

Cálculo de la dimensión fractal del contorno de una ciudad como trabajo de investigación en secundaria

Presentamos una actividad que relaciona los fractales, y más concretamente la dimensión fractal, con las ciudades. Se realiza una breve incursión en el concepto de fractal y dimensión fractal para pasar posteriormente a una ejemplificación y una propuesta de trabajo en el que mostramos un posible orden en los pasos a seguir para estimar la dimensión fractal del contorno de una ciudad. Mostramos los resultados obtenidos por alumnos de 4º de ESO en el cálculo de la dimensión fractal del contorno de las localidades a las que pertenecen los alumnos del centro con el objetivo de comparar la “rugosidad” de todas ellas.

Palabras Clave: Fractal, dimensión fractal, innovación didáctica, investigación, secundaria y bachillerato.

Calculation of fractal dimension of the outline of a city high school research paper

We present an activity that relates fractals, and more specifically the fractal dimension, with the cities. It offers a brief incursion into the concept of fractal and fractal dimension, and afterwards, it offers an example and a work proposal, indicating a possible order of the steps required to estimate the fractal dimension of the outline of a city. We show the results obtained by the students of 4º ESO on the calculation of the fractal dimension of the localities to which the students belong to, with the aim to compare the roughness of the contour of all of them.

Key words: Fractal, fractal dimension, educational innovation, research, secondary and high school.

En memoria de Benoît Mandelbrot

Introducción

Desde hace sólo unas décadas los fractales han aparecido y se han hecho hueco entre nosotros con multitud de aplicaciones.

Presentamos una actividad que relaciona los fractales, y más concretamente la dimensión fractal, con las ciudades. Es necesario unos ciertos conocimientos en el concepto de fractal y dimensión fractal para poder realizar la actividad, pero seguro que el esfuerzo merece la pena al comprobar que estamos “rodeados” por estos entes matemáticos que nos pueden ayudar a conocer nuestro entorno.

Para ello realizaremos una breve incursión en el concepto de fractal y dimensión fractal, pasando posteriormente a una propuesta de trabajo en el que mostramos un posible orden en los pasos a seguir para estimar la dimensión fractal del contorno de una ciudad. Para facilitar el trabajo mostramos una ejemplificación con la ciudad de La Unión (Murcia) como consecuencia de preparar una actividad para el Día escolar de las Matemáticas 2009¹, que tuvo como tema “La

ciudad y las Matemáticas”, y de la elaboración de materiales para la VIII Semana Matemática²:



que realizamos durante el curso 2009-2010 en el IES Sierra Minera de dicha localidad. Mostramos los resultados obtenidos por alumnos de 4º de ESO en el cálculo de la dimensión fractal de las localidades a las que pertenecen los chicos y chicas del centro con el objetivo de comparar la “rugosidad” del contorno de todas ellas.

Concepto de Fractal

Las formas que se encuentran en el mundo real carecen de la simplicidad de una línea, un cuadrado o un cubo: poseen una

Joaquín Comas Roqueta

IES Sierra Minera. La Unión (Murcia)

María Jesús Herrera Ponz

IES Thiar. Pilar de la Horadada (Alicante)

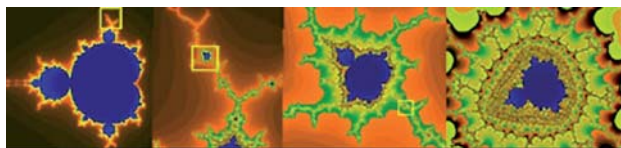
riqueza de detalles, complejidad e irregularidad que no pueden describirse con la Geometría clásica, la Geometría de Euclides. Su descripción por medio de métodos tradicionales es insuficiente, lo que ha motivado la búsqueda de nuevas formas de analizar y describir objetos, ya sean reales o abstractos.

Como respuesta a esta búsqueda, Benoît Mandelbrot desarrolló una nueva geometría de la naturaleza que según sus palabras “permite describir muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean, dando lugar a teorías coherentes, identificando una serie de formas que llamo fractales” (Mandelbrot, 1977). Esta nueva geometría intenta cuantificar la textura o rugosidad de los objetos, expresándola mediante valores numéricos.



