suma+ 63
Febrero 2010, pp. 43-48

Una división en que todos ganan: un caso de división justa

Generalmente las actividades que introducen el concepto de división consideran ésta en partes iguales. En este artículo presentamos otra posibilidad. El texto se basa en el trabajo realizado en un taller donde se discutieron y resolvieron los problemas relacionados con un tipo de división, denominada justa, que puede ser considerado distinto de los estudiados tradicionalmente: partición, agrupamiento o medida, operación inversa de la multiplicación o razón. En estas divisiones, más que determinar qué parte (en cantidad) corresponde a cada individuo, se pretende encontrar una parte que permita garantizar que todos queden satisfechos.

Palabras Clave: Innovación didáctica, aritmética, resolución de problemas, división justa.

A win-win division: a case of fair division

Usually the introductory activities to the concept of division consider the division in equal parts. This paper presents a new possibility. It is based in one workshop in which have been discussed some problems involving fair division. This kind of division is distinct of the ones studied traditionally, as sharing, grouping or measure, inverse operation of the multiplication or as reason.
In this kind of division, more than determine which part fits to each individual, the goal is to guarantee that all are satisfied with their own part.

Key words: Educational innovation, arithmetic, problem solving, fair division.

Este artículo está basado en un taller presentado en un Encuentro Nacional para Profesores de Infantil y Primaria. En este encuentro se pretenden promover momentos de encuentro y reflexión entre docentes del Primer Ciclo de Enseñanza Básica,[1] Educadores de Infancia, estudiantes y otros profesionales vinculados a estos niveles de enseñanza y promover el intercambio de conocimientos y experiencias relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas durante los primeros años de escolaridad. En este texto, a pesar de estar basado en las actividades trabajadas en el taller presentado en ese encuentro, se efectúa un enfoque un poco más amplio, en el sentido de considerar las situaciones más generales, pero siempre basado en las tareas propuestas y en las actividades desarrolladas.

Desde que nacemos, todos nosotros sabemos realizar, aunque sea de manera informal, las operaciones aritméticas más básicas. Una de las operaciones aritméticas que tradicionalmente trae mayores complicaciones a nuestros alumnos es la división, al igual que la substracción. Sin embargo, este hecho no debería ocurrir pues es una de las primeras que interiorizamos (de modo no formal). Aprendemos muy pronto a dividir cosas (mucho antes incluso muchos de los que no somos hijos únicos); ya de bebés, las atenciones de los padres y abuelos; cuando somos un poco mayores, los juguetes, las golosinas, el cariño y las atenciones. A medida que nos hacemos mayores, aprendemos a dividir otras cosas tales como deberes, responsabilidades, culpa...

A nivel escolar, y a pesar de que la operación de la división forma parte del Programa de tercer curso de Primária (DEB, 2001) –particularmente el algoritmo– el contacto con el concepto de división debería acontecer lo antes posible, incluso ya en Infantil (DEB,1997), de modo que los alumnos vayan progresando a su ritmo en el aprendizaje y en la interiorización de estos conceptos en cuestión, aunque no sea necesariamente de forma explícita.

La división, tal como es entendida en el ámbito escolar, puede ser considerada como partición, agrupamiento o medida, operación inversa de la multiplicación o como razón. Las actividades que introducen el concepto de división (para que

C. Miguel Ribeiro
Centro de Investigação sobre Espaços e Organizações (CIEO)
Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve (Portugal)

los alumnos construyan por sí solos los aprendizajes matemáticos significativos) están relacionadas con las actividades que consideran la división como partición en partes iguales.

Un problema típico de división es el de la división de lápiz (o de cualquier otro conjunto de objetos familiares para los estudiantes) por un determinado conjunto de alumnos. Si pretendemos dividir, por ejemplo, veinticuatro lápices entre cuatro alumnos, éstos afirman, con mayor o menor facilidad, que cada uno se queda con seis. Es necesario señalar, sin embargo, que esta respuesta no es la única correcta, ya que, a pesar de considerarlo obvio, y de que los alumnos lo sobrentiendan la mayoría de las veces, no se dijo que la partición tenía que ser equitativa, por lo que cualquier descomposición de 24 en cuatro conjuntos distintos es una respuesta admisible.

