TRABAJO FIN DE MÁSTER

MÁSTER UNIVERSITARIO EN PROFESOR DE EDUCACION SECUNDARIA OBLIGATORIA, BACHILLERATO, FORMACION PROFESIONAL Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS

ESPECIALIDAD: MATEMÁTICAS

El aprendizaje a partir de errores matemáticos

Learning from math mistakes

Autor/a: Marta Ortiz Álvarez

Tutor/a: Dr. José María Chamoso Sánchez

AÑO 2022
UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
FACULTAD DE EDUCACIÓN

TRABAJO FIN DE MÁSTER

MÁSTER UNIVERSITARIO EN PROFESOR DE EDUCACION SECUNDARIA OBLIGATORIA,

BACHILLERATO, FORMACION PROFESIONAL Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS

ESPECIALIDAD: MATEMÁTICAS

El aprendizaje a partir de errores matemáticos

Learning from math mistakes

Autora:

Firmado por ORTIZ ALVAREZ MARTA - ***8697** el día 07/06/2022 con un certificado emitido por AC FNMT

Fdo. Marta Ortiz Álvarez

Tutor:

Fdo. José María Chamoso Sánchez

AÑO 2022
UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
FACULTAD DE EDUCACIÓN

RESUMEN

La asignatura de matemáticas ha sido tradicionalmente una de las materias más complicadas para los estudiantes generando en ellos multitud de emociones que desencadenan en rechazo. Parece lógico y necesario, por tanto, preguntarse e indagar en las causas de esta situación que viven los alumnos de secundaria. En este trabajo se identifican y clasifican según su origen las dificultades y errores más habituales que los alumnos encuentran en el aprendizaje del álgebra en secundaria. Para ello, en primer lugar se ha realizado una investigación bibliográfica cuya síntesis se expone en el estado del arte e incluye la clasificación buscada. A continuación, se han diseñado en base a la literatura dos cuestionarios que potencian el error y se ha recogido a partir de ellos la frecuencia con las que se comete cada tipo de fallo. Gracias a esto, se ha podido comparar y reflexionar sobre los contenidos que más dificultades presentan y cuales son comunes en distintos niveles de la etapa. Finalmente, se ha constatado la veracidad del estudio mediante la comparativa con otros similares.

Palabras clave

Matemáticas, secundaria, clasificación, análisis de errores, frecuencia de errores, dificultades, álgebra, cuestionarios.

ABSTRACT

Mathematics has always been one of the most difficult subjects for students generating on them a multitude of emotions that could trigger their rejection. It seems logical and necessary to question and to investigate the causes of this situation that secondary school students experienced. This research project will identify as well as classify by its origin the common difficulties and errors that students find along the learning of algebra in secondary school. In the first place, a bibliographic investigation has been conducted which synthesis is explained at the state of art including the searched classification. Thereafter, on the basis of the literature two questionnaires has been designed to enhance the error and from them the frequency of which type of mistake is gathered. As a result, the contents that present more difficulties and which are more frequent during the different levels of the stage could be compared and reflected. To conclude, the veracity of the study has been validated through the comparation with other alike.

Keywords

Mathematics, secondary school, classification, Error analysis, frequency of error, difficulties, algebra, questionnaires.

Índice

Introducción

El miedo a equivocarse es uno de los temores más frecuentes en el ser humano. Tendemos a obligarnos a hacerlo todo bien y, por lo tanto, frustrarnos al obtener un resultado negativo. El temor a equivocarnos hace que desarrollemos sentimientos que nos impiden saber cómo enfrentarnos a esos errores e incluso sacar la parte positiva que internan.

En el ámbito de la educación, los alumnos también viven con miedo a equivocarse. En las aulas se generan situaciones como el no levantar la mano ante una pregunta de la que sí se conoce la respuesta por vergüenza. Sin embargo, el dar una respuesta equivocada rebosa de oportunidades para aprender: cometer un error y corregirlo es una de las maneras más poderosas de adquirir conocimientos. A pesar de esto, el sistema educativo actual está diseñado de manera que los errores se entienden como un castigo frente al éxito que supone reconocer, comprender y corregir un error hasta conseguir la respuesta correcta.

La asignatura de matemáticas es posiblemente la que más emociones provoque en los alumnos: es la más odiada cuando no se entienden los procesos o no se superan los objetivos, pero también es la que más satisfacción provoca al comprender un concepto u obtener el resultado correcto de un problema. Cuando el primer caso vence al segundo, la asignatura se convierte en un tormento para muchos alumnos, llegándola a ver como un imposible. Esto se debe a que son muchas y diversas las dificultades que se les presentan en su camino hacia el aprendizaje de las matemáticas. Su alto nivel de abstracción y generalización, la opinión que la sociedad ha creado sobre esta ciencia en las escuelas o la falta de adaptación en las metodologías hace que los alumnos, incluso los considerados de altas capacidades, encuentren en las matemáticas su peor enemigo.

Con todo, es muy importante que el profesorado conozca las dificultades que se pueden plantear durante la experiencia de aprendizaje y con ello en la construcción del conocimiento matemático. Así, han de reflexionar sobre ellas para facilitar una explicación y una forma de enfrentarse a ellas.

