suma+ 67
Junio 2011, pp. 47-56

Estudio de algunos engaños en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la didáctica de la matemática (introducción a los fractales)

Analizaremos ciertos casos engañosos que se originan en geometría y que son llamados sofismas o falacias, las cuales debemos tener presente para no caer en conclusiones falsas en el estudio de estas situaciones geométricas. Además, analizaremos la continuidad y el infinito a través de intuiciones geométricas que están relacionadas con procesos potencialmente infinitos, para luego a través del infinito actual generar soluciones analíticas teniendo como base fundamental el estudio de la didáctica del análisis matemático como propuesta en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Palabras Clave: Investigación didáctica, geometría, resolución de problemas, enseñanza y aprendizaje, bachillerato y universidad.

Study of some deceits in teaching-learning process of the teaching of mathematics (introduction to fractals)

We will analyze certain deceptive cases that they are originated in geometry and that sophisms or deceits are called, which we must have present not to fall in false conclusions in the study of these geometric situations. In addition, we will analyze the continuity and the infinite through geometric intuitions that are related to potentially infinite processes, for soon through present infinite generating solutions analytical having as it bases fundamental the study of the Didactics of the mathematical analysis like proposal on the education-learning process.

Key words: Educational research, geometry, problem solving, teaching and learning, high school and college.

Introducción

El campo de la *Didáctica de la Matemática*, durante la década de los noventa, consideró la problemática del aprendizaje de las matemáticas en términos de *procesos cognitivos* y ya no como una simple adquisición de competencias y de habilidades según Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Además, en ese mismo tiempo, se amplia el campo de los problemas investigados, hasta entonces muy centrado en los conceptos básicos de las matemáticas de la enseñanza primaria (que corresponde al "pensamiento matemático elemental" entre los cuales cabe destacar la *Didáctica de la Geometría*, por ejemplo), a cuestiones relacionadas con el pensamiento matemático propio de los currículos de los últimos años de bachillerato y primeros cursos universitarios.

Recordemos que Piaget, J (1896-1980) destaco lo siguiente: en la etapa de las operaciones formales (de los 11 años en adelante) los adolescentes pasan de las experiencias concretas reales a pensar en términos lógicos más abstractos. Son capaces de utilizar la *lógica propositiva* para la solución de problemas hipotéticos y para derivar conclusiones. Son capaces de emplear el *razonamiento inductivo* para sistematizar sus ideas y construir teorías sobre ellas; pueden usar el *razonamiento deductivo* para jugar el papel de científicos en la construcción y comprobación de teorías. Pueden usar un *lenguaje metafórico* y *símbolos algebraicos* como símbolos de símbolos. Son capaces de pasar de lo que es real a lo que es posible, pueden pensar en lo que podría ser, proyectándose en el futuro haciendo planes en *teorías cognoscitivas* en la etapa de desarrollos formales.

Relevancia del trabajo para la Educación Matemática

Cuando nos referimos a *procesos cognitivos* implicados en el pensamiento matemático avanzado, pensamos en una serie

Julio César Barreto Garcia
Instituto de Mejoramiento Profesional del Magisterio (UPEL). Extensión San Felipe.
Liceo Bolivariano "José Antonio Sosa Guillen". Yaracuy-Venezuela.
Liceo Bolivariano "José Antonio Páez". Yaracuy-Venezuela.
Universidad Nacional Abierta. Centro Local Yaracuy.
Asociación de Matemática Venezolana.

de procesos matemáticos entre los que destaca el proceso de abstracción, la cual consiste en la substitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente. Según Azcárate, C. y Camacho, M. (2003), de los cuales tomaremos parcialmente en cuenta sus reflexiones, no se puede decir que la abstracción sea una característica exclusiva de las matemáticas superiores, como tampoco lo son otros procesos cognitivos de componente matemática tales como analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar, pero resulta evidente que estos tres últimos adquieren mayor importancia en los cursos superiores: la progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, demostrar y formalizar. Por otro lado, entre los procesos cognitivos de componente mas psicológica, además de abstraer, podemos citar los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar. Sin embargo, en las matemáticas elementales las descripciones se construyen sobre la experiencia (percepción visuo-espacial, interacción con proceptos[1] operacionales), mientras que en el más alto nivel de las matemáticas avanzadas (conocimiento formal), las propiedades de los objetos se construyen a partir de definiciones. Debemos estar pendientes ya que saberse de memoria la definición de un concepto no garantiza en absoluto comprender su significado; en realidad, comprender quiere decir tener un esquema conceptual de forma que se asocien ciertos significados a la palabra que designa el concepto: imágenes mentales, propiedades, procedimientos, experiencias, sensaciones.

Marco teórico y calidad bibliográfica

En los *Modelos Cognitivos* se considera de acuerdo a Azcárate, C. y Camacho, M. (2003), por un lado, la definición de un concepto matemático como una secuencia de palabras o una definición verbal del concepto, fruto de su evolución histórica. Se podrá distinguir entre las definiciones formales, convenidas y aceptadas por la comunidad científica de los matemáticos en un momento dado (que se suelen encontrar escritas en los libros y más aún en manuscritos antiguos), y las definiciones personales que utilizan las personas (estudiantes, profesores, matemáticos) como interpretación, construcción o reconstrucción de una definición formal.

