suma+ 62
Noviembre 2009, pp. 11-18

Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas

En este trabajo realizamos un análisis semiótico de los objetos y procesos matemáticos implícitos en algunas soluciones correctas posibles del problema de Monty Hall. También se describen los razonamientos erróneos más frecuentes en su solución, explicándolos en términos de conflictos semióticos. Concluimos con las posibilidades de uso de este problema en la enseñanza y formación de profesores.

In this paper we carry out a semiotic analysis of the mathematical objects and processes that underlie some possible correct solutions to the Monty Hall problem. We also explain some of the most frequent incorrect reasonings in its solution in terms of semiotic conflicts. We conclude with the possibilities of this problem in the teaching of probability and in the training of teachers.

Introducción

La comprensión y correcta aplicación de la probabilidad condicional es fundamental en la vida diaria y las aplicaciones de la Estadística, porque permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios a medida que adquirimos nueva información (Díaz y de la Fuente, 2005). Ello explica que este tema se introduzca en la enseñanza secundaria (MEC, 2007). Sin embargo, muchas investigaciones muestran la existencia de intuiciones incorrectas en la aplicación de este concepto y la enseñanza formal es insuficiente para superarlas. Es necesario que el alumno se haga consciente de estas dificultades y aprenda a afrontar los problemas condicionales con unas herramientas adecuadas.

En este trabajo analizamos un juego (para el cual existen simuladores en Internet) que podría ser útil para lograr enfrentar a estudiantes con algunas de estas intuiciones incorrectas, incluso en cursos de formación de profesores. El juego está inspirado en el concurso televisivo *Let's Make a Deal* (Hagamos un trato), emitido entre 1963 y 1986 en la televisión americana y su nombre proviene del presentador del concurso, Monty Hall. El concurso generó bastante polémica en relación a posibles soluciones del problema matemático latente y muestra las intuiciones incorrectas en relación a la probabilidad condicional. La formulación más conocida de dicho problema (Bohl, Liberatore y Nydick, 1995) se reproduce a continuación:

Supón que estás en un concurso, y se te ofrece escoger entre tres puertas: detrás de una de ellas hay un coche, y detrás de las otras cabras. Escoges una puerta, digamos la nº 1, y el presentador, que sabe lo que hay detrás de las puertas, abre otra, digamos la nº 3, que contiene una cabra. Entonces te pregunta: ¿No prefieres escoger la nº 2? ¿Es mejor para ti cambiar tu elección?

El problema original fue planteado por Selvin (1975 a y b). Un problema análogo denominado "problema de los tres prisioneros", fue publicado por Gardner (1959), aunque su versión hace el proceso de elección explícito, evitando las suposiciones de la versión original. En este trabajo primero estudiamos las posibles soluciones correctas al problema de búsqueda de la mejor estrategia en el juego. Seguidamente, basados en elementos tomados de Godino, Font y Wilhelmi (2008) analizamos los sistemas de prácticas y objetos matemáticos implíci-

Carmen Batanero Bernabeu
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
José António Fernandes
Departamento de Metodologias da Educação. Universidade do Minho. Portugal.
José Miguel Contreras García
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

tos en estas soluciones correctas y algunos posibles conflictos semióticos. Finalizamos con algunas conclusiones sobre la idoneidad didáctica del trabajo con este problema en cursos de formación de profesores.

Solución matemática del problema de Monty Hall

Cuando se trabaja con el problema de Monty Hall, en un curso de probabilidad, podemos hacer a los estudiantes alguna pregunta del tipo: *¿Debe el concursante mantener su elección original o escoger la otra puerta? ¿Hay alguna diferencia entre cambiar o no?* Les pediremos que justifiquen su decisión con un argumento de tipo probabilístico.

La solución consiste en ver qué tipo de jugador tiene la mayor probabilidad de ganar el coche, el que nunca cambia de puerta o el que cambia siempre. En caso de que los estudiantes no logren dar la solución o den una solución errónea (lo cuál es lo más frecuente), se puede dar oportunidad de simular el juego usando uno de los *applets* disponibles en Internet y obtener datos experimentales que les ayuden a intuir la solución correcta.

