

Medidas de altura: trigonometría con cuerda, metro y móvil

Proponemos una experiencia didáctica para tratar el bloque de semejanza y trigonometría en el último curso de enseñanza secundaria obligatoria. Analizamos cinco métodos distintos que los alumnos y alumnas trabajarán para estimar la altura del edificio del instituto a través de medidas indirectas que realizarán desde el patio. Discutimos la metodología de la actividad y el tratamiento de las competencias básicas. Presentamos además los guiones de la práctica.

Palabras Clave: Experiencia de aula, geometría, semejanza, medidas indirectas, secundaria.

Height measurements: trigonometry with a rope, tape, and mobile phone

We propose a didactic methodology to cover the topics of trigonometry and similarity in the final course of compulsory secondary education. We shall analyze five different approaches that the students must apply to measure the height of the building of their institute by using indirect measurements taken in the playground. We shall focus on the methodology and the treatment of the basic competencies. Finally, we also propose a practice guide of the activity.

Key words: Classroom experience, geometry, similarity, indirect measures, high school.

Introducción

La motivación de los estudiantes de secundaria es una tarea complicada a la que hoy día se destina una buena parte de los esfuerzos de los docentes y que, sin duda, se hace imprescindible para contribuir a lograr un aprendizaje significativo (Sánchez, 2004). Elaborar materiales y programaciones de aula que motiven e impliquen a nuestros alumnos de matemáticas es, por tanto, una necesidad en el actual marco del proceso de enseñanza-aprendizaje.

La aplicación de conceptos de semejanza y trigonometría a la resolución de problemas métricos en el mundo físico es uno de los contenidos fundamentales del cuarto curso de ESO en la opción B de Matemáticas. Habitualmente se lleva a cabo mediante la realización de problemas que aparecen en el libro de texto en los que se calculan alturas de supuestos árboles, torres, montañas o antenas. No parece fácil con ese planteamiento convencer al alumnado de la cotidianidad de las matemáticas y de su utilidad real. Pero además tampoco parece ésta una metodología que pueda resultar motivadora.

En este artículo proponemos una experiencia didáctica alternativa a los problemas de trigonometría de lápiz y papel men-

cionados. En concreto, los alumnos estimarán la altura del edificio del instituto a través de medidas indirectas que realizarán desde el patio. Llevar a cabo una clase de matemáticas fuera del aula no sólo constituye un elemento dinamizador y motivador, con una alta implicación por parte del alumno, sino que además transmite una idea más cercana de las matemáticas y permite señalar su utilidad en la vida real (Marcos y Carpintero, 2001; Ramírez et al., 2006).

La actividad propuesta parte de un problema –determinar la altura del edificio del instituto– abierto en el sentido de que no se conoce ningún dato a priori, y que, a diferencia de los ejercicios tipo de los libros, puede abordarse de múltiples maneras. Es ya clásica la fábula del barómetro y del edificio de A. Calandra (1961, 1968) en la que un profesor pide a un alumno de física que determine la altura de un edificio con ayuda de un barómetro. La respuesta convencional sería medir la diferencia de presiones entre el suelo y la azotea y

Manuel Feito Guzmán

IES Santa María de los Baños, Fortuna (Murcia)

Joaquín Martínez Ramírez

IES Miguel Hernández, Alhama de Murcia (Murcia)

luego utilizar la ley física $altura = densidad\ del\ aire \times gravedad \times diferencia\ de\ presiones$. Sin embargo, el alumno del texto va enumerando varias respuestas alternativas, también correctas, tales como medir el tiempo de caída del barómetro lanzado desde la azotea o utilizar el barómetro como péndulo y medir su periodo para, aplicando distintas leyes físicas en cada caso, resolver el problema. Y claro, el profesor acaba dándole al heterodoxo alumno una buena nota.

En la actividad de aula (patio) que proponemos incidimos en la potencia de las herramientas matemáticas que los alumnos estudian en clase para resolver un problema de la vida real palpable y en cómo somos capaces de plantear distintos caminos de resolución que, dependiendo de las circunstancias concretas, podrán ser más o menos útiles.