Consideremos ahora una situación en la que tengamos que dividir, no lápices iguales, sino veinticuatro caramelos entre cuatro alumnos: Ana, Pepe, Cinta y Luís. Si consideramos que los caramelos son sustancialmente diferentes (marcas, tamaños, colores, sabores, textura,…) y tenemos en cuenta los gustos propios de cada alumno, en este caso, ¿la respuesta seguiría siendo seis caramelos para cada uno, quedando todos satisfechos?

Para solucionar este tipo de problema, que tiene que ver con las características de lo que se pretende dividir, y con las preferencias y gustos de las personas entre las que se va a dividir, tendremos que efectuar una división para que todos queden satisfechos, no siendo ésta, por tanto, necesariamente equitativa en cantidad, sino en valor, pues será el modelo considerado por todos.

En este caso particular, dependiendo del tipo de caramelos, podrá haber alumnos que prefieran quedarse con una cantidad inferior, siempre que garantice que se queda con los que le gustan (los que no le gustan no tendrían, para él, ningún valor, por lo que le darían igual). Obsérvese que, si sustituimos los caramelos por: diamantes, obras de arte, terrenos, casas, coches,… tal vez pasemos a considerar que la división con estas características, de este modo, no es tan sencilla como parece a primera vista.

Este tipo de problemas se enmarca dentro de lo que se entiende por división justa.

Un poco de historia

Este tipo de problemas, de división justa, es antiquísimo, y una de sus representaciones más conocidas es la historia del Rey Salomón y de las dos mujeres que reclamaban como su hijo un bebé recién nacido. Adoptando una aparente postura de aplicación de la división como reparto en partes iguales, el rey Salomón propuso, como solución, que se cortase al niño a la mitad y que cada mujer recibiese una de las dos partes, una división totalmente inaceptable para la verdadera madre, que prefería que el niño se quedase con la otra mujer, a que lo matasen. De esta forma el rey Salomón no tuvo ninguna duda en entregar el niño a su verdadera madre.

Esta situación ilustra la gran diferencia entre considerar la división como partición equitativa (en número) o justa (equitativa en valor).

Matemáticamente, los problemas de división justa se pueden explicar de una forma relativamente sencilla:

> ¿Cómo puede dividirse algo (un bien o conjunto de bienes) entre un conjunto de partes de tal forma que cada una de ellas reciba una parte justa?

Independientemente de lo que estemos dividiendo (de manera justa), caramelos, obras de arte, coches, terrenos…, todos los problemas comparten los mismos elementos esenciales, a saber: (a) *Un conjunto de bienes que dividir, y que para facilitar denominamos S* y (b) *Un conjunto de n "jugadores" entre los que se dividirán las partes de S, jugadores que denominaremos P1, P2…, Pn*

Hay que destacar que cuando estamos realizando una división justa debemos considerar que ninguno de los jugadores tiene conocimiento de las preferencias de los restantes, pues, si eso sucediera, estaría en una situación de ventaja. Así, para que todos los *n* jugadores consideren que se realizó una división justa es necesario que cada uno de ellos reciba una parte que considere valer, para él mismo, por lo menos, *1/n* del total del valor del bien que se pretende dividir (*S).* En divisiones de este tipo –justas– sólo interesa el valor que cada jugador atribuye a la parte que le corresponde, siendo así irrelevante lo que los otros piensan.

Cuando pretendemos dividir un determinado conjunto de bienes, éste puede ser de varios tipos: continuo, discreto o mixto. Un conjunto de bienes es de tipo continuo cuando es divisible en un número infinito de modos (pasteles, pizzas, helados, terrenos,…), por lo que las partes pueden aumentar o disminuir; es de tipo discreto, cuando está compuesto por objetos indivisibles –por lo menos en el sentido de mantener su valor– (caramelos, bombones, cuadros, casas, coches, joyas…); es de tipo mixto, cuando está compuesto por objetos de los dos tipos anteriores.

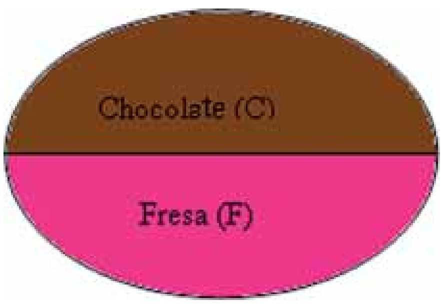
En este texto se presentan procesos para efectuar una división justa de tipo continuo o discreto. Estos procesos de resolución son necesariamente distintos, ya que tendremos que tener en cuenta no sólo las preferencias de los jugadores sino también la posibilidad, o no, de división de cada uno de los elementos del conjunto.

