suma+ 64
Junio 2010, pp. 35-44

Argumentación matemática: prácticas escritas e interpretaciones

La práctica de argumentación matemática es parte esencial de la formación de los estudiantes en las distintas etapas escolares y, por tanto, también debe ser tenida en cuenta en la formación de los futuros maestros. En este escrito mostramos datos sobre algunas de las carencias en el conocimiento práctico y teórico de la argumentación matemática en un pequeño grupo de estudiantes de Titulaciones de Magisterio. Estos datos nos llevan a reflexionar sobre las implicaciones que las dificultades de los maestros tienen en el aprendizaje de sus alumnos.

Palabras Clave: Argumentación, explicación, formación del profesorado, prácticas escritas, diferencias de interpretación

Mathematical Reasoning: written and practical interpretations

The practice of mathematical argumentation is a key component in the students' development during their different school periods. Hence, it needs to be considered in the future teachers' academic development. In this text we draw on data concerning the lack of practical and theoretical knowledge on the notion of mathematical argumentation in a small group of students from a primary teacher education grade. This data leads to further reflection on some of the implications that the teachers' difficulties may have on their students' learning.

Key words: Argumentation, explanation, Ttacher education, written practices, differences of interpretation

Introducción

Los actuales currículos en nuestro contexto señalan como un objetivo de la educación formar ciudadanos críticos y reflexivos, comprometidos y capaces de razonar. Para ello, es esencial el trabajo de prácticas argumentativas, donde se aprenda a reconocer argumentos válidos y a desarrollar razonamientos analíticos que permitan la adquisición progresiva de habilidades en este sentido. Muchos alumnos, sin embargo, tienen importantes dificultades en el desarrollo de argumentaciones matemáticas durante sus procesos de aprendizaje en la escuela. Aunque hay diversas causas que contribuyen a explicar estas dificultades, algunas de ellas se ven reforzadas por las dificultades de argumentación que a su vez experimentan algunos maestros de matemáticas. Por este motivo, entre otros, es relevante explorar las prácticas e interpretaciones en torno a la argumentación matemática de los maestros en formación inicial.

En el marco del Grupo de Investigación "Educación y Competencia Matemática"–SGR 365– y del Proyecto 'Estudio del desarrollo de competencias discursivas en el aula de matemáticas',–EDU2009/07113– hemos desarrollado un estudio exploratorio (De Gamboa, 2009) sobre las prácticas escritas e interpretaciones en torno a la argumentación matemática de un grupo de futuros maestros de Educación Primaria en el segundo curso de su formación universitaria. Se trata de un estudio que debe contextualizarse en el marco más amplio de la aproximación al conocimiento matemático de los futuros maestros. Los dos objetivos principales han sido: 1) identificar prácticas de argumentación en la resolución escrita de actividades matemáticas; y 2) explorar la diversidad de interpretaciones sobre la noción de argumentación matemática. Uno de los aspectos más novedosos de nuestro trabajo es que no incidimos en los tipos de argumentación y explicación o incluso demostración, sobre los que hay bastante literatura en nuestra área (ver, por ejemplo, Gutiérrez, 2005, o León y Calderón, 2001), sino que damos un paso hacia atrás para obtener una visión más general, que incluya la identificación de las prácticas, la propuesta de preguntas y las interpretaciones acerca de la argumentación matemática.

Genaro De Gamboa
Núria Planas
Mequè Edo
Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales, Universitat Autònoma de Barcelona

La noción de argumentación matemática

Aunque la noción de argumentación matemática debe interpretarse en el contexto de las matemáticas, se fundamenta en la noción más amplia de argumentación. Sardà (2003, p. 123) habla de la argumentación como:

> Actividad social, intelectual y verbal que sirve para justificar o refutar una opinión, y que consiste en hacer declaraciones teniendo en cuenta al receptor y la finalidad con la cual se emiten. Para argumentar hace falta elegir entre diferentes opciones o explicaciones y razonar los criterios que permiten evaluar como más adecuada la opción elegida.

La argumentación es un discurso dirigido a un receptor con el fin de justificar una opinión partiendo de hechos o datos y razonando los criterios sobre los que se decide la adecuación de la opción elegida.

La argumentación aparece ligada, por tanto, a los conceptos de justificación y explicación, tal como ya señalan Perelman y Olbrech-Tyteca (1994). Tomando a Jorba (1998, p. 48), se tiene que:

> Justificar es producir razones o argumentos, establecer relaciones entre ellos y examinar su aceptabilidad con la finalidad de modificar el valor epistémico de una tesis en relación al corpus de conocimientos en que se incluyen los contenidos objeto de la tesis.

Esto hace que, en el desarrollo de una argumentación que va dirigida a la justificación, no baste con producir argumentos, sino que sea necesario someterlos a un examen de aceptabilidad. Duval (1999) utiliza los criterios de pertinencia y fuerza para decidir sobre la aceptabilidad de un argumento. La pertinencia del argumento es la relación entre los contenidos de la afirmación y del argumento que la justifica, teniendo que ocurrir que los contenidos semánticos se sobrepongan. La fuerza del argumento depende de: a) la resistencia que presente a contra-argumentos, es decir, que no tenga réplica; y b) el valor epistémico positivo, es decir, que sea evidente, necesario y auténtico.

Además de la estrecha relación con la noción de justificación, la argumentación tiene mucho que ver con la explicación. Según el Diccionario de la Real Academia Española (RAE, 2001, p. 1021) "explicar es declarar o exponer cualquier materia, doctrina o texto difícil con palabras muy claras para hacerlos más perceptibles". Ribas (2003, p. 151) habla de exponer como sinónimo de explicar diciendo que:

> Exponer es organizar la información a partir de unas relaciones lógicas entre las unidades que la constituyen, de manera que aparece como un razonamiento que conduce de una premisa a una conclusión.