Sfard (1991) habla de dos tipos de *concepciones* de un mismo concepto matemático: las concepciones que llama *operacionales* cuando se tratan las nociones matemáticas como procesos dinámicos, algoritmos y acciones, y las concepciones *estructurales* cuando se consideran los conceptos matemáticos como objetos abstractos estáticos. Si bien afirma que los dos tipos de concepciones son complementarias "la habilidad para ver una función o un número, a la vez como un proceso y como un objeto es indispensable para una comprensión profunda de las matemáticas, cualquiera que sea la definición de *comprender"* (On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 22, pp. 1-36). Por ejemplo: la expresión $f(x)= x^2-9$ representa simultáneamente el proceso de cómo calcular el valor de la función $f(x)$ para un valor particular de x y el objeto, es decir el concepto de función para un valor general de x. Se habla de un procepto "molde".

En cuanto a las expresiones:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-9}{x-1},\ \lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x},\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k},$$

representan el proceso de tender a un límite y el objeto valor del límite, pero sin incluir el procedimiento de cálculo especifico para obtener ese valor. En este caso se trata de un procepto "estructural". Según Azcárate, C. y Camacho, M. (2003), de aquí surge la necesidad de describir y aprender cómo funcionan ciertos sistemas de representación: representaciones de escritura decimal de los números, representaciones gráficas de formas (funciones o no), representaciones de la escritura literal y algebraica, representaciones que son las figuras en geometría, las cuales vamos a tomar muy en cuenta en el desarrollo del presente artículo.

Metodología y resultados

Duval (1996), considera dos características esenciales de la actividad matemática: el cambio y la coordinación de los registros de representación semiótica. Por ejemplo, si se consideran los registros de representación: lingüísticos (lenguaje natural, escritura algebraica, lenguaje formal) u otros registros (figuras geométricas, gráficos cartesianos, tablas, etc.), se entiende por cambio de registro de representación "a la conversión de la representación de alguna cosa en una representación de esta misma cosa en otro sistema semiótico". Por ejemplo, "realizamos un cambio cuando al resolver un problema matemático usamos un gráfico cartesiano para representar una función y en el siguiente paso de la resolución, expresamos con una ecuación algebraica la misma función". (Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 6, 3, pp. 349-382. (1999). *Actas del PME 23*, pp. 3-26).

> La actividad geométrica involucra tres clases de procesos cognitivos: La visualización, el razonamiento y la construcción. Los cuales se deben desarrollar separadamente. Bishop (1983).

Falacias y Sofismas Geométricos

La *Falacia* se define como engaño y *Sofisma* mediante "falso razonamiento para inducir a error", "argumento, razonamiento falso a pesar de una apariencia de verdad". Engañar es dar una apariencia de verdad a lo que es mentira, y por tanto entenderemos en matemática a falacia y sofisma como sinónimos y con el significado de que mediante un *razonamiento* falso, pero aparentemente verdadero se obtiene una conclusión falsa la cual proviene de un error en el razonamiento que a veces no es fácil detectar, que puede no ser inmediato de percibir. Veamos los siguientes ejemplos:

a) "Demostrar" que en todo triángulo la longitud de un lado es igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados.

Solución: Consideremos el triángulo ABC y los juntos medios de sus lados $A_1 B_1$ y C_1 como muestra en la figura 1:

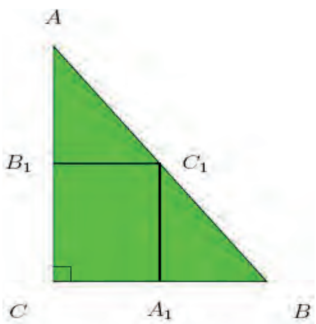

Figura 1: Primera configuración del ejemplo anterior.

donde la recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al otro lado.

Al unir los puntos A_1 y B_1 con C_1 se obtiene la poligonal $AB_1C_1A_1B$. Demostremos que la longitud de esta poligonal es igual a $\overline{AC}+\overline{CB}$.

En efecto, como $B_1C_1A_1C$ es un paralelogramo, entonces $\overline{B_1C_1}=\overline{CA_1}$ y $\overline{C_1A_1}=\overline{B_1C}$ como además,

$$\overline{AB_1}+\overline{B_1C}=\overline{AC} \quad \text{y} \quad \overline{CA_1}+\overline{A_1B}=\overline{CB}$$

tenemos que:

$$\overline{AB_1}+\overline{B_1C_1}+\overline{C_1A_1}+\overline{A_1B}=\overline{AB_1}+\overline{CA_1}+\overline{B_1C}+\overline{A_1B}=\overline{AC}+\overline{CB}$$

De manera análoga procedemos con los triángulos y obtenemos la poligonal cuya longitud se demuestra, con un *razonamiento* semejante, que es igual a $\overline{AC}+\overline{CB}$. Veamos la figura 2:

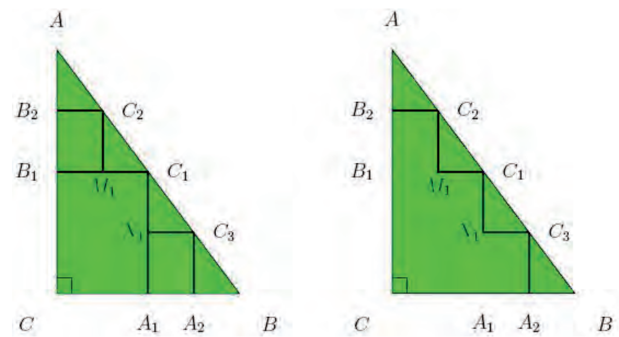

Figura 2: Otras nuevas configuraciones del ejemplo anterior.