Veamos cada situación por separado, comenzando por la división de tipo continuo, en la cual presentamos dos situaciones (división entre dos jugadores o entre tres) y división de tipo discreto (división entre jugadores). En cuanto a la situación de la división de tipo continuo veremos dos procesos distintos.

En el caso de una división justa de tipo continuo vamos a considerar que pretendemos dividir una tarta entre dos o tres jugadores, y en la división de tipo discreto veremos cómo podemos dividir los 24 caramelos, atendiendo a sus características, entre cuatro alumnos, considerando asimismo las preferencias de estos últimos.

Para ilustrar el primer proceso imaginemos la siguiente situación:

> Para un concurso se preparó una tarta con dos sabores distintos: fresa y chocolate, distribuidos, cada uno de ellos entre cada una de las mitades de la tarta solamente. ¿Cómo podemos dividir la tarta entre Pepe y Cinta de modo que ambos queden satisfechos con la parte que les corresponde?



Este problema aparece con frecuencia cuando se pretenden abordar los racionales, pues a cada uno le tocará, obviamente, la mitad de la tarta. Sin embargo, en este contexto, lo importante es, además de eso, determinar qué mitad recibe cada uno, puesto que, más que la cantidad, lo importante, en este caso, es el valor que cada uno atribuye a la parte que le corresponde. Para realizar una división de este tipo (justa y continuo), y una vez que el bien, en este caso la tarta, se va a dividir en *n* partes (dos), alguien tendrá que dividirlo, por lo que, en primer lugar, es necesario decidir quién lo hará. Esa opción, puesto que es una situación de desventaja, deberá realizarse de manera aleatoria, por ejemplo, con el lanzamiento al aire de una moneda.

Después de elegir quién divide la tarta –el *divisor*– es el momento de efectuar la división. Para facilitar la operación consideremos que el divisor es Pepe y la que escoge, Cinta. De este modo, Pepe (divisor) divide la tarta en dos partes, que valen, para él, la mitad del valor que él da a la tarta. Cinta –*el elector*– escoge la parte que quiere, dejando la restante para Pepe.

Este proceso, normalmente conocido por "tú divides y yo elijo", cuando se hace honestamente (sin que el jugador conozca las preferencias del otro) garantiza que cada jugador se queda con una parte que considera valer, por lo menos, el 50% del valor total, y puede utilizarse siempre que exista un caso de división de tipo continuo. En esta situación, dependiendo de los gustos del divisor, y por tanto, de la división efectuada, el que elige puede escoger una parte que represente, para él, más de la mitad del valor total.

Un ejemplo, en la situación antes mencionada, en que el elector se queda con una parte que considera que vale más de la mitad del bien, es que a Cinta sólo le guste la fresa y que Pepe divida la tarta de modo que cada parte se quede sólo con un sabor. En este caso, Cinta se quedaría con una parte que representa, para ella, la totalidad de la tarta, pues dejaría a Pepe la parte de chocolate que no tiene, para ella, ningún valor.

Veamos cómo podemos dividir la tarta de la situación anterior no sólo entre Pepe y Cinta, sino también entre otro amigo (Luís), de modo que todos queden satisfechos con su parte, o sea, que les toque una parte que consideren que vale, por lo menos, 1/3 del valor de la tarta.

A semejanza de la situación en que sólo estaban los dos amigos, podemos utilizar el proceso de un divisor, y necesariamente dos electores (*divisor solitario)* o bien dos divisores y un elector (*elector solitario).*

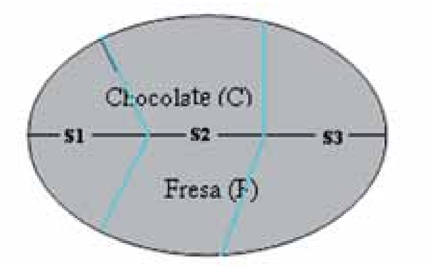
Se constata fácilmente que los métodos y las situaciones presentadas se pueden generalizar, sin gran dificultad, en situaciones donde aparecen más de tres jugadores, por lo que presentaremos cada uno de los métodos solamente para la situación en que haya tres jugadores.