Aunque no se mencione explícitamente la argumentación, en esta definición se considera el paso razonado de una premisa a una conclusión, que es una unidad mínima de argumentación. Por lo tanto, puede entenderse que el esquema básico de la explicación es también el germen de la argumentación, siendo las características de las razones que fundamentan el paso de premisa a conclusión las que determinan la argumentación.

Siguiendo a Duval (1999), argumentación y explicación comparten el esquema básico de paso de una premisa a una conclusión, pero se diferencian en las razones que validan este paso, siendo en la argumentación donde las razones comunican su fuerza a las afirmaciones, convirtiéndolas en argumentos y haciendo de la proposición final una conclusión, mientras que en la explicación las razones tienen una función descriptiva al presentar el sistema de relaciones en las que el dato a explicar se produce. Por ejemplo, tomando como premisa la existencia de distintas clasificaciones de triángulos basadas en sus tipos de lados y en sus tipos de ángulos, en una explicación afirmamos que los triángulos equiláteros son distintos a los triángulos rectángulos, ya que un triángulo equilátero es un triángulo cuyos tres lados tienen la misma medida, mientras que un triángulo rectángulo es aquel que tiene uno de sus tres ángulos recto, es decir que mide 90º. En una argumentación, en cambio, decimos que los triángulos equiláteros son distintos a los triángulos rectángulos ya que no puede haber un triángulo que sea equilátero y rectángulo a la vez, dado que en un triángulo rectángulo se cumple el Teorema de Pitágoras, que relaciona sus tres lados a, b y c según la ecuación $a^2=b^2+c^2$ (siendo a el lado opuesto al ángulo recto o hipotenusa) y es imposible que esta ecuación se cumpla si $a = b = c$, salvo en el caso trivial $a = b = c = 0$.

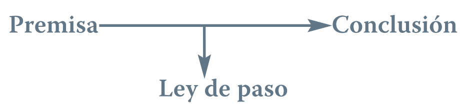

Figura 1. Esquema argumentativo mínimo de Plantin (1998)

Desde una perspectiva más formal para la caracterización de la argumentación, resulta útil el esquema argumentativo mínimo de Plantin (1998), que consiste en el paso de una premisa a una conclusión esgrimiendo al menos una razón que lo valide (ver Figura 1). Una vez establecida esta unidad mínima, debemos contar con un marco más general que contemple otras casuísticas en el discurso argumentativo. Para ello, es útil el esquema de Toulmin (2007), que adaptamos en la Figura 2. En este esquema, las premisas son los hechos que se invocan para justificar y validar la afirmación y la tesis; la conclusión es la tesis que se establece; la ley de paso son las razones que se proponen para justificar las conexiones entre datos y conclusión; la garantía es el conocimiento básico que asegura la justificación; los calificadores modales son la fuerza que la justificación confiere a la argumentación, aportando un comentario implícito de la justificación; y la refutación son las circunstancias en que las justificaciones no son ciertas.

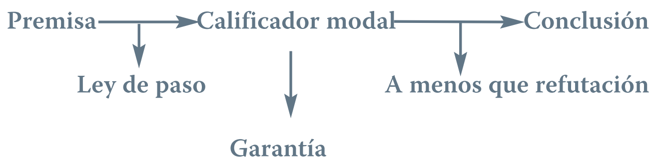

Figura 2. Adaptación del esquema argumentativo de Toulmin (2007)

Entendemos como argumentación a todo discurso que se pueda analizar en términos de la Figura 2, siendo el esquema mínimo argumentativo el presentado en la Figura 1. En el caso de la argumentación en matemáticas, disponemos de una red bien establecida de definiciones, lemas, proposiciones y teoremas que permiten avanzar en los razonamientos mediante la regla de implicación, en la que el paso de premisa a conclusión se hace mediante un término medio que relaciona y justifica las proposiciones, haciéndose necesario un uso correcto del conocimiento matemático como término medio. En resumen, definimos la argumentación matemática como aquel tipo de argumentación que se desarrolla dentro de la actividad matemática y en la que la ley de paso se apoya en elementos del conocimiento matemático, requiriéndose la capacidad de comprender o de producir una relación de justificación entre proposiciones que sea de naturaleza deductiva y no sólo semántica.

Desde una perspectiva más amplia, Homero (2007, p. 71) define la práctica argumentativa en matemáticas como:

> El conjunto de acciones y razonamientos que un individuo pone en juego para justificar o explicar un resultado o para validar una conjetura nacida durante el proceso de resolución de un problema.

Así, las prácticas argumentativas no siempre van acompañadas de argumentación, sino que éstas son las prácticas que se analizan para establecer la presencia o ausencia de argumentaciones. Esto hace que una práctica argumentativa, por tanto, pueda estar básicamente constituida por explicaciones, justificaciones u otros tipos de razonamiento que no cumplan las condiciones para ser argumentaciones, de acuerdo con la definición presentada en el párrafo anterior. Para Godino y Recio (2001), los argumentos, las explicaciones y los demás tipos de razonamiento pueden entenderse como objetos emergentes de sistemas de prácticas argumentativas

> Aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones de validación y decisión, esto es, situaciones que requieren justificar o validar el carácter de verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de una acción (Godino y Recio, op. cit., p. 406).

Desarrollo del estudio

De acuerdo con nuestro primer objetivo, hemos iniciado el estudio del reconocimiento y uso de la argumentación en la resolución escrita de actividades matemáticas, junto con el estudio de la demanda de argumentaciones a partir de cuestiones construidas por los futuros maestros. De acuerdo con nuestro segundo objetivo, también hemos iniciado el estudio de las interpretaciones que los futuros maestros hacen de la noción de argumentación matemática. Para ello, hemos trabajado con un grupo reducido de diez estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación de nuestra Universidad, que se correspondía con todos los estudiantes matriculados en la materia optativa "Matemáticas II". Esta materia está planteada de modo que el eje de resolución de problemas sirva para introducir y consolidar contenidos de matemáticas. Se ha trabajado con una muestra pequeña porque no se trata de establecer generalizaciones sino de entender mejor parte del conocimiento matemático de los futuros maestros. En síntesis, se ha buscado información acerca de: i) la presencia y el reconocimiento de argumentaciones en la resolución escrita de actividades; ii) la presencia de argumentaciones en la construcción de cuestiones complementarias; y iii) la interpretación teórica de la noción de argumentación matemática.