En el siguiente apartado describimos en detalle la metodología que se seguirá en la actividad práctica. En el tercer apartado presentamos los materiales didácticos que se suministrarán al alumno en donde se desarrollan cinco métodos distintos de afrontar el problema. Abordaremos también, el tratamiento de las competencias básicas y, finalmente, concluiremos con una discusión general y las conclusiones del trabajo.

Descripción de la actividad y metodología

Como hemos comentado en la introducción, la actividad propuesta consiste en resolver el problema de cómo medir la altura de un edificio utilizando diferentes métodos, en particular, propondremos cinco métodos distintos.

Para ello proporcionaremos a los alumnos y alumnas un guión de la práctica en el que se explica el procedimiento de medida a seguir. En ese guión anotarán los datos que han obtenido experimentalmente, que después sustituirán en la expresión que proporcionamos para obtener la altura. En el guión de cada método también se encuentra un apartado en el que se fundamenta analíticamente el procedimiento seguido.

La actividad está planteada para que se lleve a cabo por grupos de cuatro alumnos. Esta metodología elegida fomenta el trabajo cooperativo, tan importante en el ámbito científico actual. Los grupos serán heterogéneos, es decir, estarán formados por alumnos que presenten una mayor dificultad en cuanto al manejo de los procedimientos junto con otros con menos dificultades. Se asignarán los distintos métodos a los grupos, que irán rotando al siguiente método conforme finalicen las medidas de cada uno de ellos.

Los estudiantes medirán ángulos y longitudes. Para ello utilizarán materiales sencillos y cotidianos (cuerda, flexómetro, teléfono móvil) con la idea de que perciban la simplicidad de la toma de medidas y la facilidad de determinar alturas y dis-

tancias en otras circunstancias de la vida real a las que se tuvieran que enfrentar.

La actividad de medida en sí se realizará en una sola sesión. Durante el desarrollo de la misma el profesor actuará como coordinador y orientador de los diferentes grupos, e intervendrá desbloqueando y animando a los alumnos siempre que lo considere necesario. Previamente conviene haber dedicado algunos minutos de la clase del día anterior a comentar brevemente en qué consistirá el trabajo de campo, pero sobre todo esa sesión previa es imprescindible para que los alumnos tengan el guión y puedan *pensarlo* en casa. La sesión posterior a la de medida se dedicará al análisis y discusión de la experiencia. La evaluación de la actividad se llevará a cabo a través de una puesta en común de los resultados obtenidos por los distintos grupos.

Con esta propuesta de trabajo se consigue motivar a nuestros alumnos que tienen que implicarse en ella desde el principio, diferenciándose así, como ya indicamos, de una sesión tradicional, en la que primero se introducen los contenidos y luego se resuelven mecánicamente una y otra vez ejercicios iguales.

Materiales didácticos

Discutimos a continuación en detalle los cinco métodos usados para la determinación de la altura del edificio del instituto y los materiales didácticos para llevarlos a cabo.

Los instrumentos de medida utilizados son:

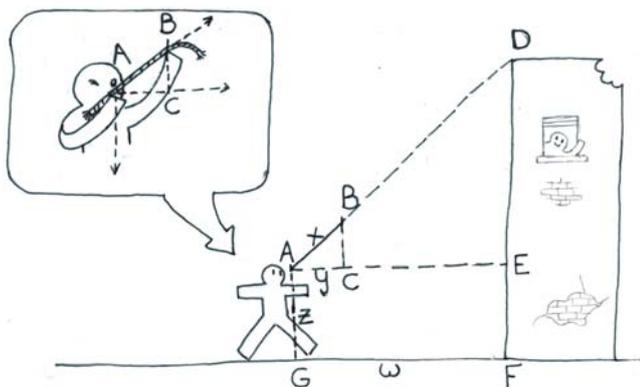
- i) un trozo de cuerda de una longitud aproximada de un metro,
- ii) un flexómetro, preferentemente de cinco o más metros,
- iii) un goniómetro que se entrega en un folio junto al guión de prácticas (basta fotocopiar un transportador escolar),
- iv) un teléfono móvil con cámara digital y
- v) un ordenador que se utilizará para completar uno de los procedimientos en casa.