Si seguimos con este proceso indefinido, observamos en las sucesivas gráficas que los lados de las poligonales obtenidas se hacen cada vez mas pequeñas y sus vértices "tienden" a estar en el segmento AB, pero, la longitud de las poligonales es siempre igual a $\overline{AC}+\overline{CB}$. Luego, en el "límite" la poligonal que se obtiene es el lado $\overline{AB}$ y por consiguiente $\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}$. Dé una explicación al por qué de esta conclusión falsa proveniente de un *razonamiento* aparentemente correcto y de observaciones *visuales*.

Sugerencia: Obtenga una sucesión de poligonales $\{L_n\}_{n\geq 1}$ la cual es una sucesión constante con valores iguales a $L=\overline{AC}+\overline{BC}$; luego el "límite" cuando " n tiende a infinito" es la misma constante L distinta de $\overline{AB}$.

> Nota: Es importante indicar que cuando se tiene una sucesión de poligonales $\{P_n\}$ como las del ejemplo anterior, que tiene como "límite" una curva, en este caso el segmento $\overline{AB}$ no siempre es cierto que el límite de las longitudes de P_n sea igual a la longitud de la curva límite, en este caso la longitud $\overline{AB}$.

Podemos revisar Barreto (2008b) donde se demuestra geométricamente que en cualquier triángulo rectángulo se cumple la relación Pitagórica:

$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$$

Donde $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son las longitudes de los catetos (lados que forman el ángulo recto) y $\overline{AB}$ es la longitud de la hipotenusa (lado que se opone al ángulo recto).

Donde haciendo $\overline{AC}=a$, $\overline{BC}=b$ y $\overline{AB}=c$ tenemos que se cumple que $a^2+b^2=c^2$ lo cual se dedujo usando figuras como las de la figura 3.

Ahora bien, de acuerdo con la figura 3 sabemos que la longitud de la hipotenusa en este triángulo denominado isorrectángulo es $\sqrt{2}$, el cual se puede decir que fue unos de los números que dieron origen a los números irracionales. Veamos como un razonamiento falso como el anterior nos conduce a una contradicción.

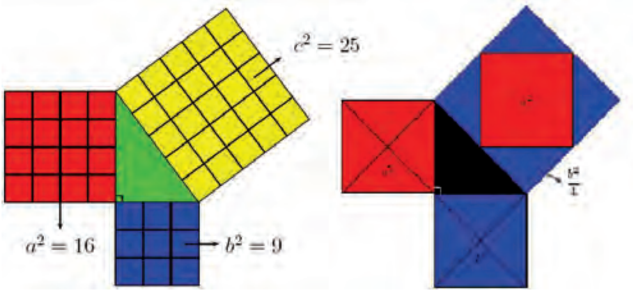

Figura 3: A la izquierda vemos la división de cada cuadrado en tantos cuadraditos como unidades tenga los cuadrados originales construidos sobre los lados del triángulo rectángulo notable, aplicando una aprehensión operativa de cambio (figura 2). A la derecha dividimos los dos cuadrados construidos sobre los lados del triángulo isorrectángulo, siguiendo las diagonales, para obtener ocho piezas de forma triangular, aplicando una aprehensión operativa de cambio figural en el triángulo isorrectángulo.

b) Mediante un *Razonamiento* análogo al del problema anterior, con un triángulo isorrectángulo, *Demuestre que* $\sqrt{2}=2$.

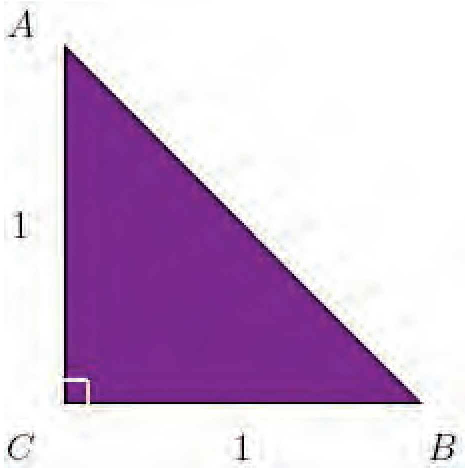

Figura 4: Triángulo isorrectángulo (triángulo isósceles que también es rectángulo y que los lados que forman el ángulo recto denominados catetos son iguales. En este caso iguales a la unidad de medida.

Como según el teorema de Pitágoras tenemos que: $\overline{AB}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Luego $\overline{AB} = \sqrt{2}$ (1).

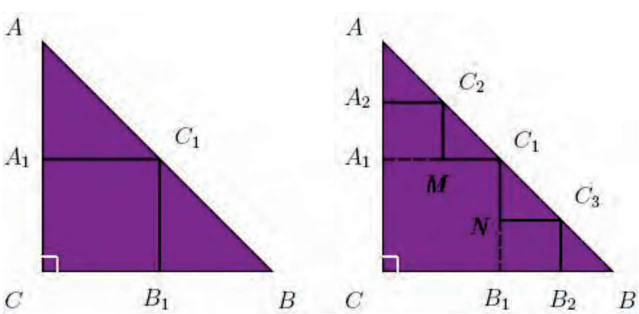

Figura 5: Configuraciones realizadas a la Figura 4 de arriba, de acuerdo con lo realizado en la figura 2 del ejemplo (a).