El instrumento para recoger los datos ha sido un cuestionario individual organizado en dos partes (ver Figura 3), que se presentó a los estudiantes en una misma sesión de clase de 60 minutos en marzo de 2009. Apenas se dieron explicaciones excepto para clarificar que los resultados no serían objeto de evaluación dentro de la materia e informar brevemente sobre el procedimiento a seguir durante la sesión. La recogida de datos fue de carácter anónimo y no se pidió ninguna información personal ni académica. La primera parte que se proporcionó está compuesta de dos actividades en torno a contenidos geométricos básicos que se espera que los estudiantes resuelvan sin mayor dificultad y que debe informar sobre el primer objetivo. A medida que cada estudiante fue finalizando, se repartió la segunda parte del cuestionario con preguntas acerca de las resoluciones realizadas y la comprensión de la práctica de argumentación matemática, orientadas a la consecución de nuestros dos objetivos. Los datos de nuestra investigación son, por tanto, las representaciones escritas de las respuestas individuales de los futuros maestros a las dos partes del cuestionario. No hay construcción de razonamientos por medio de réplicas sucesivas, como ocurre con la argumentación en situación de interacción, sino que estamos ante el tipo "argumentación para uno mismo" tal como lo describen Perelman y Olbrech-Tyteca (1994), o bien "monólogo argumentativo" en términos de Plantin (1998).

Las actividades matemáticas del cuestionario se diseñaron a partir de la lectura de actividades similares ideadas por Badillo y Edo (2007), y teniendo en cuenta las recomendaciones del profesor responsable del aula universitaria. En cuanto a contenidos y procesos requeridos, las dos actividades tienen un carácter marcadamente distinto con el fin de obtener respuestas variadas y ver cuáles de ellas se interpretan como argumentaciones. Intencionadamente no se pidió argumentar en la primera parte del cuestionario, sino justificar y explicar, ya que se pensó que esto podría ayudar a que las respuestas de los estudiantes proporcionaran más datos sobre qué entienden por argumentación y cómo relacionan esta práctica con la justificación y la explicación, tal como se sugiere en Gresalfi, Martin, Hand y Greeno (2008). Aún así, somos conscientes de que el propio formato de cuestionario con la secuencia cerrada de preguntas-respuestas puede haber contribuido a que los estudiantes centren la atención en la elaboración de respuestas y no tanto en la descripción detallada de los procesos de razonamiento desarrollados. Diversos estudios (ver, por ejemplo, León y Calderón, 2001) señalan que en situaciones de escritura abunda más la representación matemática escueta que la narración discursiva extensa.

Primera parte del cuestionario

ACTIVIDAD 1 (A1)

a. El punto de intersección de las alturas de un triángulo se conoce como ortocentro. ¿El ortocentro siempre se encuentra en el interior del triangulo? Justifica tu respuesta.
b. Explica qué pasará con las alturas de los diferentes triángulos según sus tipos de ángulos.

ACTIVIDAD 2 (A2)

Pon en cada recuadro si es posible, o no, construir un triángulo que cumpla las condiciones de fila y columna. En caso de ser posible, dibújalo.

Tipos	Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
Equilátero			
Isósceles			
Escaleno			

Segunda parte del cuestionario

Continuación de A1

Q1. ¿Has tenido que argumentar durante la resolución de esta actividad? ¿Cuándo?
Q2. Añade una pregunta a la Actividad 1 que requiera argumentación y respóndela.

Continuación de A2

Q3. ¿Has tenido que argumentar durante la resolución de esta actividad? ¿Cuándo?

Figura 3. Esquema resumido del cuestionario

El análisis de los datos ha sido cualitativo. Se ha organizado en torno a la lectura repetida de las respuestas de los estudiantes a los cuestionarios de acuerdo con los principios metodológicos de la Teoría Fundamentada (Glaser y Strauss, 1967), y se ha complementado con la triangulación de perspectivas de los autores. Ha habido un primer análisis de cada cuestionario, con la lectura vertical de todas las respuestas y, a continuación, un segundo análisis de cada pregunta, con la lectura horizontal del conjunto de diez respuestas a cada una de las preguntas. En este artículo, mencionamos resultados obtenidos con el segundo análisis, que en cierta medida toma en consideración aspectos del análisis previo pormenorizado para cada estudiante. Hemos decidido presentar los datos para los cuales se ha obtenido mayor información, ya sea porque ha habido una triangulación relativamente fácil del análisis o porque se ha confirmado un mismo perfil de respuesta en más de un estudiante.

Algunos resultados

Dividimos esta sección en dos apartados, uno para cada objetivo del estudio. Para los datos referidos a la consecución del primer objetivo, el análisis principal consiste en la aplicación de dos enfoques interpretativos. En la lectura vertical de los datos, se ha aplicado un *enfoque formal* en el análisis de los textos de los estudiantes, en base al esquema argumentativo de Toulmin y con atención al esquema mínimo de Plantin. Dejamos para otro artículo estos resultados y ahora presentamos la información obtenida tras aplicar el que hemos denominado como *enfoque funcional*. Desde este enfoque, en el desarrollo de la lectura horizontal de los datos, se analizan las razones que respaldan el paso de la premisa a la conclusión según la función explicativa o argumentativa que cumplan las razones en dicho paso. Hablamos de explicación cuando la razón tiene una función descriptiva o de argumentación cuando la razón valida el paso de premisa a conclusión.