Aparte del guión de prácticas que se entregará previamente al alumnado se usará también un lápiz o bolígrafo y una calculadora científica (por ejemplo la del móvil).

A la hora de desarrollar el material se ha tenido en cuenta que sea ameno para el alumno sin que esto suponga pérdida de rigor. En las ilustraciones explicativas del guión de la práctica los adornos aparecen en un tono más claro, como si estuvieran a otro nivel, para no restar importancia a los datos relevantes y que éstos sean fácilmente apreciables.

Guión de prácticas: Método I

Lo primero que hay que hacer es colocarse a una distancia adecuada del edificio y *apuntar* con la cuerda a la parte superior del edificio como se indica en el esquema:



Hay que medir directamente con el metro las longitudes (mira el esquema) $x=AB$, $y=AC$, $z=AG$ y $w=GF$. Apunta las medidas aquí:

$x=$ $z=$
 $y=$ $w=$

Para obtener la altura del edificio, h , basta aplicar la fórmula siguiente:

$$h = z + w \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1} \quad (1)$$

Sustituye los datos medidos y opera:

$h =$

Pero... ¿de dónde viene esa fórmula? Veámoslo.

La altura del edificio es (ve mirando el dibujo)

$$h = DE + EF \quad (2)$$

Por un lado tenemos $EF=AG$, que es la longitud z que medimos directamente:

$$EF = z \quad (3)$$

Por otro lado vamos ahora a determinar DE . Los triángulos ABC y ADE son semejantes, ya que están en posición de Tales. Por lo tanto, sus lados son proporcionales:

$$DE/BC = AE/AC, \text{ de donde } DE/BC = w/y$$

Además, BC lo obtenemos de aplicar el Teorema de Pitágoras al triángulo ABC : $x^2 = y^2 + BC^2$. Así, para la proporción anterior tenemos

$$\frac{DE}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{w}{y} \Rightarrow DE = \frac{w\sqrt{x^2 - y^2}}{y} \quad (4)$$

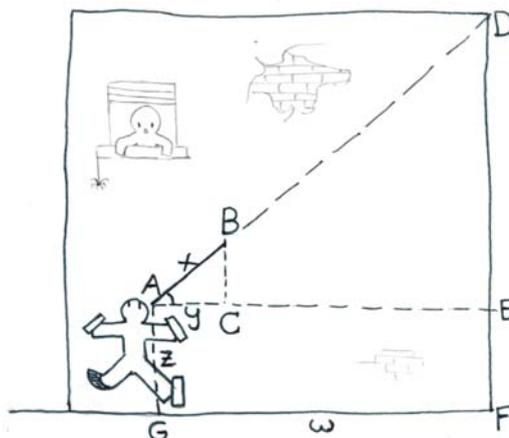
Llevando las ecuaciones (3) y (4) a la ecuación (2) queda para la altura del edificio:

$$h = \frac{w\sqrt{x^2 - y^2}}{y} + z$$

Si queremos que la ecuación anterior quede algo más simplificada basta meter la y dentro de la raíz (como y^2 , claro) y obtenemos al final la ecuación (1) que queríamos deducir.

Guión de prácticas: Método II

Es similar al método I, pero esta vez vamos a situarnos sobre la pared del edificio. Con la cuerda apuntaremos hacia una de las esquinas superiores del edificio como se ve en el esquema:



Hay que medir directamente con el metro las longitudes $z=AG$ y $w=GF$, y con el transportador el ángulo A (date cuenta de que ahora las medidas pueden ser distintas que en el método I).

Apunta los resultados de las mediciones aquí:

$z =$ $w =$ $A =$

Para obtener la altura del edificio, h , basta aplicar la fórmula siguiente:

$$h = z + w \operatorname{tg} A$$

Sustituye y opera:

$$h =$$

Pero... ¿de dónde viene esa fórmula? Veámoslo.

Fijándonos en el triángulo ADE , obtenemos para la tangente del ángulo A :

$$\operatorname{tg} A = DE/AE, \text{ de donde } \operatorname{tg} A = DE/w$$

y despejando de la ecuación anterior tenemos $DE = w \operatorname{tg} A$.