Benoît Mandelbrot

Mandelbrot comenzó a aplicar esta nueva geometría en una serie de campos, y su camino ha sido seguido por numerosos investigadores que se han interesado en su trabajo, promoviendo la aplicación de la geometría fractal a situaciones concretas.



Inmersión en el fractal de Mandelbrot

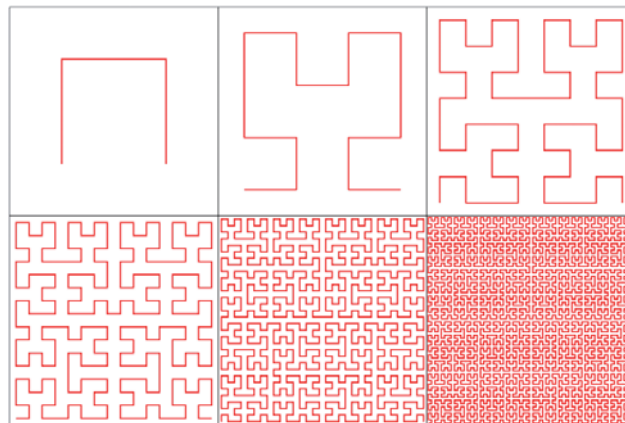
Sin entrar en una definición formal de lo que es un fractal, vamos a enumerar sus principales características:

- Un fractal tiene una estructura fina, es decir, podemos encontrar la estructura en escalas arbitrariamente pequeñas.
- Un fractal es demasiado irregular para ser descrito con la Geometría tradicional, tanto local como globalmente.
- Con frecuencia un fractal tiene una cierta forma de auto-semejanza, quizás aproximada o estadística.
- En general, la “dimensión fractal” es mayor que su dimensión topológica.

El campo de aplicación de la geometría fractal es tan amplio que abarca desde la física, biología, medicina, geografía, mineralogía, química, hasta la generación de imágenes cinematográficas y compresión de imágenes, por citar sólo algunos ejemplos. A medida que los investigadores de las diferentes disciplinas conocen la geometría fractal, mayores son las aplicaciones de ésta.

Dimensión Fractal

La noción de “dimensión fractal” provee una forma de medir la “rugosidad” de una curva. Normalmente se consideran a las líneas como de dimensión 1. Sin embargo, una curva rugosa que recorra una superficie, en el extremo puede ser tan rugosa que efectivamente llene la superficie en la cual se encuentra, en cuyo caso tendría dimensión 2, como por ejemplo la curva de Hilbert.



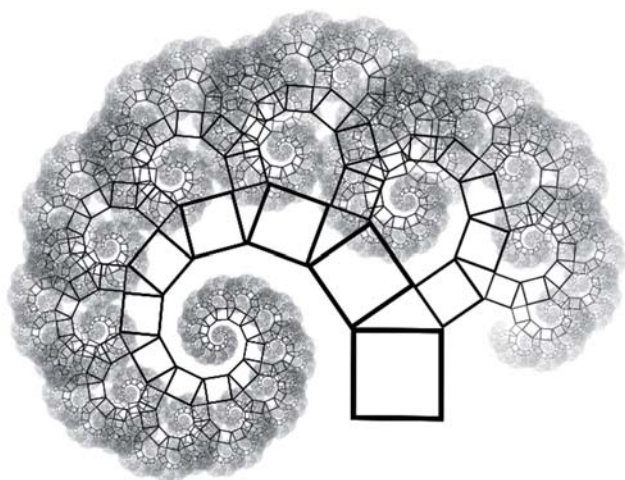
Curva de Hilbert

Se puede pensar por lo tanto en la rugosidad como en un incremento de la dimensión: una curva rugosa tiene dimensión entre 1 y 2, mientras que una superficie rugosa tiene dimensión entre 2 y 3. Desde este punto de vista, rectas y planos pueden pensarse como casos límite. En una curva, la dimensión fractal es un número que caracteriza la forma en la

cual la longitud medida entre dos puntos dados crece mientras la escala decrece.