En la Tabla 1 introducimos los marcadores principales “Argumenta” y “Explica”, junto a otros que se han ido construyendo progresivamente al revisar diversas veces y en grupo las respuestas escritas de los estudiantes. Por ejemplo, en las preguntas Q1 y Q3, en las que se pide identificar la práctica de argumentar en el proceso de resolución desarrollado por el propio estudiante, se usan los marcadores “Identifica” y “No identifica”. Un estudiante “Identifica” la práctica de argumentar si cuando dice que (no) ha argumentado, en su respuesta a A1 o A2, (no) ha realizado efectivamente una argumentación. Por el contrario, “No identifica” si reconoce una práctica de argumentación que no ha realizado o bien no reconoce una que sí que ha realizado. En las preguntas Q2 y Q4, se analizan las preguntas propuestas por los alumnos en base a un examen de posibles respuestas. Una pregunta “Requiere” argumentación si la misma pregunta y sobre todo la manera en la que está formulada invitan al razonamiento argumentativo o se considera oportuno argumentar para responderla. En cambio, una pregunta “No requiere” argumentación si se puede contestar de forma directa o mediante afirmaciones, enumeraciones, casos particulares… es decir, sin que haya un razonamiento.

Para los datos referidos a la consecución del segundo objetivo, el análisis principal consiste en realizar una revisión general del conjunto de respuestas para cada cuestión y, después de familiarizarnos con los temas introducidos por los estudiantes, plantear categorías emergentes que se vayan desarrollando progresivamente con el fin de agrupar las distintas respuestas. No buscamos categorías en el sentido clásico del término puesto que no queremos garantizar que los contenidos de unas y otras se excluyan. En la cuestión Q5, se agrupan las respuestas de forma no excluyente de acuerdo con las siguientes funciones de la argumentación en matemáticas: 1) soporte para entender –ayudar a tomar conciencia de aspectos de la actividad matemática; 2) soporte para consolidar –ayudar a recordar y reconstruir conocimientos matemáticos; 3) soporte para manejar –ayudar a avanzar en las fases de resolución de una actividad matemática; 4) soporte para validar –ayudar a determinar la validez de procesos matemáticos; y 5) soporte para generar hipótesis –ayudar a establecer hipótesis. Paralelamente, tras leer varias veces las respuestas a la cuestión Q6, se agrupan los datos en base a tres aproximaciones, de nuevo no excluyentes: 1) explicar; 2) demostrar; y 3) contrastar razonamientos. Las agrupaciones de las respuestas a las cuestiones Q5 y Q6 se establecen a posteriori y a partir de los datos de nuestro estudio exploratorio, de modo que no pretenden ofrecer una variedad exhaustiva de formas de interpretar la noción de argumentación matemática. Aún así, se espera que orienten sobre la diversidad de interpretaciones ya existente en una muestra pequeña de diez estudiantes pertenecientes a un mismo grupo clase.

La diversidad de prácticas en torno a la argumentación matemática

Tal como muestra la Tabla 1 (donde sólo hemos sintetizado los datos relativos a cinco casos por motivos de espacio), en la respuesta a los dos primeros apartados de A1, casi todos los estudiantes realizan la práctica satisfactoriamente: nueve de ellos argumentan en el primer apartado y ocho explican en el segundo; aquí, de los dos estudiantes restantes, uno repite la conclusión de la argumentación hecha en el primer apartado y otro se limita a plantear una hipótesis acerca del comportamiento del ortocentro según cada tipo de triángulo. Al estudiar las respuestas a Q2 y Q4, el porcentaje de resultados satisfactorios se reduce considerablemente, sobre todo cuando se pide a los estudiantes que propongan preguntas que requieran argumentación. Entendemos que los buenos resultados en las preguntas de A1 tienen mucho que ver con el carácter gráfico que subyace a la resolución de la actividad, que de algún modo parece facilitar tanto la elaboración de explicaciones como de argumentaciones, tal como se ha discutido en otros trabajos (Cobo y Fortuny, 2007).

En las preguntas Q1 y Q3 del cuestionario, cuando se pide a los diez estudiantes que identifiquen la práctica de argumentación empiezan a aparecer las dificultades más llamativas en relación a dos aspectos. Por un lado, la mitad de los estudiantes hace un reconocimiento confuso de la propia práctica al identificar explicaciones como argumentaciones y, en general, al usar de forma indistinta ambas nociones. No todos los estudiantes que manifiestan la confusión entre argumentación y explicación, lo hacen dando a la explicación el valor de argumentación, ya que en un caso el proceso es inverso, considerándose como explicación una argumentación. Por otro lado, en la Actividad 2, cuatro de los estudiantes afirman que han argumentado al realizar dibujos para ver si eran posibles las construcciones geométricas que se les proponían; no tienen en cuenta, sin embargo, la particularidad asociada a cada dibujo. Nos parece relevante que cuatro estudiantes consideren que argumentan al dibujar. En relación a estos datos, apreciamos de nuevo una cierta confusión ya que la mera prueba de situaciones mediante dibujos no constituye por si sola una forma de argumentación.

En las respuestas a las preguntas Q2 y Q4, observamos también una dificultad importante de los futuros maestros al plantear preguntas que requieran argumentación. Sólo un estudiante del grupo propone preguntas que requieran argumentación y las responde argumentando. De las preguntas que se proponen en la cuestión Q2 sólo en tres de los textos se requiere argumentación para responderse, mientras que en la cuestión Q4 son cinco textos. Más de la mitad de las preguntas propuestas no requieren argumentación, sino que en realidad piden el desarrollo de enumeraciones, la particularización de situaciones, explicaciones, preguntas directas o la exposición de opiniones. En seis casos, al responder a alguna pregunta propuesta por ellos mismos, los estudiantes sí que argumentan, pero no lo hacen en la respuesta a otras preguntas. Es también llamativo que argumenten al responder a preguntas propuestas por ellos que no requieren argumentación. Esto podría hacer pensar que al realizar una de las preguntas tenían pensada de antemano una respuesta argumentada y no contemplaron la posibilidad de otros tipos de respuesta. No obstante, no tenemos datos que validen esta interpretación.