La altura del edificio es $h = EF + DE$, es decir,

$$h = z + w \operatorname{tg} A \quad (5)$$

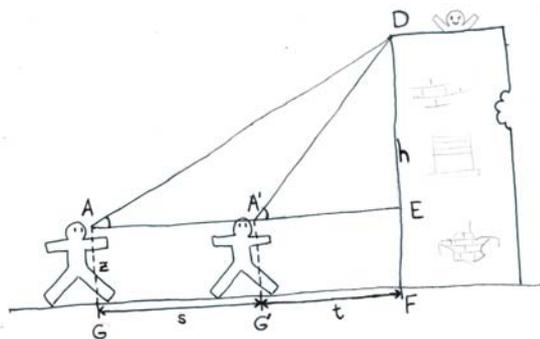
tal y como queríamos demostrar. De hecho, esta ecuación (5) es equivalente a la (4) que vimos en el método I. En efecto, si nos fijamos en el triángulo ABC tenemos $\operatorname{tg} A = BC/AC$, donde $BC^2 = x^2 - y^2$. (sale por Pitágoras como en el método I) y donde $AC = y$. Así pues,

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{y}$$

Si sustituimos esta última ecuación en la ecuación (5) obtenemos, tras operar, la ecuación (1).

Guión de prácticas: Método III

Nos situamos a una distancia del edificio y apuntamos con la cuerda a la parte superior del edificio. Luego, repetimos lo mismo pero desde una distancia mayor. Ver el esquema adjunto.



Hay que medir directamente con el metro las longitudes (mira el esquema) $z = AG$ y $s = GG'$ y con el transportador los ángulos A y A' . Apunta las medidas aquí:

$z =$ $A =$
 $s =$ $A' =$

Para obtener la altura del edificio, h , basta aplicar la fórmula siguiente:

$$h = z + \frac{s}{\frac{1}{\operatorname{tg} A} - \frac{1}{\operatorname{tg} A'}}$$

Sustituye los datos medidos y opera:

$$h =$$

Pero... ¿de dónde viene esa fórmula? Veámoslo.

En el triángulo ADE tenemos

$$\operatorname{tg} A = \frac{DE}{AE} \Leftrightarrow \operatorname{tg} A = \frac{DE}{s+t} \quad (6)$$

En el triángulo $A'DE$ tenemos

$$\operatorname{tg} A' = \frac{DE}{A'E} \Leftrightarrow \operatorname{tg} A' = \frac{DE}{t} \quad (7)$$

Las ecuaciones (6) y (7) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (DE y t son las incógnitas, mientras que $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{tg} A'$ y s son números que conocemos puesto que los hemos medido directamente). Resolviendo este sistema [despejando t de la ecuación (7) y sustituyéndolo en la ecuación (6); intenta hacer las operaciones] obtenemos

$$DE = \frac{s}{\frac{1}{\operatorname{tg} A} - \frac{1}{\operatorname{tg} A'}}$$

La altura del edificio es $h = EF + DE$, es decir,

$$h = z + \frac{s}{\frac{1}{\operatorname{tg} A} - \frac{1}{\operatorname{tg} A'}}$$

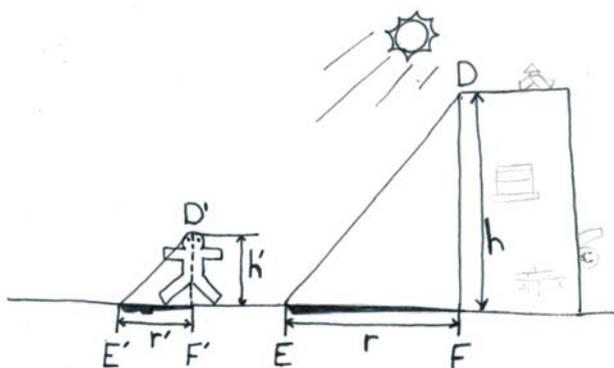
que también podemos escribir como

$$h = z + \frac{s}{\operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} A'}$$

Este método III tiene la ventaja sobre los anteriores de que no necesitamos tener accesible el edificio. Nos valdría, por ejemplo, para medir desde el patio del instituto la altura de un edificio que estuviera fuera sin tener que ir hasta la base del edificio.