Solución intuitiva 1

Con ayuda de un diagrama en árbol podemos ver las distintas posibilidades. Hay dos puertas sin premio y una con premio. Por tanto la posibilidad de elegir la puerta premiada es $\frac{1}{3}$. Si no cambiamos solo tenemos $\frac{1}{3}$ de posibilidades de ganar y $\frac{2}{3}$ de perder. Si, por el contrario, cambio de puerta, la probabilidad de ganar será la misma que elegir inicialmente la puerta sin premio, es decir $\frac{2}{3}$.

Solución intuitiva 2

Consideramos, en primer lugar, el experimento "puerta que tiene el premio" (cada puerta tiene probabilidad $\frac{1}{3}$). A continuación, consideramos la puerta que se elige ($\frac{1}{3}$ cada puerta). Estos dos primeros experimentos son independientes. El tercer experimento es la puerta que abre el locutor, que es dependiente de los anteriores (Figura 1).

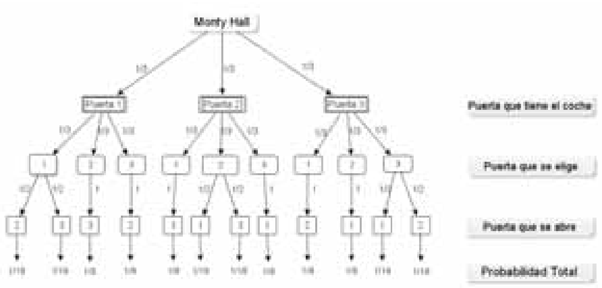

Figura 1: Diagrama de árbol ilustrando el juego

Observamos que si no cambiamos de puerta, sumando las probabilidades de todas las ramas del árbol (elegir puerta 1 si el coche está en la 1; elegir puerta 2, si el coche está en la puerta 2 y elegir puerta 3 si el coche está en la 3), las posibilidades de ganar son de $\frac{1}{3}$. Cada uno de estos sucesos compuestos tiene probabilidad $\frac{1}{9}$.

Suponemos que cambiamos. Si escogemos una puerta con una cabra, el presentador muestra la otra cabra. Cambiamos (a la puerta que tiene el coche) y ganamos. Por ejemplo, si estando el coche en la puerta 1, elegimos la puerta 2, el presentador nos muestra la puerta 3 y sólo podemos cambiar a la 1, que es la que tiene el coche. Este suceso tiene probabilidad $\frac{1}{9}$. Lo mismo ocurriría si estando el coche en la puerta 1, elegimos la 3.

Si elegimos la puerta con coche, el presentador nos muestra una de las dos puertas que tiene la cabra. Si estando el coche en la puerta 1, elegimos la puerta 1, el presentador te abre bien la puerta 2 o la 3, cada una de ellas con probabilidad $\frac{1}{18}$, en total $\frac{1}{9}$. Si cambiamos de puerta perdemos con probabilidad $\frac{1}{9}$. Como hay tres puertas, la probabilidad total de ganar cambiando sería $\frac{2}{3}$ y la de perder cambiando sería $\frac{1}{3}$.

Solución experimental

El trabajo de los alumnos con el *applet*, experimentando con el juego, proporciona a los estudiantes una experiencia intuitiva sobre los resultados que se obtienen en este juego con cada una de las dos estrategias, cambiar o no cambiar de puerta. Partiendo de la evidencia de estos resultados, claramente se observa experimentalmente que las posibilidades de ganar el juego son el doble al cambiar la puerta. El alumno ve sus intuiciones contradichas. Es decir, se produce un conflicto cognitivo y al tratar de resolverlo, eventualmente, puede llegar a uno de los razonamientos intuitivos mostrados anteriormente.

Teniendo en cuenta que los resultados son aleatorios, deberíamos realizar el juego un número de veces considerable para que los resultados se ajusten a la solución del problema, pero el ordenador permite un gran número de simulaciones rápidamente. El *applet* nos proporciona una solución experimental sobre cuál es la estrategia ganadora, pero no nos explica la razón de por qué una estrategia es preferible a la otra. Será necesario que el profesor trate de reconducir al estudiante a una de las soluciones intuitivas anteriores o las formales, que se presentan a continuación.