Antes de presentar los datos de la Tabla 1, nos detenemos a comentar más detalladamente cómo se ha procedido a establecer los marcadores “Argumenta”, “Explica” y otras variantes en base al análisis de los textos escritos de cada estudiante. Para el caso del Estudiante 1, por ejemplo, en su respuesta al primer apartado de la Actividad 1, parte de la premisa dada en el enunciado, es decir, la existencia del ortocentro, y afirma que el ortocentro no siempre se encuentra en el interior del triángulo, utilizando como ley de paso el contraejemplo del triángulo obtusángulo, en el cual el ortocentro se encuentra fuera del mismo, como comprueba de manera gráfica. A esta respuesta asignamos el marcador “Argumenta” ya que la ley de paso utilizada garantiza que el ortocentro no siempre se encuentra en el interior del triángulo. El Estudiante 4, en cambio, parte de la misma premisa para afirmar también que el ortocentro no siempre se encuentra en el interior del triángulo, sin embargo la razón que utiliza para validarlo, más allá de no ser pertinente, consiste en describir la posición de las alturas de un triángulo respecto de sus lados. Para esta respuesta utilizamos el marcador "Explica" ya que las razones utilizadas tienen una función meramente descriptiva y no garantizan la validez de la conclusión. En el proceso de asignación de marcadores, conviene recordar que no buscamos estudiar si los enunciados construidos por los estudiantes son matemáticamente correctos, sino el uso que se hace de ellos.

Organizamos las respuestas a Q1 y Q3 según los marcadores "Identifica", "Confunde explicar y argumentar" y "No identifica". Utilizamos "Identifica" si la respuesta del alumno coincide con nuestro análisis previo de las respuestas a A1 y A2, tal como ya hemos comentado; utilizamos "Confunde explicar y argumentar" si afirma que ha argumentado en un enunciado en el que en realidad ha explicado o viceversa, según nuestras definiciones de argumentar y explicar; utilizamos "No identifica" en el resto de casos. Por ejemplo, en el Estudiante 5 marcamos su respuesta a Q1 con "Identifica" ya que el alumno afirma que argumentó al responder al primer apartado de A1 y, paralelamente, como resultado de nuestro análisis marcamos su respuesta a dicho apartado como "Argumenta". El Estudiante 1, sin embargo, afirma que argumenta en el primer y segundo apartado de A1, pero su respuesta al segundo apartado se corresponde con "Explica", por lo que asignamos el marcador "Confunde explicar y argumentar".

Utilizamos también marcadores para las respuestas a Q2 y Q4. Asignamos el marcador "Requiere" si consideramos que la pregunta que propone el alumno requiere argumentación y "No requiere" en caso contrario. Por ejemplo, en el Estudiante 1 marcamos su respuesta a Q2 con "Requiere" ya que la pregunta añade una demanda literal de razonar la respuesta, sin embargo marcamos su respuesta a Q4 con "No requiere" ya que pide explícitamente una explicación. Puede estar ocurriendo que este estudiante piense que su expresión "*Explica por qué*" debe interpretarse como una demanda de argumentación, sobre todo si tenemos en cuenta que en la respuesta a Q1 ha confundido argumentar y explicar. Con el resto de estudiantes seguimos procedimientos análogos en la asignación de marcadores.

Q1. ¿Has tenido que argumentar durante la resolución de A1? ¿Cuándo?	**Q2**. Añade una pregunta a A1 que requiera argumentación y respóndela.	**Q3**. ¿Has tenido que argumentar durante la resolución de A2? ¿Cuándo?	**Q4**. Añade una pregunta a A2 que requiera argumentación y respóndela.
Estudiante 1 A1. a) El ortocentro de un triángulo no siempre se encuentra en el interior de éste, ya que en los triángulos que tienen un ángulo obtuso este punto queda fuera. [**Argumenta**] A1. b) Cuanto más agudo sea el ángulo, más altura tiene el triángulo; si el ángulo es más obtuso, la altura es más pequeña. [**Explica**]			
En la primera cuestión para justificarla. En la segunda cuestión también argumento mi creencia. [**Confunde explicar y argumentar**]	"¿Es posible, a partir de los ángulos de un triángulo determinar el ortocentro? Razona tu respuesta." [**Requiere**]. Si el triángulo tiene un ángulo obtuso el ortocentro estará fuera. [**Argumenta**]	Sí, el hecho de hacer el dibujo es una manera de argumentar o demostrar lo que se ha respondido. [**No identifica**]	"¿Qué triángulo tiene menos posibilidades? Explica por qué" [**No requiere**] El equilátero tiene menos debido a que sus lados miden igual y por eso sus ángulos siempre son agudos. [**Argumenta**]
Estudiante 2 A1. a) No, porque cuando hay un ángulo obtuso la altura desde los ángulos agudos pasa por el exterior del triángulo. [**Argumenta**] A1. b) Si es un triángulo rectángulo, el ortocentro siempre coincidirá con el vértice del ángulo recto. Si todos los ángulos son agudos, el ortocentro se encontrará siempre en el interior del triángulo. Si hay algún ángulo obtuso, el ortocentro siempre estará en el exterior del triángulo. [**Explica**]			
Sí, en la primera pregunta cuando se dice justificar. [**Confunde explicar y argumentar**]	"¿Por qué cuando hay un ángulo obtuso el ortocentro está en el exterior?" [**Requiere**] Porque si hay un ángulo obtuso quiere decir que hay dos agudos, y por estos la altura siempre pasa por fuera al formar el ángulo recto. [**Argumenta**]	No. [**Identifica**]	"¿Por qué no se puede formar un triángulo equilátero que sea obtusángulo?" [**Requiere**] Si es equilátero todos sus lados miden igual y sus ángulos también. Como la suma de los ángulos es 180º, los de un equilátero miden 60º. Por eso no puede ser obtusángulo (>90º). [**Argumenta**]