Si realizamos los cálculos del ejemplo (a) notamos que de acuerdo con la figura 5 tenemos:

$$\overline{AA_1} + \overline{A_1C_1} + \overline{C_1B_1} + \overline{B_1B} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$$\overline{AA_2} + \overline{A_2C_2} + \overline{C_2M} + \overline{MC_1} + \overline{C_1N} + \overline{NC_3} + \overline{C_3B_2} + \overline{B_2B} =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2$$

Si continuamos con este proceso observamos que los lados de las poligonales obtenidas se hacen cada vez más pequeñas y sus vértices "tienden" a estar en el segmento $\overline{AB}$ luego en el límite, la longitud de esa poligonal es igual a $\overline{AB} = 2$ (2) Así, de (1) y (2) tenemos que $\sqrt{2}=2$. Lo cual es una falacia o sofisma.

c) Otra falacia de tipo geométrico es el siguiente: "la longitud de cualquier semicircunferencia es igual a su diámetro."

Sugerencia: razone considerando la semicircunferencia dibujada abajo de centro en O y diámetro $\overline{AB} = 2R$. Veamos la figura 6:

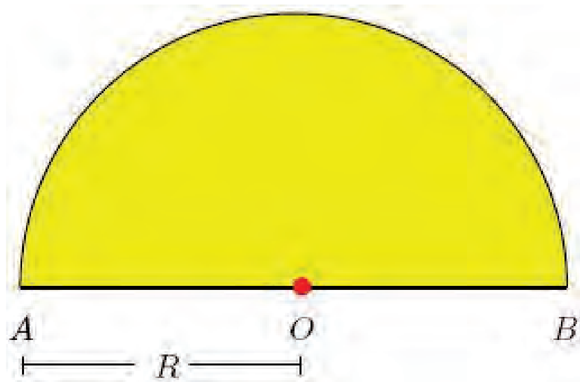

Figura 6: Primera configuración del ejemplo anterior.

Luego, dibujemos semicircunferencias de radio $R/2$ y cuyos centros son los puntos medios de los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ respectivamente. Veamos la figura 7:

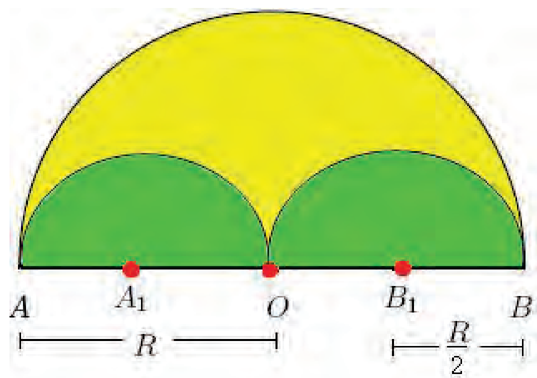

Figura 7: Configuración del ejercicio (c).

Denote por L_1 la suma de las longitudes de estas dos semicircunferencias. De manera análoga proceda con estas dos últimas semicircunferencias. Podemos considerar las semicircunferencias con centro en los puntos medios A_2, A_3, B_2, y B_3 de los segmentos $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1O}$, $\overline{OB_1}$ y $\overline{B_1B}$ respectivamente y con radio $R/4$. Denote por L_2 la suma de las cuatro semicircunferencias, y así sucesivamente.

Vea que las semicircunferencias obtenidas tienen longitudes cada vez mas pequeñas y que la curva compuesta por la reunión de todas ellas "tienden" a confundirse con el segmento $\overline{AB}$ y como la suma de las longitudes de todas esas semicircunferencias es igual a πR entonces tenemos que $\pi R = \overline{AB}$. La "longitud de la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ es igual a su diámetro". Además, como $\overline{AB} = R$ entonces del resultado anterior obtenemos que $\pi = 2$. ¿Cómo se explica esta falacia.

En un curso de maestría que tome en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Barquisimeto denominado *Historia de la Matemática Discreta* con un destacado profesor llamado Douglas Jiménez, el cual tiene una amplia trayectoria en historia de la matemática y es referencia en este articulo y casi todo lo escrito por este autor, se discutió el origen de la letra π y se tomo en cuenta la *proposición 2 del duodécimo libro de los Elementos de Euclides* que nos dice que: "los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros". En la referencia de Barreto, J (2009b) se dice que en el lenguaje moderno, si es A_i el área de un círculo i de diámetro d_i entonces

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^{\ 2}}{d_2^{\ 2}} \qquad (1)$$

Independientemente de los círculos y A_1, A_2. El cual en notación de proporción es: $A_1 : A_2 :: d_1^{\ 2} : d_2^{\ 2}$.