Guión de prácticas: Método IV

Probablemente este método es el más sencillo. Se trata, por un lado, de medir la sombra que proyecta el edificio (para ello tiene que hacer sol y que la hora del día sea adecuada para que la sombra se sitúe en nuestra zona de medida) y, por otro lado, medir la altura de una persona y su sombra. Por lo tanto, hay que obtener las longitudes (mira el esquema) $r = EF$, $r' = EF'$ y $h' = D'F'$.



Mide con el metro y anota los valores:

$$r = \quad r' = \quad h' =$$

Para obtener la altura del edificio, h , basta aplicar la fórmula

$$h = rh'/r'$$

Sustituye y opera:

$$h =$$

Pero... ¿de dónde viene esa fórmula? Veámoslo.

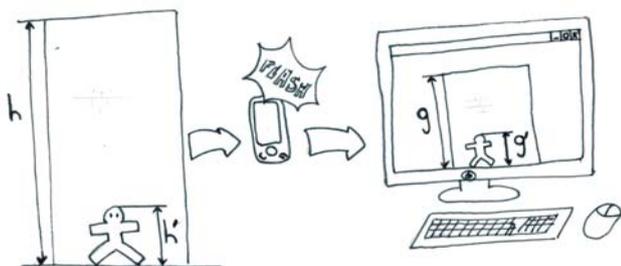
Los triángulos EDF y $E'D'F'$ son semejantes (por el primer criterio de semejanza) y por lo tanto sus lados son proporcionales:

$$DF/D'F' = EF/E'F', \text{ de donde } h/h' = r/r'$$

Si despejamos h obtenemos la fórmula utilizada.

Guión de prácticas: Método V

Sítuate junto a la pared del edificio y mide tu altura, h' . Luego, que te hagan una foto (con la cámara del móvil por ejemplo) en la que se te vea a ti y al edificio completo. Esa foto la puedes pasar en casa a la pantalla del ordenador y medir allí con una regla la altura de la imagen del edificio, g , y la tuya, g' .



Apunta aquí las medidas que has hecho:

$$g = \quad g' = \quad h' =$$

Para obtener la altura del edificio, h , basta aplicar la fórmula

$$h = gh'/g'$$

Sustituye los datos medidos y opera:

$$h =$$

Pero... ¿de dónde viene esa fórmula? Veámoslo.

La realidad y la foto son figuras semejantes (una es una copia de la otra a escala). Por lo tanto sus longitudes son proporcionales: $h/g = h'/g'$. Despejando h llegamos a la fórmula deseada.

Competencias básicas

Que el alumno sea competente y sepa desenvolverse en los diferentes aspectos de la vida es uno de los objetivos del actual marco educativo (MEC, 2006). A continuación vamos a ver cómo las diferentes competencias se ven favorecidas con la práctica propuesta y la metodología de trabajo.

Aparte de la contribución evidente a la *competencia matemática*, la discriminación de formas, relaciones y estructuras geométricas, y la capacidad para transferir formas entre el plano y el espacio contribuyen a profundizar en la competencia en el *conocimiento y la interacción con el mundo físico*. Además, la geometría es parte integral de la expresión artística de la humanidad al ofrecer medios para describir y comprender el mundo que nos rodea (*competencia cultural y artística*). La realización de la actividad en el patio es un punto clave en esta dirección.

Con esta actividad se desarrollan la *competencia social y ciudadana* y la *competencia en comunicación lingüística*, ya que los alumnos y alumnas tienen que comentar, discutir y ponerse de acuerdo para repartirse las tareas de las mediciones, así como para analizar los errores y aciertos cometidos en los procesos de resolución del problema planteado con espíritu constructivo.

En esta misma línea, los procesos de resolución del problema que aquí se lleva a cabo contribuyen de forma especial a fomentar la *autonomía e iniciativa personal* porque se utilizan para planificar estrategias, y hacen hincapié en la idea de que se puede llegar a una misma solución utilizando métodos o caminos diferentes. El mero hecho de que sean los alumnos los que obtengan y manipulen la información consolida la adquisición de destrezas involucradas en la *competencia de*

aprender a aprender tales como la curiosidad de plantearse preguntas, identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles ante una misma situación, la toma de decisiones con la información disponible o la habilidad para comunicar con eficacia los resultados del propio trabajo.