Véase cómo realizar una división justa de tipo continuo aplicando los dos métodos.

Método del divisor solitario (un único divisor)

Como indica el nombre, en este método existe un único divisor que, tal y como ya se ha explicado anteriormente, debe elegirse al azar. Consideremos a Pepe el divisor y a Cinta y Luís los electores. Para realizar una división justa utilizando el método del divisor solitario tendremos que seguir tres pasos: dividir, escoger y, finalmente, distribuir.

En el primer paso el divisor (Pepe) divide el conjunto en tres partes, S1, S2 y S3.



El divisor tendrá mucho interés en dividir el conjunto S de modo que cada una de las tres partes tenga el mismo valor (por lo menos para él, pues para los otros dos jugadores pueden tener valores diferentes), ya que va a recibir una de esas partes.

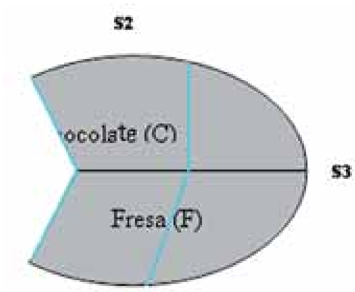
En el segundo caso cada elector lleva a cabo su elección. Ésta deberá efectuarse de forma secreta e independiente, pues en esta situación, vista en una perspectiva de juego, ambos quieren ganar, o sea, recibir la parte que tiene, para cada uno, mayor valor. Varias situaciones pueden ocurrir: los electores pueden escoger una única parte –significando que ésa es la única que tiene para él valor (1/3 del total)–; pueden escoger dos de las partes –atribuyendo por tanto el mismo valor a ambas, y les dará igual cuál de las dos escogidas le tocará–; o escoger inclusivamente las tres partes, siendo así indiferente cuál de ellas le corresponde, y valiendo para cada uno, por tanto, cada una de ellas exactamente 1/3 del valor total (equivalente a la división equitativa en número).

Después de escogida(s) la(s) parte(s), en el tercer paso tendremos que realizar entonces su distribución entre los jugadores de manera que la parte que corresponde a cada uno de ellos depende, obviamente, de sus elecciones. Recordemos que sólo los electores han podido escoger, pero pueden haber escogido una, dos o incluso las tres partes, por lo que puede haber partes que no hayan sido escogidas, y que para el divisor cualquiera de ellas tenga el mismo valor.

Por una cuestión de simplificación vamos a separar las partes en dos grupos: las elegidas y las no elegidas. Las primeras son las partes que constan de las elecciones de uno o de ambos electores, y las no elegidas son las partes que no se eligieron.
Si en el conjunto de las partes elegidas están dos o incluso las tres partes, es inmediatamente posible dar a cada elector una parte que haya seleccionado como que valga 1/3 del total pues, si ambos han escogido las tres partes, entonces significa que les da igual las partes que les corresponden y, mediante acuerdo, pueden decidir qué parte otorgar al divisor (éste se queda entonces con la parte que no quieren los otros, a pesar de que cada parte tiene el mismo valor para el divisor; este paso ilustra bien la frágil posición que posee); si en el conjunto de las partes escogidas existen sólo dos de las partes, significa que cada uno de los electores ha escogido una, quedándose así cada uno de ellos con la parte correspondiente a la elección que realizó. De este modo, todos los jugadores reciben una parte que consideran justa.

Si, por otro lado, en el conjunto de las partes escogidas existe sólo una de ellas en que se ha dividido la tarta (conjunto *S*), entonces significa que los dos electores han escogido la misma parte (por ejemplo *S1).* Así, Pepe se quedará con con *S2* o *S3*. La cuestión ahora es saber cuál de las partes no escogidas están dispuestos a conceder los dos electores, ya que la parte con la que se queden tendrá que entrar en la división entre ellos. La mejor manera de solucionar este problema será por medio del diálogo entre ambos, para decidir cuál de las partes pretenden dar al divisor (si no llegasen a un acuerdo podría tomarse la decisión lanzando una moneda al aire, pues sería indiferente qué parte dan).