Está demostrada en los *Elementos* con una base teórica provista por uno de los mejores discípulos de Platón, el matemático Eudoxo. Se conoce como método de exhaución y es uno de los antecedentes del moderno cálculo integral. La demostración según vimos en el desarrollo del curso de maestría procede por comparación del área del círculo con las áreas de los polígonos regulares inscritos en la circunferencia y el análisis de las pequeñas diferencias entre estas áreas, que se reducen al aumentar el número de lados de los polígonos. Sin embargo, demostraciones como estas, basadas en procesos que potencialmente estamos en capacidad de repetir cuantas veces deseemos, es decir lo que hoy llamamos procesos infinitos, mostraban la dificultad de conseguir la cuadratura del círculo. Arquímedes se apoyo en la *proposición 1 del duodécimo libro de los elementos de Euclides* que dice: "los polígonos semejantes inscritos en círculos son el uno al otro como los cuadrados de sus diámetros". Aunque cabe destacar que Arquímedes no uso polígonos circunscritos sino que razono por reducción al absurdo, la cual era un razonamiento muy usado en estos tiempos para evitar los procesos infinitos.

Nos cuenta Jiménez (2004), que manteniendo la línea de pensamiento Griego orientada hacia la comparación de figuras, Arquímedes demuestra que cualquier círculo "es igual" (es decir, tiene la misma área) que un triángulo rectángulo uno de cuyos catetos es igual al radio del círculo y el otro igual a la circunferencia del círculo, como se muestra en la Figura 8:

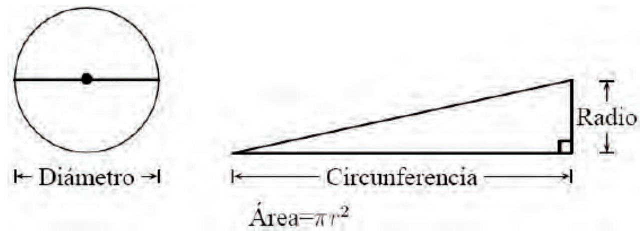

Figura 8: Cuadratura aproximada del circulo según Arquímedes.

En la discusión del curso se noto que si en la fórmula para calcular el área del triángulo deducida en Barreto (2008a, 2009c) tenemos que $A_T = CR/2$, donde denota el área del triángulo rectángulo y el área del círculo calculado anteriormente es $A_C = \pi R^2$, con A_C denotando el área del circulo. La longitud de la circunferencia C es precisamente demostrada por Arquímedes, usando *doble reducción al absurdo,* tenemos que:

$$A_C = A_T \quad (2)$$

De donde obtenemos que $\pi R^2 = CR/2$ así que $C = 2\pi R$. En notación moderna usamos L en vez de C para denotar la longitud de la circunferencia. Aquí sí razona Arquímedes por doble reducción al absurdo suponiendo desigualdades en ambas áreas, las cuales surgen de usar polígonos inscritos o circunscritos.

Ejercicio: Enuncie estos problemas de longitud de la circunferencia y de área del círculo en un lenguaje actual y demuéstrelos usando limites de sucesiones.

El número π aparece como una constante que Arquímedes encuentra de la ecuación (1), donde viéndolo de otra manera es:

$$\frac{A_1}{d_1^{\ 2}} = \frac{A_2}{d_2^{\ 2}}. \text{ Y de manera general: } \frac{A_1}{d_1^{\ 2}} = \frac{A_2}{d_2^{\ 2}} = \cdots = \frac{A}{d^2} = k$$

De donde obtenemos usando el hecho de que el diámetro es el doble del radio de la circunferencia lo siguiente:

$$A = kd^2 \Rightarrow A = k(2r)^2 \Rightarrow A = k4r^2 \Rightarrow A = (4k)r^2$$

De aquí, notando que si la constante $\pi = 4k$ observamos que $k = \pi/4$ el cual es la forma que tiene precisamente la constante para hallar aproximaciones de este número irracional. Veamos algún mentor de aproximaciones importantes de este número trascendente (o *trascendental*)[3]: En 1674 el alemán *G. Leibnitz* da la serie:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots$$

Pero presenta problema pues tienen que sumarse unos 19 millones de términos para conseguir 7 decimales correctos. La fórmula desarrollada por *Leonhard Euler* quedaría como sigue:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}-\frac{1}{7\cdot 3^7}+\cdots$$

En esta época se solía utilizar la letra “p” (peripheria) para designar a la razón entre circunferencia y diámetro, aunque algunos, como el inglés *William Jones (1706),* ya utilizaban el símbolo π. Fue *Leonhard Euler* quien introdujo este símbolo de forma definitiva al utilizarlo en su libro *“Introductio in Analysin Infinitorum”*, publicado en 1748. Años más tarde, en 1764, *Euler* encontraría otra fórmula de convergencia rápida. En 1761 *Lambert* demuestra que π es irracional, y en 1794 *Legendre* prueba un resultado un poco más fuerte: que π^2 también es irracional. En *1882* el holandés *Lindemann* demuestra que π es trascendente, lo cual supone (entre otras cosas) que la cuadratura del círculo es imposible. Este problema había permanecido sin resolver durante más de 2000 años.

> Las matemáticas son la única ciencia en la que siempre se sabe exactamente de que se habla y en la que se esta seguro de que cuanto se dice es verdadero. Émile Borel[4] (Francés, 1871-1956).