Solución formal 1

La solución formal de este problema utiliza las propiedades de la probabilidad condicionada, que es un objeto cuya definición es sencilla de entender pero difícil de aplicar. Para llegar a la solución definimos los siguientes sucesos:

A: El jugador selecciona la puerta que contiene el coche en su selección inicial.
B: El jugador selecciona una puerta que contiene una cabra en su selección inicial.
G: El jugador gana el coche.

Estamos interesados en calcular $P(G)$ para cada tipo de jugador, el que cambia de puerta y el que no cambia. Para calcular $P(G)$, basta con notar que $G=(G\cap A)\cup(G\cap B)$, ya que $G\cap B=\emptyset$ y $A\cap B=\Omega$. Esto es equivalente a decir que $\{A, B\}$ es una partición de Ω, siendo Ω el espacio muestral del experimento; por tanto, aplicando el axioma de la unión de probabilidades.

$$P(G)=P((G\cap A)\cup(G\cap B))=P(G\cap A)+P(G\cap B)=$$
$$=P(G|A)P(A)+P(G|B)P(B)$$

Por aplicación de la regla de Laplace: $P(A)=\frac{1}{3}$ y $P(B)=\frac{2}{3}$ pues hay un coche y dos cabras. Finalmente, tenemos que calcular la probabilidad de ganar de cada tipo de jugador:

Jugador que nunca cambia: En este caso $P(G|A)=1$ y $P(G|B)=0$ Por lo tanto, $P(G)=\frac{1}{3}$.

Jugador que siempre cambia: En este caso $P(G|A)=0$ y $P(G|B)=1$ Por donde, $P(G)=\frac{2}{3}$.

Solución formal 2

Sea $\xi: (\Omega,P)\rightarrow\{1,2,3\}$ la variable aleatoria que asigna un número de puerta (aquella detrás de la cual se encuentra el coche). Esta variable aleatoria tiene distribución discreta uniforme (es decir todos los valores son equiprobables) y son estocásticamente independientes.

Sea $\phi: (\Omega'', P'')\rightarrow\{n\}$ la variable aleatoria número de la puerta que abre el presentador y que dependerá de las anteriores. Si $\eta=\xi$ (el concursante elige el coche), entonces hay dos posibles valores con probabilidad ½ (los números de las dos puertas no elegidas por el concursante). En caso contrario, sólo hay un valor, con probabilidad 1 (el número de la puerta sin coche). La probabilidad que el concursante se lleve el coche bajo el supuesto que él no cambia de puerta es entonces $P(\eta=\xi)=\frac{1}{3}$. La probabilidad que el candidato se lleve el coche bajo el supuesto que él cambia de puerta es entonces $P(\eta\neq\xi)=\frac{2}{3}$.

Objetos matemáticos puestos en juego

Presentadas algunas soluciones (intuitivas, experimentales y formales), analizaremos la actividad matemática realizada en estas soluciones recurriendo al marco teórico desarrollado en Godino (2002) y Godino, Batanero y Font (2007). Los autores describen diferentes categorías en los objetos ligados a las prácticas matemáticas, que pueden ser previos (si el alumno los conocía ya) o emergentes (si los aprende durante la práctica):

Situaciones-problemas: aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, problemas, acciones que inducen una actividad matemática. En nuestro caso el problema es la búsqueda de una estrategia óptima en el juego de Monty Hall.

Lenguajes: cualquier forma de representar los objetos matemáticos. En las soluciones analizadas hemos usado diagramas en árbol, símbolos, palabras. En la solución experimental también usamos el lenguaje gráfico e icónico.

Conceptos-definición: en las prácticas que llevan a cabo los estudiantes para resolver un problema matemático se usan implícita o explícitamente conceptos matemáticos, de los cuáles el alumno ha de recordar o aplicar la definición. Por ejemplo, los estudiantes usarán implícitamente o explícitamente los objetos: aleatoriedad, espacio muestral, suceso, probabilidad simple, probabilidad condicional, probabilidad conjunta, independencia, frecuencia relativa.