Una vez atribuida una de las partes al divisor, digamos *S3*, queda entonces *S1* y *S2* para repartir entre los dos electores (razonamiento análogo para *S2).*



Entonces, ¿cuál es la mejor manera de dividir las dos partes entre los dos? Como estamos realizando una división justa de tipo continuo, y tenemos dos conjuntos que queremos dividir de manera justa entre dos personas, el mejor proceso es juntar ambos y formar un conjunto solamente que se dividirá aplicando el método dividir/escoger.

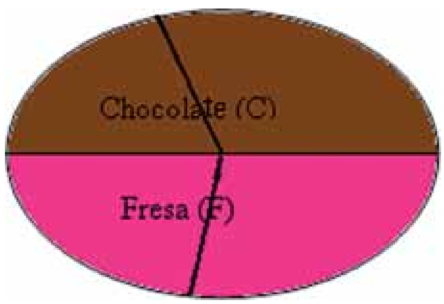
Obsérvese que, de este modo, el divisor recibe una parte que vale para él, por lo menos, un tercio del total –pues ha sido él el que ha dividido la tarta (conjunto *S*), en partes, para él, de valor equitativo– y los dos electores van a recibir, tras las aplicaciones del método divide/escoge, una parte que valdrá, para cada uno de ellos, más de un tercio del valor del conjunto inicial, esta valorización se une al hecho de que cada uno de ellos ha otorgado al divisor una parte (*S1*) que no tenía ningún valor para ellos, por lo que la parte con la que se va a quedar cada uno de ellos valdrá, por lo menos, la mitad del valor total. En esta situación específica, donde dividimos una tarta entre tres amigos, todos se quedan con una parte que consideran justa y dos de ellos se quedan con una parte que consideran que vale, por lo menos, la mitad.

Método del elector solitario (un único elector)

Si optamos por el método del elector solitario, partiendo de una situación con tres jugadores, tendremos un elector y dos divisores. Consideremos que en esta situación Pepe es el elector y Cinta y Luís los divisores.

Tendremos entonces, también en este caso, tres pasos que seguir: primera división, segunda división y finalmente la selección.

En el primer paso los dos divisores (elegidos al azar), Cinta y Luís, dividen la tarta (conjunto *S*) en dos partes que consideran justas –utilizando el método divide/escoge– y asumiendo, por tanto, en esta fase, uno de ellos el papel de divisor y otro el de elector, pero es sólo un paso intermedio. Denominemos cada una de esas partes también *S1* y *S2*.



En el segundo paso cada uno de los divisores divide la parte que le corresponde (después de la primera elección) por ejemplo, *S1* para Cinta y *S2* para Luís, en tres partes que considere que tienen igual valor (S11, S12, S13 y S21, S22 y S23)

El tercer paso, que tiene que ver con la selección, es realizado por el elector (Pepe) que va a escoger una de las tres partes de *S1* (S11, S12 o S13) y una de las tres partes de *S2* (S21, S22 o S23) obteniendo, de esta forma, un conjunto que vale, para él, 2/6 del valor total. Los otros dos amigos (electores) se quedan con las dos partes restantes. La división así realizada se considera justa por todos los implicados, pues para Cinta la parte *S1* valía, por lo menos, la mitad de la tarta, y se ha quedado con 2/3 de esa mitad (2/6 del total), lo que representa, en su opinión, una parte justa. Del mismo modo, Luís, el otro divisor, se ha quedado con la parte que considera valer, por lo menos, 1/3 del total de la tarta.

División justa de tipo discreta

Volvamos al punto de partida de nuestra motivación en que se pretendía dividir 24 caramelos entre cuatro niños. Esta división cuenta con rasgos muy característicos ya que incluye bienes discretos. Para realizar esta división necesitamos construir tres tiras de papel para cada alumno donde escribirán su nombre y a las cuales daremos un nombre de marcas. (En el caso de que pretendamos dividir una determinada cantidad de bienes discretos entre un conjunto *n* de jugadores, y ya que tenemos que dividir el conjunto en *n* partes, tendremos que suministrar *(n-1)* marcas.)

Para efectuar la división justa de este tipo colocamos los caramelos en línea recta, aleatoriamente, y pedimos a los alumnos que dividan el conjunto en cuatro partes, aisladamente y sin decírselo a los compañeros, de manera que cada una de ellas sea con la que ellos se quedarían satisfechos, o sea, que todas posean, para sí mimos, igual valor. Hecho esto, cada alumno (jugador), deberá colocar sus marcas en las posiciones escogidas para que se pueda dar inicio entonces al proceso de división.