Finalmente, desde la experiencia propuesta también se contribuye a mejorar el *tratamiento de la información y competencia digital* de los estudiantes. En particular, en el último de los métodos geométricos proponemos que el alumno use la cámara digital de su teléfono móvil y luego el ordenador de casa como herramientas matemáticas útiles para resolver el problema planteado. Además, esta experiencia también puede servir para introducir el uso de la calculadora como medio de obtener valores de las funciones trigonométricas. Se fomentará el uso de la calculadora científica incorporada en la mayoría de los móviles de nuestros alumnos.

Discusión y conclusiones

En este trabajo hemos propuesto una experiencia didáctica para el tratamiento de la unidad de semejanza y trigonometría de cuarto curso de ESO. Dicha experiencia está diseñada para ser realizada en el patio del instituto, lo que constituye un elemento motivador del alumnado. La medida de la altura del edificio del instituto nos permite acercar los conceptos abstractos de la trigonometría al mundo real y mostrar la utilidad de las matemáticas.

Hemos visto como la metodología seguida contribuye al desarrollo de las competencias básicas del currículo, especialmente a la competencia en el conocimiento e interacción con el mundo físico, el tratamiento de la información y competencia digital, la competencia para aprender a aprender y, por supuesto, la competencia matemática.

La experiencia no se circunscribe únicamente a la actividad en el patio, sino que, como ya indicamos, tras la sesión de

medida se prevé una sesión de aula completa para analizar, discutir y poner en común los diferentes métodos y resultados obtenidos. Esta sesión es importante para concluir con éxito la actividad. En particular se hará énfasis en la deducción de las fórmulas empleadas. Por otra parte, esta sesión en el aula es fundamental para insistir en dos ideas básicas:

Primera: en el mundo real cuando nos enfrentamos a un problema (métrico en nuestro caso) uno debe plantearse interrogantes del tipo ¿qué mido?, ¿para qué mido?, ¿cómo lo mido?, ¿puedo resolver el problema de otra forma más sencilla o más precisa? Los problemas del mundo real son mucho más abiertos y más ricos que en los libros.

Y segunda: aunque los métodos de medida utilizados son en exceso simples, constituyen la base de mecanismos más sofisticados como otros que se usan a diario en la ingeniería (como esos tripodes grandes llamados teodolitos que los alumnos han visto en las obras de su calle...)

Más allá de esta última sesión integradora, los resultados podrán retomarse posteriormente a lo largo del curso. Por ejemplo, una cuestión relacionada en las pruebas escritas podría ser: ¿cómo medirías la altura de una montaña –cima y base inaccesibles–? También podemos retomar los resultados obtenidos por los distintos grupos al trabajar la unidad didáctica de estadística –tratamiento de datos–.

Esperamos que este trabajo, y en particular el guión de práctica presentado, sirva para animar a docentes y alumnos a la resolución de problemas con enfoques abiertos. ¡Si un barómetro puede servir para medir la altura de un edificio de mil maneras, un trozo de cuerda y un metro nos ofrecen infinitas posibilidades! ■

Agradecemos sinceramente a María Ángeles Cano Sánchez su colaboración en la preparación de las ilustraciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Sánchez Delgado, P. (Coord.) (2004). *El proceso de enseñanza y aprendizaje*. Madrid: ICE, Universidad Complutense de Madrid.
Ministerio de Educación y Ciencia, RD 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de Educación Secundaria.

Marcos Cabellos, A., Carpintero Montoro, E. (2001). Actividades matemáticas fuera del aula: Cuaderno de Campo. *Suma*, 38, pp. 73-83.
Ramírez Uclés, R., Soriano Poyatos, J.M., Ávila Flores, J. (2006). A tomar viento fresco: matemáticas en el patio. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 65, pp. 265-272.

Este artículo fue recibido en *Suma* en julio de 2010 y aceptado en diciembre de 2010.