Un fractal determinista, en cualquier escala de observación, dará el mismo valor de dimensión fractal, o sea, es perfectamente autosemejante. Pero, el contorno de una ciudad no es un fractal determinista, con lo que la comprobación de auto-semejanza no registrará valores de dimensión fractal idénticos, aunque podemos admitir, al encontrar valores similares, que la forma muestra propiedades análogas a la autosemejanza fractal. Esto es en parte debido a que la morfología de una ciudad es el resultado de una multitud de procesos físicos y sociales. Estos incluyen la tecnología de la construcción, patrones de tenencia de la tierra, el tamaño de los terrenos con construcciones, la demanda de espacios residenciales, la movilidad de la población, y la eficiencia y disponibilidad de la tecnología de los transportes.

Todos estos procesos se manifiestan a diferentes escalas, por ejemplo, las tecnologías de construcción se manifiestan a escalas relativamente pequeñas, y las de transporte a escalas mayores. Se puede concluir razonablemente que esos procesos se reflejen en el contorno de la ciudad, y por lo tanto en su irregularidad y dimensión fractal.



Ejemplo de fractal determinista: Árbol Pitagórico

Propuesta de trabajo

Con el objetivo de calcular la rugosidad del contorno de una ciudad (consideramos dicho contorno como un fractal aleatorio o estadístico) se pueden aplicar técnicas de geometría fractal, en particular estimaciones de la dimensión fractal del contorno de la ciudad.

Para la obtención de los contornos de la ciudad se emplea el análisis visual de imágenes por satélites (en nuestro caso hemos utilizado el programa gratuito Google Earth).

Una vez obtenida la imagen por satélite se digitaliza el contorno con un programa de dibujo y se debe pasar a imagen binaria en formato TIFF o BMP.

En este tipo de análisis, se encuentran problemas usuales de definición para determinar el límite entre la ciudad y su entorno, y para ello es necesario aplicar ciertas reglas de aproximación. Por lo general, se excluyen parcelas y otros terrenos de uso rural cerca del borde, pero grandes parcelas que forman parte de establecimientos industriales se incluyen solamente si existen desarrollos urbanos próximos.

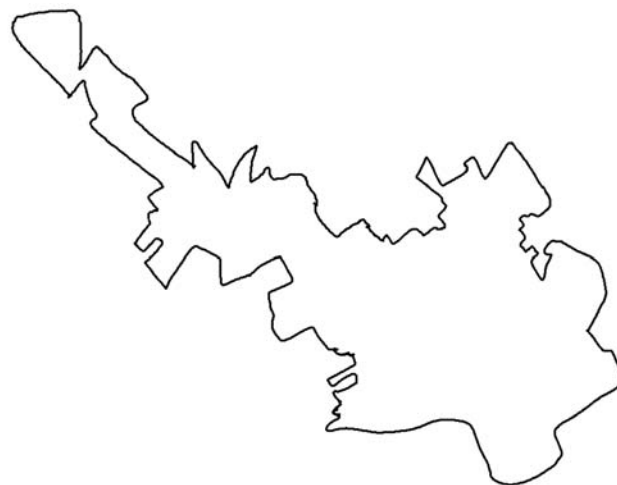
Cada uno de los contornos obtenidos es una curva de la que se puede calcular computacionalmente una estimación de la dimensión fractal mediante el método de Conteo de Cajas³ (Box Counting), utilizando para ello el programa Fractalyse desarrollado por el Research centre Théma (CNRS-Université de Franche-Comté) y que se puede descargar gratuitamente desde la página <http://www.fractalyse.org/en-home.html>. Podemos encontrar otros programas como ImageJ desarrollado por Wayne Rasband del National Institutes of Health.

Actividad paso a paso

1. Conocer los conceptos de fractal y de dimensión fractal. Para ello se pueden consultar el visionado del vídeo de la colección *Más por Menos*: "Fractales. La Geometría del Caos" e innumerables páginas web como las que hemos seleccionado:
 - <http://www.arrakis.es/~sysifus/>
 - <http://coco.ccu.uniovi.es/geofractal/>
 - <http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates23/opciones/investigacion/fractales/fractales.htm>
 - <http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates56/opciones/investigaciones%20matematicas%200506/Fractales/index.htm>
2. Establecer el objetivo del trabajo: estimar la dimensión fractal del contorno de la localidad con el propósito de poder tener información sobre su "rugosidad". Para ello puede ser conveniente revisar la ejemplificación que se presenta más adelante sobre la localidad de La Unión (Murcia).
3. Obtener una imagen por satélite de la localidad a la menor escala en que se pueda ver todo su contorno. Para ello se pueden utilizar los programas Google Maps o Google Earth.
4. Utilizar un programa de dibujo (nosotros hemos utilizado el programa Paint Shop Pro 5) para seleccionar el contorno de la localidad, quedarnos únicamente con dicho contorno (mediante el uso de capas) y pasar la imagen a formato bmp con una profundidad de dos colores (así lo

requiere el programa informático que calcula la dimensión fractal).

