área del parhexágono cóncavo?
d. Dibujar, respetando el colorido de las piezas, un nuevo mosaico utilizando únicamente parahexágonos convexos.
e. Yuxtaponiendo un parhexágono cóncavo al cuadrado central se forma un nuevo parhexágono con apariencia

tridimensional de paralelepípedo. Dibujar el teselado correspondiente.

Actividad 4. Solución

a. Los parhexágonos tienen dos ángulos de 90º grados y cuatro de 135º.

b. Cuatro de sus lados miden $L/2$, y los otros dos:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}L$$

El parhexágono convexo tiene por área la del cuadrado inicial menos la del cuadrado formado por los dos triángulos, es decir :

$$A = L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{3L^2}{4}$$

c. Teniendo en cuenta que el parhexágono convexo contiene dos parhexágonos cóncavos y un cuadrado interior, el área del cóncavo será la mitad de la diferencia entre el área del convexo y la del cuadrado, es decir:

$$A' = \frac{1}{2}\left(\frac{3L^2}{4} - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right) = \frac{L^2}{4}$$

Observar que este valor coincide con el del área del cuadrado inscrito, lo que implica que cada parhexágono cóncavo es equivalente (misma área) y equicompuesto (se pueden descomponer en las mismas piezas) con el cuadrado interior al parhexágono convexo.

d. Utilizando sólo parhexágonos se obtiene el mosaico de la figura A4-4.

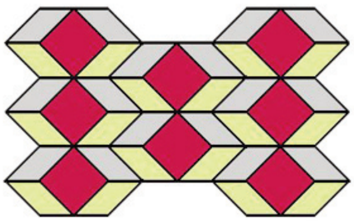

Figura A4-4

e. Con el nuevo parhexágono se origina, por traslación de dos vectores perpendiculares, el teselado de la figura A4-5 (izquierda). En la parte derecha de la figura A4-5 se ha representado este mismo mosaico mostrando el efecto tridimensional que presentan algunos pavimentos.

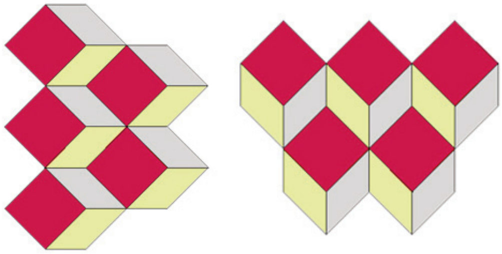

Figura A4-5

Actividad 5. Enunciado

Con un programa de geometría dinámica trazar las cruces que aparecen en las fotografías (figura A5-1).

a) Explicar qué tipo de parhexágonos de los utilizados anteriormente se adaptan a las composiciones.

b) Hallar el perímetro de los "pentágonos casita" que completan la primera cruz.

c) Calcular el área de las cruces.

Figura A5-1

Actividad 5. Solución

a) En el esquema geométrico con CABRI que reproduce la reja (parte izquierda, figura A5-1) se han dibujado cuatro parhexágonos de los utilizados en la Actividad 4 (figura A4-2).

En la representación con CABRI de la yesería (parte derecha, figura A5-2) se han considerado ocho parahexágonos equiláteros y congruentes de los considerados en el apartado *Parhexágonos a partir de un cuadrado*, figura 5.

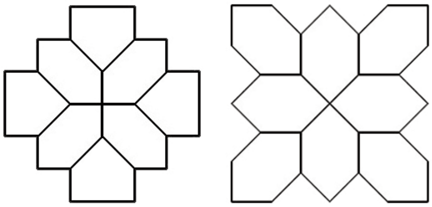

Figura A5-2

b) Teniendo en cuenta las medidas de los lados de los parhexágonos de la actividad 4 a partir de un cuadrado de lado L, los lados oblicuos de los pentágonos casita que completan la primera cruz miden $(\sqrt{2}/2)L$ (longitud del lado mayor del parhexágono); otros dos miden $L/2$ (lado menor del parhexágono) y el quinto lado mide L. Ordenando de mayor a menor estas longitudes: L, $(\sqrt{2}/2)L$ y $L/2$, podemos comprobar que son tres términos consecutivos de una progresión geométrica de razón $(\sqrt{2}/2)$.

Finalmente el perímetro P del pentágono es:

$$P = 2\frac{\sqrt{2}}{2}L + 2\frac{L}{2} + L = \left(\sqrt{2}+2\right)L$$

c. El área de la primera cruz es la suma de las áreas de cuatro parahexágonos (cada uno de ellos de área $3L^2/4$) y de cuatro pentágonos. Cada pentágono se descompone en un rectángulo de lados L y $L/2$ y un triángulo isósceles de base L y altura $L/2$ (Es decir el área de un pentágono es:

$$\frac{L^2}{2} + \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4} \text{).}$$