Proposiciones o enunciados sobre relaciones o propiedades de los conceptos que igualmente se han de emplear al resolver problemas matemáticos. Por ejemplo, cuando los estudiantes tienen que recordar que la suma de probabilidades en el espacio muestral es igual a la unidad. En la solución experimental se usaría la ley de los grandes números.

Procedimientos: en nuestro caso, usamos la regla de Laplace, regla del producto y regla de la suma de probabilidades, enumeración de sucesos, construcción del diagrama en árbol, operaciones aritméticas, ejecutar el *applet* y comparar frecuencias.

Argumentos: son los enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos o bien la solución de los problemas.

Al resolver matemáticamente el juego mediante las soluciones anteriores se utilizan los objetos matemáticos que se muestran en la Tabla 1. Observamos que, dependiendo de la solución, se puede usar una configuración diferente de objetos matemáticos, siendo más complejas las soluciones formales, especialmente la segunda que involucra la idea de variable aleatoria. Tanto el juego como el tipo de solución determinan el trabajo matemático que se hace en la clase. Ello hace que se pueda trabajar a diversos niveles de profundidad, dependiendo del tipo de estudiante.

Tipo	Objetos matemáticos en la situación	Significado en la situación	Sol. Int. 1	Sol. Int. 2	Sol. Exp.	Sol. For. 1	Sol. For. 2
Problema	Elección de la puerta	Determinar la estrategia que da mayor número de éxitos	X	X	X	X	X
Lenguaje	Verbal	Explicación de la situación	X	X	X	X	X
	Gráfico	Diagrama en árbol Representación icónica del juego	X	X			
	Simbólico	Expresión de sucesos y probabilidades				X	X
	Numérico: Probabilidades	Probabilidades de cada suceso	X	X		X	X
	Numérico: Frecuencias	Resultados del experimento			X		
	Icónico	Iconos que representan los sucesos y resultados			X		
Conceptos-Definición	Experimento aleatorio	Elegir una puerta Puerta que abre el locutor Ganar el premio	X X X	X X X	X X X	X X X	X X X
	Sucesos; espacio muestral	Puertas 1, 2, 3 Ganar/no ganar	X X	X X	X X	X X	X X
	Experimento compuesto	Composición de los experimentos anteriores	X	X	X	X	X
	Sucesos en el experimento compuesto	Producto cartesiano de los espacios muestrales anteriores	X	X	X	X	X
	Frecuencia relativa	Exitos / número experimentos			X		
	Convergencia	Tendencia de la frecuencia a la probabilidad			X		
	Intersección de sucesos	Parte común de un conjunto de sucesos				X	
	Unión de sucesos	Conjunto que contiene los sucesos de uno u otro conjunto				X	
	Suceso imposible	Intersección de un suceso y su complementario				X	
	Probabilidad clásica	Proporción de casos favorables a posibles	X	X		X	X
	Probabilidad frecuencial	Límite de la frecuencia			X		
	Axiomas probabilidad	Explicitación de los axiomas				X	X
	Probabilidad condicional	Proporción de cada suceso respecto al total de veces que ha ocurrido otro suceso	X	X	X	X	X
	Regla de la suma	Probabilidad de ganar el coche	X	X		X	X
	Regla del producto	Probabilidad conjunta; dependencia	X	X		X	X
	Variable aleatoria	Número de la puerta en la que está el premio Número de puerta elegida					X
	Igualdad de variables aleatorias	Coincidencia de valores; acierto					X
	Distribución discreta uniforme	Conjunto de valores con sus probabilidades					X
	Variables aleatorias independientes	La distribución de una no depende de la de la otra					X