5. Ejecutar el programa Fractalyse, cargar la imagen obtenida, y seleccionar "Analyse/Box" y dentro del menú emergente el tamaño de Caja como exponencial y el algoritmo tipo rejilla. Obtendremos entre otros datos la dimensión fractal (dim) buscada.
6. Reflexionar sobre la "rugosidad" de la localidad revisando todos los datos obtenidos y comparando la dimensión con la de otras localidades.
7. Completar el estudio trabajando con las coordenadas geográficas del lugar, condiciones orográficas e información de interés sobre la localidad.



Contorno de La Unión

En el paso 5, ejecutamos el programa Fractalyse y cargamos la imagen del contorno obtenida.

Ejemplificación: dimensión fractal de La Unión (Murcia)

Los pasos 1 y 2 son preparatorios y en nuestro caso lo hemos trabajado con los alumnos tanto en clase como en casa.

En el paso 3, utilizando el programa Google Earth obtenemos la siguiente imagen:



Vista de La Unión

En el paso 4, utilizando un programa de dibujo que permita trabajar con capas, podemos obtener una imagen al remarcar el contorno. Esto conlleva un cierto grado de subjetividad para establecer la curva que determina el contorno y conviene previamente establecer qué entendemos por contorno (si se incluye un polígono industrial, o una finca algo alejada...).

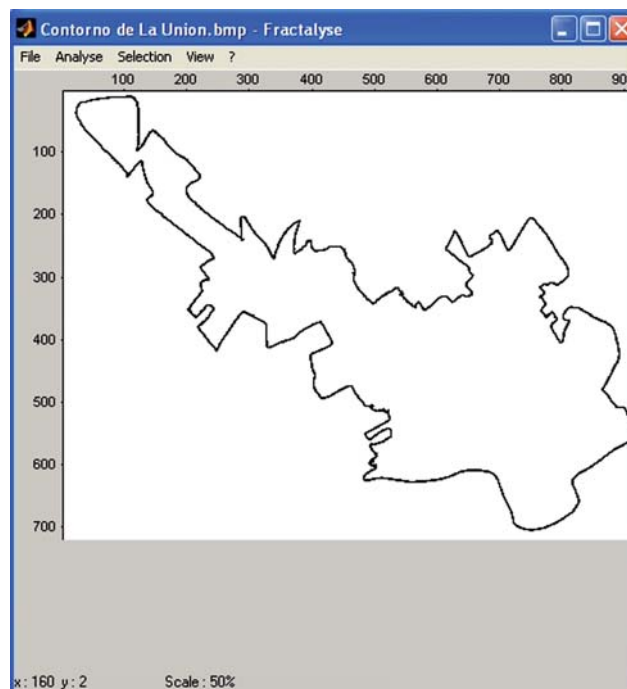
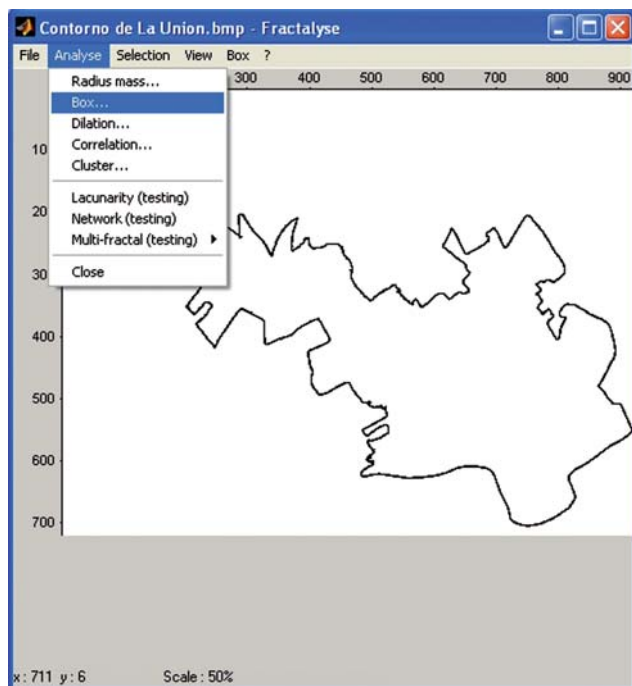