<table>
<tr><td colspan="4">Estudiante 3
A1. a) No siempre se encuentra en el interior ya que la altura es la perpendicular del vértice respecto al lado opuesto y, en este caso, muchas veces algunas alturas se encuentran fuera. [Argumenta]
A1. b) Las alturas pueden estar dentro o fuera según si hay un ángulo obtuso, recto o agudo. También dependerá de qué lado se tome como base. [Explica]</td></tr>
<tr><td>Sí, en las tres preguntas, ya que para explicar las deducciones he tenido que argumentar por qué es así. [Confunde explicar y argumentar]</td><td>“¿Se pueden construir triángulos con la misma altura?” [No requiere]
Sí, porque se fija un lado como base, se traza una línea paralela a la base a una distancia que sea la altura y esta recta son posibles puntos de altura. O sea que hay infinitos triángulos con la misma altura. [Argumenta]</td><td>Sí, haciendo los dibujos de los triángulos para demostrar que pueden existir. [No identifica]</td><td>“¿Por qué no se pueden construir triángulos equiláteros rectángulos y obtusángulos?” [Requiere]
Porque un equilátero tiene los lados iguales. En el rectángulo y el obtusángulo hay un tercer lado que no es igual sino mayor ya que une los otros dos. [Argumenta]</td></tr>
<tr><td colspan="4">Estudiante 4
A1. a) No siempre se encuentra en el interior del triángulo ya que sabemos que la altura va de un vértice al lado opuesto pero formando un ángulo de 90º con la base que se encuentra. [Explica]
A1. b) Según el tipo de triángulo, ocurre que las alturas se encuentran en un punto interior o en un punto lateral. Si es en un punto lateral, también puede ser que las alturas coincidan con los lados o que no sean ningún lado, como se ve en el ejercicio a. [Explica]</td></tr>
<tr><td>Sí, siempre que he querido demostrar mi punto de vista para convencer a la persona que lee. [Confunde explicar y argumentar]</td><td>“¿Hay algún triángulo con alturas que no se crucen?” [No requiere]
No, ya que sabemos que todas las alturas van de un vértice al lado opuesto y, por tanto, siempre se tienen que encontrar en un punto, sea en el centro o en un lado del triángulo. [Argumenta]</td><td>No he tenido que argumentar ya que simplemente me pedían que pusiera si era posible o no, pero no me pedían que pusiera por qué pensaba una cosa u otra. [Identifica]</td><td>“¿Qué condiciones tienen que seguir los triángulos para ser equiláteros, isósceles y escalenos? ¿Y escalenos, acutángulos y rectángulos?”[No requiere]
Un equilátero tiene todos los lados iguales y los ángulos: no puede ser obtusángulo, rectángulo ni acutángulo. El isósceles tiene dos lados iguales: puede ser acutángulo, rectángulo y escaleno. El escaleno tiene todos los lados diferentes: no puede ser acutángulo, rectángulo y escaleno. [Explica]</td></tr>
<tr><td colspan="4">Estudiante 5
A1. a) No siempre se encuentra en el interior del triángulo, haciendo la comprobación con un triángulo que no sea equilátero se puede ver. El resultado lo he obtenido por inducción, así que no se justificarlo matemáticamente. [Argumenta]
A1. b) Las alturas de los triángulos varían en función de los ángulos, cuanto más próximo a 90º es un ángulo más alto puede ser el triángulo. [Explica]</td></tr>
<tr><td>Sí, en la primera pregunta referente al ortocentro. [Identifica]</td><td>“¿Por qué dependen de los lados las alturas de cualquier triángulo?” [Requiere]
Porque los lados no forman parte de la base, son los que puedan dar altura al triángulos su los alargamos. El lado que forma parte de la base puede dar más altura al triángulo si lo reducimos. [Explica]</td><td>Sí, lo he argumentado todo por medio del dibujo de los resultados obtenidos. [Identifica]</td><td>“¿Por qué no existe un triángulo que sea equilátero y obtusángulo?” [Requiere]
Para obtener un equilátero todos los lados tienen que ser iguales y los respectivos ángulos también. Un obtusángulo tendría que tener todos los ángulos obtusos para que fuera equilátero y esto es imposible porque no sumarían 180º. [Demuestra]</td></tr>
</table>

Tabla 1. Respuestas de cinco estudiantes a las preguntas Q1, Q2, Q3 y Q4

La diversidad de interpretaciones en torno a la argumentación matemática

Las interpretaciones de los estudiantes en torno a la argumentación matemática son muy variadas tal como muestra la Tabla 2, donde hemos resumido las respuestas de los diez estudiantes. Las cuestiones Q5 y Q6 arrojan información complementaria. A pesar de que los estudiantes mezclan en qué consiste la argumentación matemática y para qué sirve, existen ciertos rasgos mayoritarios en el conjunto de las respuestas, relacionándose la argumentación en matemáticas con la explicación, con la demostración y como soporte para entender conceptos o procedimientos matemáticos.

En cuanto a la relevancia de la argumentación en matemáticas, ocho de los diez estudiantes considera que la argumentación es importante porque ayuda a entender problemas, razonamientos o demostraciones y, por tanto, es un soporte de tipo instrumental que sirve para que se siga adecuadamente la actividad matemática. Se mencionan otras características tales como que la argumentación ayuda a manejar objetos matemáticos, a consolidar conocimientos, a validar resultados o a generar hipótesis, a partir de las cuales construimos marcadores. Por otra parte, algunos estudiantes sugieren diferencias entre la argumentación matemática y la argumentación en general. Afirman que en la primera interviene el rigor matemático y, de ahí, la relacionan con la prueba o demostración. Aunque esta diferenciación no está mal encaminada, se nota de nuevo una cierta confusión de conceptos.