Tipo	Objetos matemáticos en la situación	Significado en la situación	Sol. Int. 1	Sol. Int. 2	Sol. Exp.	Sol. For. 1	Sol. For. 2
Procedimientos	Cálculo de probabilidades intuitivo	Aplicar reglas de cálculo intuitivo	X	X			
	Cálculo de probabilidades formal	Aplicar reglas de cálculo formal				X	X
	Cálculo de probabilidad frecuencias	Estimar la probabilidad mediante la frecuencia			X		
	Representación gráfica	Construcción del diagrama en árbol	X	X			
Proposiciones	Relación entre probabilidad condicionada y simple	Restricción del espacio muestral	X	X		X	X
	La frecuencia converge a la probabilidad	Ley empírica de los grandes números			X		
	Teorema probabilidad total	Aplicar a la situación				X	
	Axioma de unión	La probabilidad de la suma es suma de probabilidades	X	X		X	X
Argumentos	Razonamiento deductivo	Demostración de la solución	X	X		X	X
	Razonamiento empírico	Comparar aciertos con distintas estrategias			X		

Tabla 1. Configuraciones epistémicas en las soluciones

Dificultades posibles de los estudiantes

La complejidad del problema, aparentemente simple, se muestra en el análisis realizado de objetos matemáticos y de procesos. También en la literatura relacionada con este problema se han descrito varias soluciones erróneas, relacionadas con una deficiente intuición sobre la probabilidad, que comentamos a continuación. Estas soluciones pueden ser debidas a errores en el proceso de representación-interpretación (conflictos semióticos) o bien a la atribución de propiedades que no tienen ciertos objetos o situaciones, como vemos en los casos que siguen.

Razonamiento erróneo 1. Percepción de la independencia

Un primer problema se produce porque *no se percibe la dependencia de los sucesivos experimentos*. Es decir, o no se comprende la estructura del experimento compuesto o se suponen los sucesivos experimentos independientes, habiendo un conflicto consistente en atribuir una propiedad (independencia) que no tienen los experimentos. Pensamos que esto es un conflicto semiótico pues no se ha interpretado correctamente la descripción verbal del experimento, ha habido un fallo de interpretación de esta descripción verbal, que no es más que la representación del experimento real.

A primera vista parece obvio que da igual cambiar de puerta o no, pues no se visualiza la forma en que la información proporcionada por el locutor afecta a la probabilidad inicial de obtener un premio que, sin esta información, es ⅓. De nuevo hay un fallo en percibir una propiedad: se puede condicionar un suceso por otro que aparece antes o después de él y este condicionamiento puede cambiar la probabilidad inicial del suceso.

Este error de razonamiento es explicado mediante la "falacia del eje temporal" descrita por Falk (1986), que consiste en que las personas creen erróneamente que una información actual (la puerta mostrada por el locutor) no puede afectar a un suceso que ocurrió con anterioridad a la misma (en qué puerta estaba el premio). Esta falacia puede estar causada, en parte, por la confusión entre condicionamiento y causalidad (nuevo conflicto semiótico al confundir entre sí dos conceptos diferentes).

Desde el punto de vista de la probabilidad, si un suceso A es la causa estricta de un suceso B, siempre que suceda A, sucederá B, por lo que $P(B|A) = 1$. Donde, si un suceso A es causa de otro suceso B, entonces B es dependiente de A, pero el contrario no siempre se cumple. Según Falk (1986), un suceso B puede ser dependiente de otro suceso A sin que uno sea la causa del otro. Por ejemplo, se sabe que el cáncer de pulmón depende del hábito de fumar; pero fumar en si mismo no es siempre la causa del cáncer.

Razonamiento erróneo 2. Incorrecta percepción del espacio muestral

Otra posibilidad de error en este problema es una incorrecta enumeración del espacio muestral en uno o varios de los experimentos que intervienen. Es decir, habría un fallo en pasar de la idea espacio muestral (intensivo) al espacio muestral concreto (extensivo). La intuición nos dice que, una vez elegida la puerta, y quitando la puerta que abre el locutor, que nunca tiene premio, sólo quedan dos posibilidades equiprobables. Por tanto, la puerta que nosotros escogimos tiene un 50% de probabilidad de tener una cabra, donde da igual cambiar que no hacerlo. En este razonamiento se está realizando una incorrecta enumeración del espacio muestral al calcular la probabilidad condicionada, otro sesgo descrito por Gras y Totohasina (1995).