Ahora veamos algunas falacias aparentes que han surgido revisando un poco la historia de la matemática, estas falacias son comúnmente llamadas paradojas (idea extraña o irracional que se opone al sentido común y a la opinión general) por un filósofo griego que vivió unos 4 siglos antes de Cristo llamado Zenón. Es conocido por sus *paradojas*, algunas de las cuales niegan la existencia del movimiento. Zenón intentó probar que el espacio no está formado por elementos discontinuos y, concretamente, que no existe el movimiento. La paradoja de Aquiles y la tortuga han llegado hasta nuestros días y siguen atormentando a los estudiantes de filosofía. Aristóteles y Simplicio dijeron que los argumentos de Zenón son *falacias.* A veces las representaciones gráficas nos ayudan a la demostración de muchos teoremas; y nos pueden servir de orientación, de guía, en la demostración; nos suministran las “intuiciones[5] geométricas” que nos servirán para formular teoremas y demostraciones.

a) Observe las *construcciones* geométricas que hacemos a continuación en analogía con las paradojas de Zenón, en donde partimos de una barra de longitud 1 (una unidad) y luego dividámosla sucesivamente por mitades, veamos la figura 9:

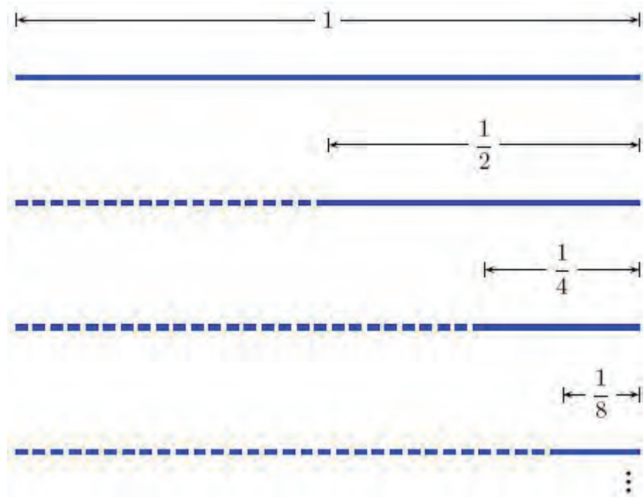

Figura 9: Partición de una barra de longitud 1 (una unidad de medida) en una sucesión de mitades cada vez más pequeñas.

i. Estas *construcciones* geométricas “*sugieren*” cuál puede ser el valor de la siguiente “suma infinita” (Prueba Gráfica):

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$$

- Justificación de la respuesta anterior: la suma de todos los pedazos obtenidos en la barra es igual a la longitud total de la misma. Por lo tanto, esto “sugiere” que esa suma infinita de partes de la unidad es igual a la unidad.

ii. Demuestre analíticamente la validez de la respuesta que dió en la parte i.

Sugerencia: Forme la progresión geométrica:

$$a_n=a_1 r^{n-1}$$

Donde a_n es el término n-ésimo, a_1 es el primer término y r es la razón de la progresión. Además, la suma finita viene dada por:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^{n-1})}{1-r}. \text{ Con } a_1 \neq 0$$

Cuando esta suma es infinita[6] es llamada serie geométrica y escribimos

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_1 r^k$$

Es decir, la suma infinita de S_n y tenemos que cuando $|r|<1$ ocurre que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_1 r^k = \frac{a_1}{1-r}$$

Solución: Obsérvese que los términos de esa suma constituyen una progresión geométrica de términos, cuyo término enésimo se halla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2},\\
a_2 &= \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = a_1\left(\frac{1}{2^1}\right) = a_1\left(\frac{1}{2}\right)^1,\\
a_3 &= \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) = a_1\left(\frac{1}{2^2}\right) = a_1\left(\frac{1}{2}\right)^2,\\
a_4 &= \frac{1}{16} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right) = a_1\left(\frac{1}{2^3}\right) = a_1\left(\frac{1}{2}\right)^3\\
&\vdots\\
a_n &= \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) = a_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Y observamos que la razón es r=1/2 Así, nos queda la suma finita:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donde el primer término es $a_1=1/2$, luego, de acuerdo con la sugerencia para calcular la suma infinita tratamos de calcular el límite siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_1 r^k$$

La cual es llamada serie geométrica. Como la razón es menor que 1 tenemos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_1 r^k = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Por lo tanto, $a_1+a_1r+a_1r^2+...+a_1r^n+...=1$. Por convención $r^0=1$ y $r^1=r$.

Así:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

b) Observe las *construcciones* geométricas que hacemos a continuación, en donde partimos de un cuadrado de lado 1 (una unidad) y luego vamos tomando puntos medios de los lados de los cuadrados y rectángulos que se van obteniendo sucesivamente, como observamos en los dibujos de la figura 10:

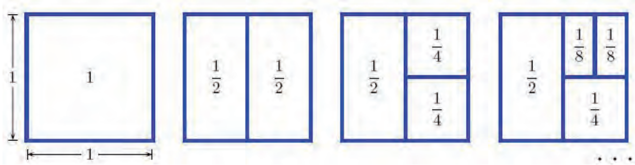

Figura 10: Partición de unos cuadrados o rectángulos, partiendo de un cuadrado de lado 1 (una unidad de medida) y se forman una sucesión de mitades cada vez más pequeñas.

i. ¿Qué indican los números colocados en esos cuadrados y rectángulos?