En la cuestión Q6, las caracterizaciones de la argumentación matemática vuelven a ser variadas aunque hay algunos rasgos comunes. Las respuestas presentan la confusión entre la argumentación matemática y su utilidad en la práctica matemática más amplia. En general, los estudiantes caracterizan la argumentación matemática en torno a la explicación y la demostración. Relacionan la argumentación matemática con la explicación de razonamientos, problemas o teorías al tiempo que con la demostración de teorías, conclusiones y procedimientos de resolución de problemas. Se establecen relaciones de distintos tipos, a veces partiendo de la finalidad de la argumentación, a veces de su función de apoyo y otras de la naturaleza misma de esta actividad.

Análogamente a los resultados relativos al primer objetivo, pasamos a comentar el proceso con el que se establecen los marcadores utilizados para el análisis de las respuestas a las cuestiones Q5 y Q6. Para la cuestión Q5, como ya hemos avanzado, se utilizan 1os marcadores “Soporte para entender”, “Soporte para consolidar”, “Soporte para manejar”, “Soporte para validar” y “Soporte para generar hipótesis”. Por ejemplo, en el caso del Estudiante 2, asignamos los marcadores “Soporte para entender”, “Soporte para validar” y “Soporte para consolidar conocimiento” en su respuesta:

> La argumentación es la forma de explicar el razonamiento matemático ya que permite ver si éste es correcto o no. El hecho de argumentar también ayuda a consolidar los conocimientos matemáticos.

El último marcador se desprende de la respuesta literal del estudiante. El marcador “Soporte para validar” se asigna porque el estudiante se refiere a la función de discernir entre razonamientos correctos e incorrectos. El marcador “Soporte para entender” se asigna porque el estudiante habla de argumentar como “forma de explicar el razonamiento matemático”, que es una forma de ayudar a entender este razonamiento, según nuestra definición de explicar.

Para el análisis de la cuestión Q6, se utilizan los marcadores “Explicar”, “Demostrar” y “Contrastar razonamientos”, según los alumnos expresen en sus respuestas aspectos relativos a estas tres prácticas, respectivamente. Por ejemplo, en el caso del Estudiante 1 asignamos los marcadores “Explicar” y “Demostrar” a su respuesta “Consiste en mostrar el procedimiento que se ha seguido y demostrar la conclusión a la que se ha llegado”. De la respuesta literal del estudiante se desprende el marcador “Demostrar”, mientras que “Explicar” se aplica tras interpretar que “mostrar un procedimiento” es exponerlo de forma clara y, por tanto, explicarlo.

Q5. ¿Por qué es importante la argumentación en el desarrollo del pensamiento matemático?	**Q6.** ¿En qué consiste la argumentación matemática?
Estudiante 1	
La argumentación es lo que hace tomar conciencia de los procesos que se han utilizado para resolver un problema. [**Soporte para entender**]	Consiste en mostrar el procedimiento que se ha seguido y demostrar la conclusión a la que se ha llegado. [**Explicar**], [**Demostrar**]
Estudiante 2	
La argumentación es la forma de explicar el razonamiento matemático ya que permite ver si éste es correcto o no. El hecho de argumentar también ayuda a consolidar los conocimientos matemáticos. [**Soporte para entender**], [**Soporte para validar**], [**Soporte para consolidar conocimiento**]	Es explicar el procedimiento y las causas del razonamiento que se ha seguido. [**Explicar**]

Estudiante 3	
Porque ayuda a pensar en cómo funcionan, se estructuran las cosas, y a poder resolver más fácilmente los problemas. [**Soporte para manejar**][**Soporte para entender**]	La argumentación matemática consiste en la demostración de problemas y teorías. Sirve para ayudar a explicar y resolver problemas planteados y facilitar su resolución.[**Demostrar**]
Estudiante 4	
Si tienes unas operaciones matemáticas delante pero nadie ha argumentado qué significan, por muchas matemáticas que sepas te costará entenderlo; en cambio, si tienes una argumentación, aunque no entiendas las matemáticas, podrías saber la resolución. [**Soporte para entender**]	Como ya he dicho antes, sirve para que cualquier persona pueda comprender el procedimiento que se ha llevado a cabo para resolver un problema o cuestión matemática. [**Explicar**]
Estudiante 5	
Sin argumentación la gente puede desconfiar del descubrimiento alguien ha realizado. Además, si en su momento se te da una argumentación del resultado obtenido, en un futuro tendrás más posibilidades de acordarte.[**Soporte para entender**], [**Soporte para consolidar conocimientos**]	Se basa en argumentar por medio de la ayuda de demostraciones todos los pasos seguidos en el desarrollo de un cálculo matemático. [**Demostrar**]
Estudiante 6	
Porque es lo que nos permite seguir un proceso lógico para resolver un problema según la información que se tenga. [**Soporte para manejar**]	Es demostrar siguiendo un proceso lógico que determinada cosa es cierta o falsa. [**Demostrar**]
Estudiante 7	
Porque sin una argumentación no se puede apreciar cómo se llega al resultado. [**Soporte para entender**]	La explicación mediante palabras, dibujos o expresiones de problemas abstractos. [**Explicar**]
Estudiante 8	
Da una explicación del razonamiento y ayuda a desarrollar temas con más facilidad y quizás de formas más accesibles. [**Soporte para entender**]	Creo que consiste en dar una explicación a un razonamiento o pensamiento a partir de las matemáticas y de todas sus posibles deducciones. [**Explicar**]
Estudiante 9	
Ayuda a ver los problemas con una visión diferente y a generar posibles hipótesis. [**Soporte para generar hipótesis**]	La argumentación matemática consiste en contrastar posibles razonamientos del problema, mirar cuál es la solución correcta (razonamiento) y cuál tiene que rechazarse.[**Contrastar razonamientos**]
Estudiante 10	
Porque es necesario demostrar lo que se ha hecho por medio de pasos, cuestiones…[**Soporte para entender**]	La argumentación matemática podríamos decir que consiste en demostrar una solución y rechazar otra. Todo esto, claro, dando demostraciones de paso, demostraciones matemáticas, demostraciones científicas. [**Demostrar**]

Tabla 2. Respuestas de los diez estudiantes a las preguntas Q5 y Q6

Conclusiones y reflexiones finales

El estudio exploratorio que hemos realizado responde a nuestro interés por la formación de los futuros maestros de matemáticas. Empezábamos este escrito precisamente justificando la necesidad de formar al futuro maestro en cuestiones de conocimiento del contenido matemático. El análisis de las respuestas de diez estudiantes a un cuestionario sobre la argumentación matemática ha permitido identificar carencias importantes en contenidos conceptuales y procedimientos básicos. Consideramos esto muy relevante ya que los estudiantes de la muestra serán maestros dentro de poco tiempo o como mínimo recibirán en breve un título que los habilitará para dar clases en la escuela primaria.