El problema radica en que estamos cometiendo un error en este planteamiento y es que no consideramos la información disponible de que “el presentador conoce donde está el premio”. Ya que el presentador abre la puerta *después* de la elección de jugador, la elección del jugador afecta a la puerta que abre el presentador, por tanto el espacio muestral en el segundo experimento depende del resultado del primero.

Si el jugador escoge en su primera opción la puerta que contiene el coche (con una probabilidad de ⅓), entonces el presentador puede abrir cualquiera de las dos puertas restantes. El espacio muestral tiene dos posibilidades con probabilidad ½. Además, el jugador pierde el coche si cambia cuando se le ofrece la oportunidad.

Pero, si el jugador escoge una cabra en su primera opción (con una probabilidad de ⅔), el presentador *sólo* tiene la opción de abrir una puerta, y esta es la única puerta restante que contiene una cabra. En ese caso, el espacio muestral tiene un solo elemento, la puerta restante *tiene* que contener el coche, por lo que cambiando lo gana.

Razonamiento erróneo 3. Incorrecta asignación inicial de probabilidades

Otra solución incorrecta se obtiene de la siguiente interpretación, que es una variante de la anterior: una vez que el presentador escoge la puerta, la probabilidad que el candidato se lleve el coche (en el caso de no cambiar de puerta) es ½ pues el coche ha de estar en una de las puertas no abiertas. El razonamiento erróneo se debe a incorrecta aplicación de la regla de la suma de probabilidades.

Esto sucede porque lo que muestra el presentador no afecta a la elección original, sino sólo a las otras dos puertas no escogidas. Una vez se abre una puerta y se muestra la cabra, esa puerta tiene una probabilidad de 0 de contener un coche, por lo que deja de tenerse en cuenta. Si el conjunto de esta puerta más la que no has elegido tenían una probabilidad de contener el coche de ⅔ en el experimento inicial (elegir la puerta), entonces, si la puerta abierta tiene probabilidad de 0 en el segundo experimento (que la puerta tenga el coche), la puerta no elegida ni abierta debe tener una probabilidad de ⅔. Es decir, la probabilidad de ⅔ se traspasa entera a la puerta no escogida ni abierta por el locutor (en lugar de dividirse entre las dos puertas sin abrir), porque en ningún caso puede el presentador abrir la puerta escogida inicialmente.

Razonamiento erróneo 4. Interpretación incorrecta de la convergencia

Podría originarse una reafirmación en la creencia de que es indiferente cambiar o no de puerta si, al experimental con el *applet*, el alumno obtiene (debido a la aleatoriedad) un resultado parecido con las dos estrategias.

Esta posibilidad es mayor cuando el número de experimentos que se hagan con el *applet* sea pequeño, pues la convergencia de las frecuencias relativas a la probabilidad se cumple a largo plazo, pero no en pequeñas series de ensayos.

Si el alumno obtiene este resultado, podría llegar a admitir que su suposición inicial era correcta. Habría acá el peligro de que se reafirme en la “creencia en la ley de los pequeños números” (Tversky y Kahneman, 1982), que consiste en esperar convergencia en pequeñas series de experimentos.

> *El juego, que no tiene una solución inmediata, puede utilizarse en la formación de profesores y en la enseñanza de la probabilidad condicional y de la probabilidad simple*

Conclusiones

En este trabajo hemos hecho algunos análisis didácticos de una posible situación de enseñanza de la probabilidad, el juego de Monty Hall, que está basado en una paradoja de Bertrand (1888). El juego, que no tiene una solución inmediata, puede utilizarse en la formación de profesores y en la enseñanza de la probabilidad condicional y de la probabilidad simple. Su solución ilustra algunos principios básicos, incluidos en los axiomas de Kolmogorov, así como la construcción del espacio muestral en experimentos dependientes y los conceptos de dependencia e independencia.