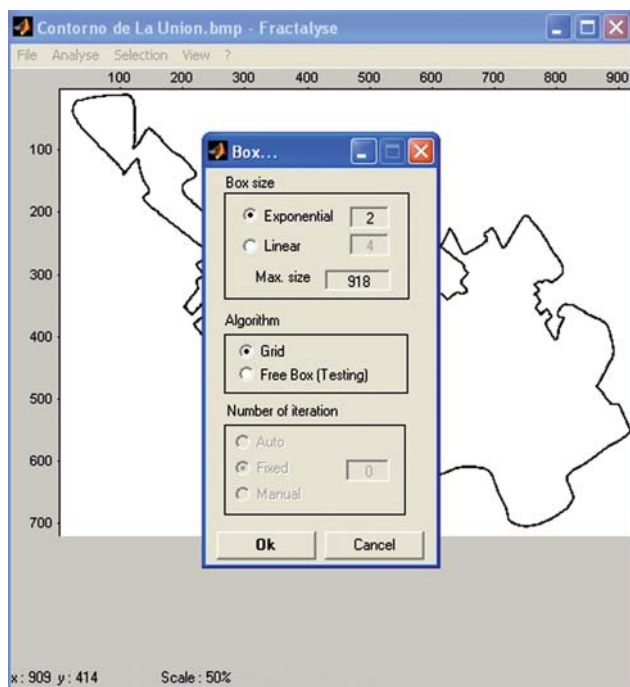
Imagen del contorno de La Unión cargada en el programa Fractalyse

Seleccionamos "Analyse/Box".



Selección del tipo de estimación

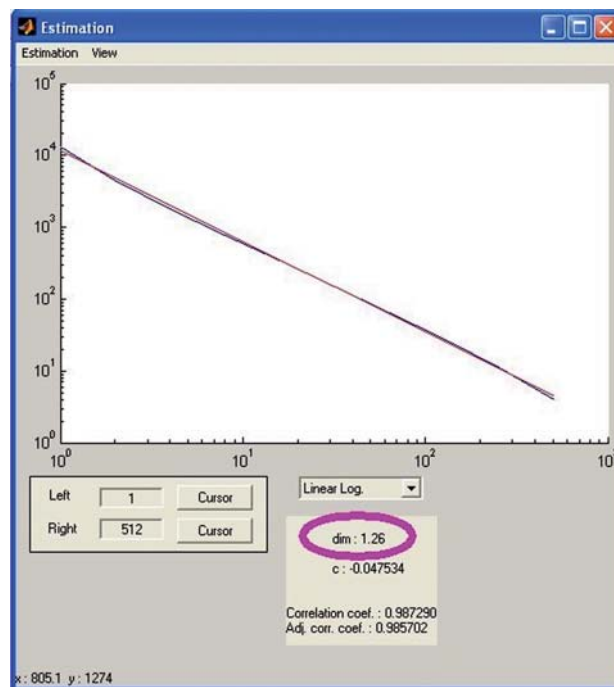
Dentro del menú emergente seleccionamos el tamaño de Caja como exponencial (Exponential) y el algoritmo tipo rejilla (Grid). Seleccionamos OK.



Selección de parámetros del tipo de estimación

Obtendremos entre otros datos la estimación de la dimensión fractal (dim) del contorno de La Unión que es 1,26.

En el paso 6 podemos concluir si comparamos con las dimensiones de otros localidades que La Unión tiene una un contorno algo rugoso, pero no en exceso.