En la sección anterior hemos presentado algunos de los resultados preliminares que justifican la necesidad de continuar indagando sobre el conocimiento de la argumentación matemática para así entender mejor algunas de las problemáticas más acuciantes de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Nuestros datos muestran dificultades prácticas y de interpretación en torno a la argumentación matemática. En general y de modo resumido, hemos encontrado las siguientes carencias:

1. Confusión práctica entre distintos tipos de razonamiento, concretamente entre argumentación y explicación.
2. Dificultad para plantear preguntas que requieran argumentación.
3. Confusión teórica entre distintos tipos de razonamiento, concretamente entre explicación, argumentación y demostración.

Al empezar la actividad profesional, el maestro debe contar ya con las suficientes herramientas conceptuales y prácticas sobre la argumentación matemática, para poder trabajarlas con los alumnos, decidiendo cuándo se argumenta, explica, demuestra, enumera, conjetura, etc. El futuro maestro, además, debe aprender a plantear preguntas que requieran argumentaciones u otro tipo de discurso razonado en actividades escritas o por medio de conversaciones en el aula que orienten los procesos de razonamiento. Para ello, es necesario aprender a distinguir los principales tipos de razonamiento con los que se trabaja en matemáticas: explicaciones, argumentaciones, proposiciones, hipótesis y demostraciones, entre otros. Identificar razonamientos bien estructurados y aprender a plantear preguntas que faciliten la argumentación son capacidades de gran relevancia, por su importancia epistemológica dentro del desarrollo del pensamiento matemático y por la complejidad que supone su adquisición.

Somos conscientes de que conviene continuar con nuestra investigación para poder conocer con mayor detalle las carencias de los futuros maestros sobre la interpretación y el uso de la argumentación matemática, de modo que podamos introducir marcadores más finos en el análisis de los textos de los estudiantes y diseñar actividades que permitan obtener más información, ya sea diferente o complementaria a la recogida en esta primera investigación. En concreto, los trabajos sobre el conocimiento matemático de los futuros maestros deberían completarse con estudios empíricos en aulas de matemáticas de distintos niveles. En la actualidad y como reacción al exceso de aprendizajes mecánicos, son frecuentes las prácticas argumentativas en muchas aulas de matemáticas. Sin embargo, son necesarios estudios que analicen en profundidad el uso que maestros y alumnos están haciendo de estas prácticas, para garantizar que se estén tratando de una forma amplia que incluya el desarrollo de distintos tipos de razonamiento, junto con la comprensión de su papel dentro de la actividad matemática. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Badillo, E. y Edo, M. (2007). Taller de arte y geometría en el ciclo superior de primaria II: triángulos (2ª parte), en C. Tomás y M. Casas (coords.), *Educación Primaria: orientaciones, recursos, desarrollo curricular y experiencias* (1-25). Barcelona: Praxis.

Cobo, P. y Fortuny, J. M. (2007). AgentGeom: un sistema tutorial para el desarrollo de competencias argumentativas de los alumnos a través de la resolución de problemas. *Matematicalia,* 3(3), http://www. matematicalia.net.

De Gamboa, G. (2009). *Prácticas e interpretaciones en torno a la argumentación matemática de futuros maestros de educación primaria*. Trabajo de Maestría. Bellaterra: Universidad Autónoma de Barcelona, .

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Glaser, B. G. y Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory: strategies for qualitative research*. Londres: Weidenfeld & Nicolson

Godino, J. D. y Recio, Á. M. (2001). Significados institucionales de la demostración: implicaciones para la educación matemática, *Enseñanza de las Ciencias,* 19(3), 405-414.

Gresalfi, M., Martin, T., Hand, V. y Greeno, J. (2008). Constructing competence: an analysis of student participation in the activity systems of mathematics classrooms, *Educational Studies in Mathematics,* 70(1), 49-70.

Gutiérrez, A. (2005). "Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica, en A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (coords.), *Investigación en Educación Matemática* (27-44). Córdoba: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Homero, A. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática,* 19(1), 63-98.

Jorba, J. (1998). La comunicació i les habilitats cognitivo-lingüístiques", en J. Jorba, I. Gómez y À. Prat (coords.), *Parlar i escriure per aprendre: ús de la llengua en situació d'ensenyament-aprenentatge de les àrees curriculars* (37-58),. Bellaterra: ICE-UAB.

León, O. L. y Calderón, D. I. (2001). Validación y argumentación de lo matemático en el aula. *RELIME-Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 4(1), 5-21.

Perelman, C. yOlbrech-Tyteca, L. (1994). *Tratado de la argumentación.* Madrid: Gredos.

Plantin, C. (1998). *La argumentación*. Barcelona: Ariel.

RAE (2001). *Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española*. Madrid: Espasa Calpe.

Ribas, N. (2003). Exposar: relacionar les idees entre si, en N. Sanmartí (coord.), *Aprendre Ciències tot aprenent a escriure ciència* (149-168). Barcelona: Edicions 62, .

Sardà, A. (2003). Argumentar: proposar i validar models, en N. Sanmartí (coord.), *Aprendre Ciències tot aprenent a escriure ciència* (121-148). Barcelona Edicions 62.

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación*. Madrid: Península.

Este artículo fue recibido en SUMA en octubre de 2009 y aceptado en mayo de 2010