En el trabajo en el aula, se plantearía el problema, dejando un tiempo para que los estudiantes lleguen a una posible solución. Seguidamente se discutirían con los estudiantes las soluciones correctas e incorrectas encontradas por los mismos, hasta lograr que se acepte alguna de las correctas. El profesor ayudaría a analizar las causas de los errores y haría un resumen de lo aprendido. En caso de resistencia a la solución, se dejaría confrontar las soluciones con la evidencia empírica producida por el *applet* para que los estudiantes comprendan las causas de sus intuiciones erróneas y las revisen.

Pensamos que en este juego se dan las condiciones de idoneidad didáctica, que Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005) definen como la articulación de seis componentes:

Idoneidad epistémica o matemática: representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. El proceso descrito podría ser idóneo para el estudio de los conceptos de: probabilidad condicional, experimento compuesto, dependencia e independencia y experimentos dependientes e independientes; pero esta idoneidad depende del tipo de solución encontrada. En general las soluciones formales tienen mayor idoneidad en un curso universitario y de formación de profesores, pero en un curso de secundaria las soluciones intuitivas podrían ser suficientes. La solución empírica, tiene, en general, baja idoneidad matemática, a menos que se complemente con una solución intuitiva o formal.

En los cursos de formación de profesores, el análisis didáctico, similar al descrito, sirve para aumentar el conocimiento de los profesores sobre probabilidad, metodología de la enseñanza de la probabilidad y algunos razonamientos erróneos de los estudiantes

Idoneidad cognitiva: grado en que los significados pretendidos/ implementados son asequibles a los alumnos, así como si los significados personales logrados por los alumnos son los pretendidos por el profesor. La situación planteada tiene suficiente idoneidad en cursos de formación de profesores de secundaria y los últimos cursos de secundaria, pues los razonamientos descritos están al alcance de los alumnos.

Idoneidad interaccional: grado en que la organización de la enseñanza permite identificar conflictos semióticos y resolverlos durante el proceso de instrucción. Este tipo de idoneidad dependerá de cómo organiza el profesor el trabajo en el aula. Será importante que los estudiantes trabajen en grupos para que surja el conflicto y se explicite. Será importante también organizar una discusión colectiva de las soluciones para que los mismos alumnos ayuden a sus compañeros a detectar los puntos equivocados.

Idoneidad mediacional: disponibilidad y adecuación de los recursos necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. No se precisa de muchos recursos, pues incluso podría hacerse una simulación con objetos físicos o con un solo ordenador en el aula, donde los alumnos pueden jugar colectivamente.

Idoneidad emocional: interés y motivación del alumnado en el proceso de estudio. Pensamos que esta es la más alta de todas, pues el juego interesa a todo el que trata de resolverlo.

En los cursos de formación de profesores, el análisis didáctico, similar al descrito, sirve para aumentar el conocimiento de los profesores sobre probabilidad, metodología de la enseñanza de la probabilidad y algunos razonamientos erróneos de los estudiantes. Se podría mejorar el proceso si se dispone de soluciones dadas por alumnos reales que los profesores puedan analizar para detectar los errores descritos. ■

Este trabajo forma parte del proyecto SEJ2007-60110 (MEC- FEDER) y beca FPI BES-2008-003573

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bertrand, J. (1888). *Calcul des probabilités*, Paris: Gauthier Villars.

Bohl, A. H., Liberatore, M. J. Y Nydick, R. L. (1995). A tale of two goats and a car, or the importance of assumptions in problem solutions, *Journal of Recreational Mathematics*, 1-9.

Díaz, C. y De La Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística, *Epsilon*, 59, 245-260.

Falk, R. (1986). Conditional Probabilities: insights and difficulties, En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 292-297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Gardner, M. (1959). Mathematical games. *Scientific American*, 219, 180-182.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 22 (2 y 3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. Y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education, *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Font, V. Y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico, *Publicaciones*, 38, 25-48.

Godino, J., Wilhelmi, M. R. y Bencomo, D. (2005). <Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion, *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 4(2), 1-26.

Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95

Selvin, S. (1975a). A problem in probability, *American Statistician* 29(1), 67.

Selvin, S. (1975b). On the Monty Hall problem, A*merican Statistician* 29(3), 134.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases, En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 3-20). Cambridge: Cambridge University Press.