Resultados obtenidos con la estimación

En el paso 7 vemos que la fotografía utilizada fue tomada por el satélite el 20 de julio de 2007 y la hemos "realizado" a 910 metros de altura. Las coordenadas geográficas de la localidad (tomando como punto de referencia la zona central de la localidad) son 37° 37' Norte y 0° 53' Oeste.

La Unión es un municipio de la Región de Murcia con unos 16.000 habitantes situado al sureste de la región, entre las playas del Mar Menor y el Mar Mediterráneo que goza de un paisaje único y distinto. Sus montañas pintadas de plomo y plata, mezcladas con pinceladas de hierro, manganeso, cinc, blenda o pirita, confieren al paisaje un estilo peculiar, marcado intensamente por la huella que la industria minera ha dejado a lo largo de siglos de actividad. Pertenece a la Comarca del Campo de Cartagena y al partido jurídico de Cartagena. El termino municipal está estructurado en dos pedanías además de la propia ciudad de La Unión, Roche y Portmán.

La economía de La Unión se basó durante mucho tiempo en la explotación de las minas de su sierra. Tras larga decadencia, nuevas iniciativas y procedimientos de explotación animaron la minería hacia los años 60. Agotadas o abandonadas por

poco rentables las distintas explotaciones, La Unión se ha ido convirtiendo en una ciudad dormitorio de Cartagena. También tiene relativa importancia para La Unión el turismo, por su cercanía a las playas del Mar Menor. Asimismo, ha alcanzado celebridad internacional, a partir de su misma institución en 1960, el Festival del Cante de las Minas, donde cada año cobran nueva vida los cantes de la región (i.e., taranta, minera, cartagenera, murciana, etc.) junto a los demás subgéneros del flamenco *jondo*.

Investigaciones realizadas por los alumnos

Como ya indicamos anteriormente, la experiencia que presentamos surgió ante la coincidencia de preparar una actividad para el Día escolar de las Matemáticas 2009 y de la elaboración de materiales para la VIII Semana Matemática:



Llevábamos bastante tiempo queriendo realizar investigaciones con los alumnos que tuviesen como tema central los fractales y que fuesen en cierta medida novedosas. Estuvimos barajando varias posibilidades y después de invertir un buen número de horas en ver cuáles podíamos ofrecer a alumnos de 4º de ESO de la opción B de Matemáticas, vimos cuatro posibles temas que podían ser novedosos e interesantes para los alumnos.

Un primer tema trataba de buscar fractales vistos desde el cielo en nuestro entorno, siguiendo el estupendo trabajo “Armonía fractal de Doñana y las marismas” sobre el parque natural de Doñana⁴.

El segundo consistía en buscar fractales en el entorno.

El tercer tema era el que presentamos y consistía en calcular la dimensión fractal del contorno de las localidades de los alumnos del centro.

El cuarto tema seguía el mismo procedimiento que el segundo pero en este caso se quería calcular la dimensión fractal de la costa del entorno.



Alumno seleccionando el contorno de una localidad



Alumnos exponiendo el trabajo a sus compañeros

Los alumnos a los que se les presentaron los trabajos de investigación conocían de cursos anteriores los fractales y un poco de sus principales propiedades. El trabajo tenía carácter voluntario (con el aliciente de poder conseguir hasta un punto extra en la nota) y se les presentó a principios del segundo trimestre del curso. Debían investigar por parejas sobre el tema que más les interesase, realizando el trabajo por escrito y una presentación multimedia que debían exponer al resto de sus compañeros. Se entregó un índice de referencia para cada trabajo⁵ y a lo largo de tres sesiones durante la segunda evalua-

ción se realizó una tutorización de los trabajos que iban realizando los alumnos fuera de clase (en algunas ocasiones los alumnos se quedaron a comer en el centro para poder utilizar los medios informáticos del centro). También aprovechamos los recreos para ir resolviendo dudas y utilizar los medios informáticos (especialmente la pizarra digital para realizar el contorno con la mayor precisión posible). Se trabajó en colaboración con el Departamento de Ciencias Sociales para que los alumnos pudieran completar el estudio trabajando con las coordenadas geográficas de los lugares, condiciones orográficas e informaciones de interés sobre las localidades, costas y el entorno.