Si tenemos en cuenta que los parahexágonos y los pentágonos casita que forman la primera cruz tienen todos la misma área, ésta resulta ser:

$$A = 8\frac{3L^2}{4} = 6L^2$$

El área de la segunda cruz es ocho veces la del parhexágono equilátero del apartado *Parhexágonos a partir de un cuadrado*. El área de uno estos parhexágonos es la del cuadrado de partida de lado L, menos la de dos triángulos rectángulos e isósceles de cateto:

$$L - x = \left(\sqrt{2}-1\right)L$$

que forman un cuadrado de lado:

$$\left(\sqrt{2}-1\right)L$$

resultando pues, que el área de cada parhexágono es

$$2\left(\sqrt{2}-1\right)L^2.$$

Luego el área A de esta cruz es:

$$A = 16\left(\sqrt{2}-1\right)L^2.$$

Actividad 6. Enunciado

En los dos enrejados de la figura A6-1 se distinguen de nuevo cruces formadas por polígonos. Identificar los tipos de pentágonos y parhexágonos que las forman y su disposición en las cruces.

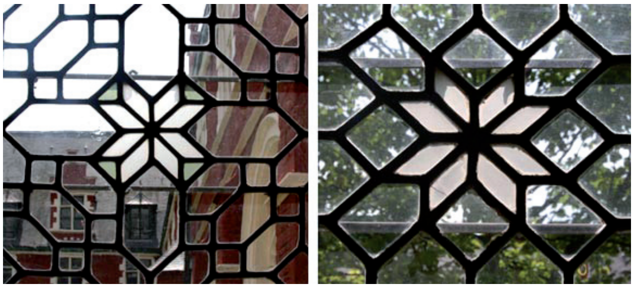

Figura A6-1

Actividad 6. Solución

La cruz de la fotografía de la izquierda en la figura A6-1, se compone de cuatro pentágonos casita girados entre sí 90º alrededor de un vértice combinados con cuatro parhexágonos de los considerados en la Actividad 1 o en la Actividad 4.

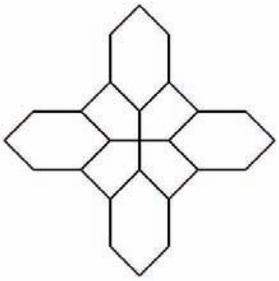

Figura A6-2

Una interpretación geométrica de la segunda cruz, parte derecha de la figura A6-1, puede basarse en el hecho de que cada uno de sus brazos es un pentágono formado al combinar o intersecar dos pentágonos casita, derivados de un cuadrado de lado L, como se muestra en la figura A6-3. El perímetro del nuevo pentágono, también con forma de "casita", es:

$$P = 5L + 2\frac{\sqrt{2}}{2}L = \left(5+\sqrt{2}\right)L$$

y su área la suma de la de dos cuadrados y un triángulo isósceles de base L y altura $L/2$, es decir:

$$A = 2L^2 + \frac{1}{2}L\frac{L}{2} = \frac{9L^2}{4}$$

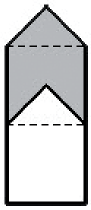

Figura A6-3

Al girar 90º este pentágono, consecutivamente, alrededor de uno de sus vértices se obtiene la cruz dibujada en la figura A6-4.

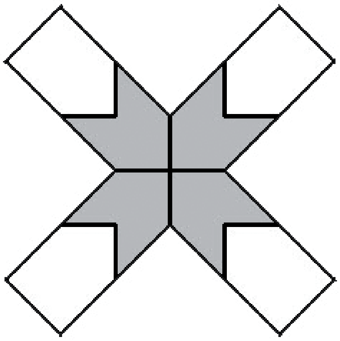

Figura A6-4

Las fotografías de las actividades 5 y 6 corresponden a detalles constructivos (ventanales y yesería) de Sint Lucas Architectuur.Universidad de Gante (Bélgica).

Consideraciones finales

Nuestro propósito al escribir este artículo ha sido ofrecer ideas a los lectores de la revista *Suma* para aplicar las matemáticas y, especialmente la geometría, en la praxis docente, concretando actividades didácticas útiles para los niveles de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. En definitiva, se pretende enriquecer y afianzar las competencias de nuestros alumnos a través de contenidos matemáticos adaptados al estudio y comprensión del entorno. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C., Pérez, R., Ruiz, C. (1989). *Simetría Dinámica*. Madrid: Síntesis.

Chamoso, J., Fernández, I., Reyes, E. (2009). *Burbujas de Arte y Matemáticas*. Madrid: Nivola.

Durero, A., *De la medida*. (Edición de J. Peiffer). (2000). Madrid: Akal, D. L.

Fernández, I., Reyes, E. (2003). *Geometría con el hexágono y el octógono*. Granada: Proyecto Sur de Ediciones. (Segunda edición 2008).

Fernández I., Reyes, E. (2005). Trabajando con el hexágono. *Números*, 60, pp. 7-14.

Martin, G.E. (1982). *Transformation Geometry*. New York: Springer.

Newman, J. (1956). *The World of Mathematics Vol 3*. New York: Simon and Schuster.

Este artículo fue recibido en *Suma* en diciembre de 2010 y aceptado para su publicación en julio de 2011