Respuesta: Son las áreas de los respectivos cuadrados y rectángulos que intervienen en el proceso descrito.

ii. Dibujemos las figuras geométricas que se obtienen en las dos iteraciones que siguen. Veamos la figura 11:

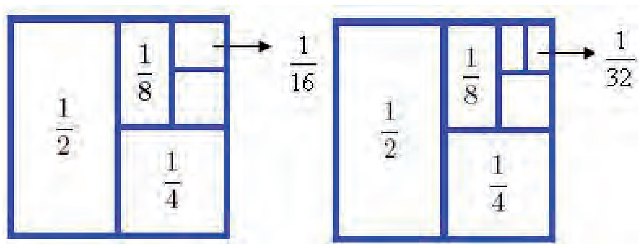

Figura 11: Partición de unos cuadrados o rectángulos y firmamos una nueva iteración.

iii. Las figuras antes dibujadas "sugieren" cuál puede ser el valor de la siguiente "suma infinita" (prueba gráfica):

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$$

- Justificación de la respuesta anterior: estas construcciones sugieren que la suma de las áreas es igual al área total, que en este caso es igual a una unidad cuadrada, puesto que al iterar indefinidamente el proceso resultante es el área del cuadrado más grande que es uno.

iv. Demuestre analíticamente la validez de la respuesta que dio en la parte iii.

Sugerencia: use lo sugerido en la parte ii del ejercicio anterior.

c) Observe las *construcciones* geométricas que hacemos a continuación, en donde partimos de un triángulo equilátero que tiene área A véase la figura 12:

Estado Inicial Primera Iteración Segunda Iteración

Figura 12: A la izquierda notamos el estado inicial, es decir el triángulo equilátero sin ninguna iteración. En el centro tenemos la primera iteración[7] construyendo cuatro triángulos congruentes dibujando el "situado mas al centro" en negro o en un tono de este y continuando con el proceso en cada uno de los triángulos que habríamos dibujado en gris tenemos a la derecha la segunda iteración.

La figura así obtenida por iteración es un *Fractal*[8], denominado *triángulo o fractal de Sierpinski* (polaco, 1882-1969).

i. Hagamos el dibujo correspondiente a la tercera iteración. Véase la Figura 13.

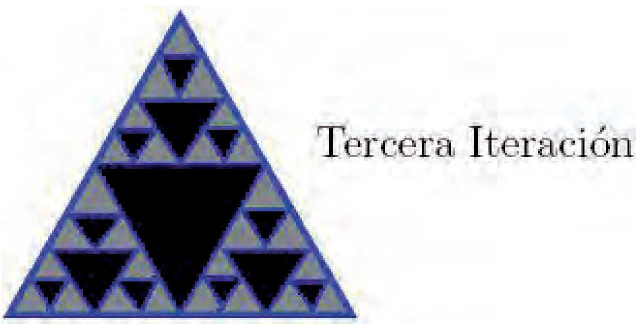

Figura 13: Ahora tenemos la tercera iteración en el triángulo equilátero.

ii. Denotemos $\{A_n\}_{n\geq 0}$ por la suma de las áreas de los triángulos dibujados en negro en la n-ésima iteración ($n\geq 1$) siendo $A_0=A$ el área del triángulo inicial. Calcula A_1, A_2, A_3.

iii. ¿Cuál supone que puede ser el término n-ésimo A_n, en función de A y de n?

iv. Calcule $\{A_n\}_{n\geq 0}$ cuando n tiende a infinito ($n \to \infty$).

Sugerencia: Recuerde que:

$$\lim_{n\to\infty} b^n = 0, \quad \text{si} \quad |b|<1$$

d) Podemos hacer una "comprobación geométrica" (no es una demostración) para la suma de los primeros números impares la cual proviene de la época de Pitágoras[9]. Veamos la figura 14:

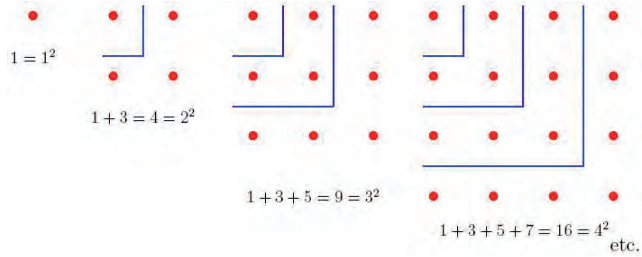

Figura 14: Comprobación geométrica de la suma de los primeros números impares.

En el cual se van formando cuadrados con esos puntos y en los lados del cuadrado hay n puntos ($n\geq 1$). Esta *construcción* geométrica sugiere el resultado n^2, es decir, si la suma de los primeros términos de la progresión aritmética es: $S_n=1+3+5+\ldots+(2n-1)$. Entonces, $S_n= n^2$. (Verificarlo)

Interpretaciones y Conclusiones

En el artículo pudimos hacer el análisis de algunos engaños causados por falacias y sofismas geométricos, en los cuales nuestros estudiantes aprenderán partiendo de situaciones netamente intuitivas, las cuales les servirán para plantear la solución en un plano analítico, el cual no siempre es fácil, pues desde tiempos inmemoriales el ser humano ha tenido problemas con la idea aunque sea intuitiva de infinito. El problema de infinito potencial planteado anteriormente es en muchos casos difícil de entender a primera vista, pero con el tiempo de meditación, mucha práctica mental se logra asimilar, logrando encontrar la solución en el infinito actual. Recomiendo la sabia escritura de Jiménez, D. ampliamente, siendo esta persona un ser excepcional y muy buen profesor, ayudando en el noble deber de la enseñanza y es referencia número uno en todos mis artículos. ■