Como forma de ilustrar el proceso de división presentamos una posible disposición de los caramelos y de la colocación de las marcas por los cuatro alumnos (Ana, Pepe, Cinta y Miguel).

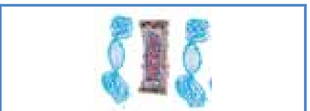
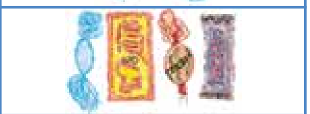
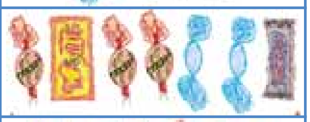
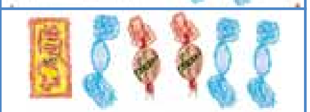
Después de realizar las elecciones, cada alumno ha dividido los veinticuatro caramelos en cuatro partes que tienen, para cada uno, igual valor, a pesar de que poseen cantidades distintas.

En cada paso que efectuamos (cada distribución que se haga), retiramos las restantes marcas del alumno. De este modo podemos distribuir los tres primeros caramelos de la izquierda para Ana y retirar todas sus marcas (da igual comenzar por la izquierda o por la derecha).

En este segundo paso podemos actuar de dos formas: dar a Pepe los cuatro caramelos de la derecha o dar a Miguel los caramelos que se encuentran entre sus marcas primera y segunda (última marca del primer conjunto). Dependiendo de la elección que hagamos, los alumnos pueden recibir diferentes caramelos, pero que valen, para cada uno, exactamente lo mismo, un cuarto del valor total (en esta situación da igual hasta la forma como hagamos la distribución). Atribuyendo a Pepe los cuatro caramelos de la derecha, y retirando sus restantes marcas obtenemos:

Sólo nos queda distribuir los caramelos entre dos de los alumnos (Miguel y Cinta). Así, a Miguel le tocarán los caramelos colocados entre sus marcas 1 y 2 y a Cinta los caramelos entre sus marcas 2 y 3. Hay que destacar que no podemos dar a Miguel los caramelos entre sus marcas 2 y 3, pues de ese modo no sería posible atribuir a Cinta un conjunto que ella considerase que vale una cuarta parte del valor de los caramelos, ya que estaríamos quitándole uno de los caramelos –el situado entre M2 y J2.

Con esta distribución cada uno de los cuatro alumnos se quedó con una parte que considera valer, por lo menos, un cuarto del valor de los caramelos:

Ana	
Pepe	
Cinta	
Miguel	

Pero como resultado de esta división justa existen todavía caramelos que no se han distribuidos

y la mejor forma de hacerlo –ya que todos poseen una parte que consideran justa-, es realizar la distribución por mutuo acuerdo. Con este tipo de división cada alumno recibe una parte que considera justa e incluso un caramelo extra.

Con este ejemplo podemos concluir que, realizando divisiones justas, no necesariamente equitativas, todos los participantes ganan. Será pertinente comprobar qué tipos de divisiones debemos aplicar en cada una de las situaciones, pues dividir un determinado conjunto entre una serie de jugadores no significa necesariamente que todos reciban una parte igual -en lo que se refiere a tamaño o cantidad- sino una parte de igual valor, ya que por lo menos este último es atribuido por cada uno de ellos.

Este tipo de actividades permite que los alumnos entren en contacto con otra forma de dividir, en que obviamente es imposible aplicar ningún algoritmo de papel y lápiz, lo que les permitirá también conscienciarse de sus gustos y de la importancia de sus tomas de decisión en el producto final.

NOTAS

[1] En Portugal el Primer Ciclo incluye los primero cuatro años de escolaridad (alumnos con edades comprendidas entre los 6 y los 9 años, en condiciones normales) y donde existe, hasta el momento, un único profesor para todas las áreas curriculares.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Departamento de Educação Básica (DEB). (1997). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar*. Lisboa: Ministério da Educação.

Departamento de Educação Básica (DEB). (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.

Este artículo fue recibido en SUMA en Octubre de 2008 y se aceptó en Enero de 2010