Todos los alumnos de la clase realizaron trabajos de investigación y quizá el principal elemento motivador para trabajar era saber que eran investigaciones novedosas con las que podíamos adentrarnos por “sendas casi inexploradas”.

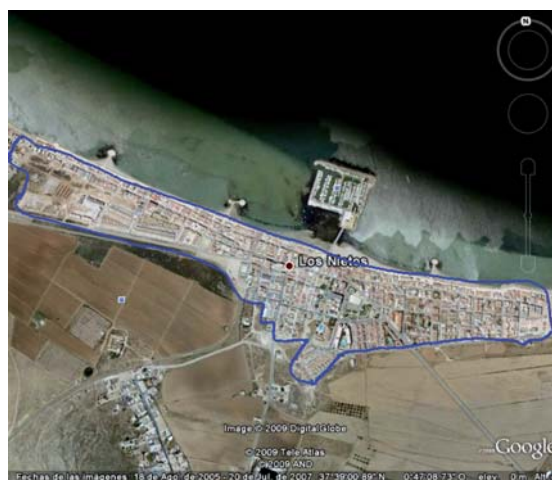
Durante el tercer trimestre los alumnos completaron los trabajos de investigación y los presentaron a sus compañeros.

Fueron dos los grupos que realizaron el trabajo de investigación sobre el cálculo de la dimensión fractal del contorno de las poblaciones. Se obtuvieron resultados similares (es prácticamente imposible obtener los mismos valores con los medios con los que hemos trabajado, principalmente ante la dificultad de determinar de forma unánime qué se entiende por contorno y por falta de resolución que ofrecen las fotografías en Google Maps y Google Earth).

A continuación se muestran las imágenes de cada localidad estudiada con su contorno en azul y las dimensiones fractales obtenidas de menor a mayor:



Roche bajo: 1,221



Los Nietos: 1,237



Alumbres: 1,22



Llano del Beal: 1,244



Portman: 1,249



La Unión: 1,26



El Algar: 1,255



Roche alto: 1,273



Estrecho de San Ginés: 1,257



El Beal: 1,287

Cabe resaltar que para poder comparar la rugosidad debemos fijarnos en las centésimas y milésimas de los valores numéricos de las dimensiones fractales. Con los datos obtenidos podemos afirmar que el municipio con mayor dimensión fractal tiene es El Beal con 1,287, y el de menor dimensión fractal tiene es Alumbres con 1,22.

Todos los trabajos en formato pdf y las presentaciones se pueden ver en la página web *De Mates ... ¿Ná?*⁶, dentro de los Trabajos de Investigación del curso 2008-2009:

<http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates89/opciones/investigaciones%20matematicas%200809/index.htm>

Conclusiones

La estimación de la dimensión fractal del contorno de una ciudad puede ser una buena herramienta para sumergirnos en

el apasionante mundo de los fractales y para descubrir alguna de sus múltiples aplicaciones.

La experiencia que hemos realizado desde el Departamento de Matemáticas con alumnos de 4º ESO así lo corrobora y esperamos que otros alumnos puedan probar su potencial para realizar investigaciones en Matemáticas.

Es importante tener en cuenta que el objetivo del cálculo de la dimensión fractal del contorno de una ciudad con alumnos de Secundaria quizá no esté tanto en el procedimiento del cálculo (algo en cierta forma mecánico) sino en la posibilidad de conocer el comportamiento y utilidad de los fractales mediante un trabajo de investigación, ayudando a reforzar la presencia de las matemáticas en nuestra sociedad. ■

NOTAS

¹ La actividad preparada con motivo del Día escolar de las Matemáticas sobre "La ciudad y las matemáticas" se puede visitar en la dirección [http://www.fespm.es/CIUDAD/Actividades%20-%20\]CR.pdf](http://www.fespm.es/CIUDAD/Actividades%20-%20]CR.pdf) de la página web de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

² La Semana Matemática es una actividad-muestra en la que cada grupo de alumnos va pasando por una serie de aulas-taller con un orden previamente establecido, de forma que cada cierto tiempo van rotando los grupos por todas las aulas, sin coincidir dos grupos en una misma aula. Este evento se realiza durante varios días, agrupando a los alumnos por niveles educativos e invitando a participar a otros centros. Son los propios alumnos que han realizado los trabajos durante el curso los que presentan y controlan las diferentes aulas, adquiriendo una mayor responsabilidad y entrega a la hora de realizar esta actividad. Para obtener más información se puede visitar el artículo publicado en la revista Unión "Realización de una Semana Matemática" en la dirección: <http://www.fisem.org/paginas/union/info.php?id=322>