Dedicatoria: Dedico estas reflexiones de aula a mi Madre Felipa García, a mis hermanos, muy especialmente Juan García y a todas las personas que me han ayudado desde mis comienzos, ayudándome a superar todas las dificultades: Suleima Acosta, Nelly Velásquez, Aurelena Rodríguez, Carmen Lozada (Karmela), Darwin Mendoza, Elvis Aponte y Henry Rodríguez. Además, las dedico a todas las personas amantes de la geometría y de las matemáticas. Así mismo agradezco a la UCLA y la UNA.

No estoy de acuerdo con tus ideas, pero defiendo tu sagrado derecho a expresarlas. Francois Marie Arouet Voltaire

NOTAS

1 Procepto es una traducción que usa Azcárate, C y Camacho, M. (2003), de la expresión original inglesa procept, que proviene de proceso (process) y de concepto (concept).

2 Es cuando se añaden (quitan) a la configuración inicial nuevos elementos geométricos (creando nuevas subconfiguraciones).

3 Esta historia es tomada de parcialmente de la página Web:

http://centros5.pntic.mec.es/ies.de.bullas/dp/matema/conocer/numpi.htm

4 Se encuentra entre los primeros matemáticos que emitieron opiniones dentro de la concepción de los intuicionistas, que es una de las escuelas del pensamiento matemático.

5 La palabra *intuición* proviene del latín "intuitio" de "in" que significa "en" y de tueri" que significa "ver". Su significado es el "conocimiento claro o inmediato de verdades que penetran en nuestro espíritu sin necesidad de razonamiento". "Es la captación inmediata y directa de un objeto por un sujeto". Debemos tener cuidado pues podemos caer en falacias geométricas.

6 El símbolo sumatoria P (Letra Griega Sigma) se utiliza para escribir de manera abreviada una suma. Por ejemplo si queremos escribir S $=1^2+2^2+...+n^2$utilizando la notación Σ la hacemos así:

$$S=\sum_{j=1}^{n} j^2$$

que se lee la suma o sumatoria de j^2 por j variando desde j=1hasta n. En lugar de utilizar el índice j, podemos usar otro índice cualquiera, por ejemplo:

$$S=\sum_{k=1}^{n} k^2=\sum_{h=1}^{n} h^2$$

7 Iterar significa repetir o reiterar. Iteración es la repetición de acciones análogas.

8 Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica se repite en diferentes escalas. El término fue propuesto por el matemático Benoît Mandelbrot en 1975. En muchos casos, los fractales pueden ser generados por un proceso recursivo o iterativo, capaz de producir estructuras auto-similares independientemente de la escala específica. Los fractales son estructuras geométricas que combinan irregularidad y estructura.

9 Nativo de la isla de samos en el Asia Menor (S. VI a. C). Fue el fundador, en Crotona (Sur de Italia) de la escuela Pitagórica a la cual se deben muchos aportes importantes a la matemática entre ellos el conocido Teorema de Pitágoras.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azcárate, C. & Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. Venezuela: *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. 10 (2), pp. 135-149.

Barreto, J. (2008a). Deducciones de las formulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos. Versión electrónica. *Revista Números* (69). Revista digital de educación matemática de la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas. Disponible en:

http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_02.php

Barreto, J. (2008b). Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Versión electrónica. *Revista Números* (69). Revista digital de educación matemática de la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas. Disponible en:

http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_03.php

Barreto, J. (2009a). Cuadratura, primera noción de área y su aplicación en la expresión del área de diferentes figuras geométricas como recurso didáctico en la extensión geométrica del teorema de Pitágoras. Versión electrónica. *Revista UNION.* Revista digital Iberoamericana de Educación Matemática (17). Disponible en: http://www.fisem.org/descargas/17/Union_017_007.pdf

Barreto, J. (2009b). Otras deducciones o extensiones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico. Versión electrónica. *Revista Números* (70). Revista digital de educación matemática de la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas. Disponible en:

http://www.sinewton.org/numeros/numeros/70/Articulos_01.pdf

Barreto, J. (2009c). Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica. Versión electrónica. *Revista Números* (70). Disponible en:

http://www.sinewton.org/numeros/numeros/71/Articulos_01.pdf

Jiménez, D. (2004). π la letra griega que los griegos no usaron. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*. (Vol. 9, No 1, pp. 103-117).

Jiménez, D. (2007). *Historia de la Matemática*: Una visión del Pitagorismo. TForMa. UDO. Cumana Estado Sucre.

Orellana, M. y Marqués, L. (1998). *Pensamiento Matemático y Modelando con Matemática*. MATEMÁTICA I (177). Módulo IV. UNA Caracas, Venezuela.

Orellana, M. (2000). *Pensamiento Matemático y Modelando con Matemática*. MATEMÁTICA II (179). Módulo IV. UNA Caracas, Venezuela.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de los Procesos Cognitivos en Geometría. *Relime*, 10 (2), 273-300. México: Publicación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Este artículo fue recibido en *Suma* en enero de 2010 y aceptado en mayo de 2011