³ El método de conteo de cajas se basa en la propiedad fractal de autosemjanza. Consiste en cubrir la imagen con cajas de dimensión s y se seleccionan aquellas celdas que están ocupadas, hasta completar la imagen. Luego, se va cambiando s progresivamente por otras cajas más pequeñas, siguiendo una proporción (factor de escala) y nuevamente se seleccionan las cajas ocupadas. En cada paso se aplica la fórmula de Hausdorff-Besicovitch y si se desea se traza un gráfico de comportamiento escalar

donde representamos: en el eje Y , el logaritmo de las celdas ocupadas en su totalidad (dividendo de la fórmula); en el eje X , el logaritmo de las celdas correspondientes al factor de escala (divisor de la fórmula). El cociente entre valores representa la pendiente de la línea resultante y proporciona el valor de la dimensión fractal.

⁴ El trabajo es un paseo por las formas armónicas esculpidas por el barro, el tiempo y el agua en las marismas andaluzas, en el que se puede observar la presencia de la geometría fractal en la naturaleza. Se puede visitar el trabajo en la dirección <http://www.armoniafractal.com/>

⁵ El índice orientativo entregado sobre el cálculo de la dimensión fractal del contorno de los municipios del entorno de La Unión era el siguiente:

- ¿Qué son los fractales? (Definición, Historia, tipos, dimensión fractal...)
- Objeto del estudio (qué se pretende, cómo se va a realizar, herramientas a utilizar...)
- Presentación de las dimensiones fractales calculadas (breve comentario sobre la situación geográfica de la localidad, un poco de su historia, cálculo de la dimensión...)
- Conclusiones.
- Bibliografía.

⁶ Página web realizada por los alumnos de Matemáticas del I.E.S. Sierra Minera de La Unión (Murcia):

<http://www.dematesna.es>

Se realizó un artículo sobre la página en el número 50 de la revista Suma titulado "Una web por y para los alumnos de Matemáticas".

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Mandelbrot, B.B. (1977). *La Geometría Fractal de la Naturaleza*. Barcelona: Tusquets Editores.

Martín, M.A., Morán, M. y Reyes, M. (1995). *Iniciación al caos*. Colección Educación Matemática en Secundaria. Madrid: Editorial Síntesis.

Internet

Estudio comparado de la dimensión fractal aplicado al contorno de dos ciudades

http://www.geogra.uah.es/inicio/web_11_confibsig/PONENCIAS/2-057%20Peri-Antes-Serafini.pdf

Propuesta de medición de la dimensión fractal: la ciudad-materia y la cuadrícula urbana

<http://www.architravedtc.com/CiudadMateria.htm>

Página realizada por los alumnos de las asignaturas de Matemáticas del IES Sierra Minera (La Unión, Murcia), con investigaciones y curiosidades matemáticas.

<http://www.dematesna.es>

Investigación sobre Fractales

<http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates23/opciones/investigacion/fractales/fractales.htm>

Investigación sobre Fractales

<http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates56/opciones/investigaciones%20matematicas%200506/Fractales/index.htm>

Comentarios sobre el vídeo de la colección Más por Menos: "Fractales. La Geometría del Caos"

<http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates89/opciones/sabias/video%20fractales/video%20fractales.htm>

Área Fractal

<http://www.arrakis.es/~sysifus/>

Geometría Fractal

<http://coco.ccu.uniovi.es/geofractal/>

Información sobre La Unión

[http://es.wikipedia.org/wiki/La_Uni%C3%B3n_\(Murcia\)](http://es.wikipedia.org/wiki/La_Uni%C3%B3n_(Murcia))

Google Earth

<http://earth.google.com/>

Fractalyse

<http://www.fractalyse.org/>

ImageJ

<http://rsbweb.nih.gov/ij/>

Este artículo fue recibido en *Suma* en noviembre de 2008 y aceptado en septiembre de 2010