En particular, este trabajo se centra en las dificultades que suponen para los estudiantes el aprendizaje del álgebra durante toda su etapa educativa, pues seguramente sea el bloque de contenidos al que podríamos vincular más errores. Gracias a este trabajo podremos corroborar que esto es así en el sentido de que si los alumnos cometen una cantidad elevada de errores podríamos afirmar que efectivamente es un bloque que da muchos problemas. Además, nos podremos hacer una idea de cuáles son los aspectos dentro del álgebra con los que los estudiantes tienen más dificultades y así poder poner el foco de mejora en dichas cuestiones algebraicas. Esto es, analizar los errores le permite al docente tener una mirada amplia del problema en cuestión, por lo que podrá identificar cómo los estudiantes interpretan las tareas algebraicas y, lo más importante, podrá conocer el origen de los obstáculos y dificultades y su tipología. A partir de aquí, podrá hacer una reflexión sobre ello que le permitirá generar propuestas de superación y corrección. No obstante, los profesores no son los únicos beneficiados por el análisis de errores, sino que conocer las situaciones más problemáticas en las tareas algebraicas puede tener transcendencia para los estudiantes en cursos posteriores evitando así el asimilar un proceso incorrecto como válido. Esto es, conocer tus propios errores ofrece la posibilidad de corregirlos.

El enfoque de este estudio es exploratorio y sustentado en distintas fuentes, con la intención de mejorar los conocimientos existentes sobre el tema que nos ocupa y sin pretender generalizar los resultados a otras poblaciones escolares. En este sentido, este TFM intenta conjugar la investigación con la práctica del aula, de manera que se seguirá la clasificación dada por Socas (1997) y ampliándola con el estudio que hace Castro (2012) sobre el lenguaje y los signos algebraicos para posteriormente obtener en base a esa clasificación la frecuencia con la que los alumnos de secundaria cometen cada tipo de error.

Objetivos

El propósito principal de este trabajo es identificar, categorizar y analizar los errores algebraicos cometidos por estudiantes de secundaria. Finalmente podremos responder a la pregunta ¿qué tipos de errores algebraicos comenten con más frecuencia los alumnos en el instituto? Así, partiendo de la hipótesis de que existen errores comunes, nos dará la posibilidad de indagar sobre las causas que los provocan y de generar técnicas para enfrentarse a ellos, reducirlos o, si es posible, utilizarlos como herramienta de aprendizaje.

Por otro lado, el estudio de la frecuencia de errores en distintos cursos de esta etapa educativa nos da la posibilidad de reflexionar sobre la progresión que tiene el aprendizaje del álgebra. Esto es, comparando la regularidad de cada tipo de error en cada curso podremos deducir si dichas dificultades se van limando con el aumento del aprendizaje o por el contrario se vuelven perseverantes.

Asimismo, el objetivo final de este proyecto es dar a los errores la importancia que precisan por ser éstos un indicador del grado de comprensión del alumnado. Dar voz a los fallos asumiendo que ocurren y entendiendo que existe solución para ellos es la base del aprendizaje y el crecimiento tanto académico como personal.

Marco teórico y estado de la cuestión

1. Introducción

Durante la historia se han descartado conceptos que luego han resultado ser válidos y viceversa, es decir, el error está presente de forma permanente en la construcción y consolidación del conocimiento, tanto escolar como científico. Esto ha llevado a muchos filósofos, profesores e investigadores de todo tipo a realizar investigaciones sobre los errores cometidos en todos los niveles del aprendizaje matemático, sobre sus causas o elementos que los explican, y sobre sus taxonomías y clasificaciones.

Los errores están directamente relacionados con el concepto de obstáculo, que fue introducido por primera vez por el filósofo francés Bachelard (1938). Éste definió en términos generales del pensamiento científico que un obstáculo epistemológico se trata de una construcción del conocimiento, descartando la definición de aquello que no permite avanzar. Organizó los errores a partir de tres orígenes: la tendencia a confiar en engañosas experiencias intuitivas, la tendencia a generalizar y el lenguaje natural. La teoría de Bachelard fue la base del profesor francés Brousseau (1983), quien particularizó la definición de obstáculo epistemológico a la Didáctica de las Matemáticas. Consideraba mejor estudiar caso por caso, de manera que los clasifica según su origen, basándose en si este es debido a características de desarrollo del estudiante (ontogénico), causado por las elecciones educativas respecto a la forma de enseñar (didáctico) o si su origen está relacionado directamente con el concepto (epistemológico). Con todo, ambos consideran que un obstáculo en el aprendizaje se entiende como un conocimiento que, durante un tiempo, ha dado su fruto en la resolución de ciertos problemas y es este éxito el culpable de que se fije en la mente de los estudiantes. Sin embargo, este conocimiento posteriormente resulta inadecuado y difícil de que se adapte a nuevos problemas.

Ambos autores y otros que los sucedieron, enfocaron su línea de investigación en analizar las causas y características de los errores y en la clasificación de los mismos combinando resultados empíricos con teorías psicológicas o psicopedagógicas sobre leyes generales del procesamiento humano de la información. Esta es la línea de trabajo en la que se centran la mayoría de los estudios, aun habiendo otros investigadores que analizan el currículo con el objetivo de proponer una organización que ayude a solventar los errores o que estudian cuál sería la formación del profesorado óptima para lograr el mismo objetivo.

2. Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas

Las investigaciones centradas en indagar acerca de la naturaleza de los errores tienen su enfoque puesto en las dificultades que se encuentran los alumnos al enfrentarse al álgebra escolar. En general, casi todos los alumnos tienen dificultades con las matemáticas en algún momento de su proceso de enseñanza-aprendizaje, de los cuales algunos consiguen superarlas y otros las evidencian en forma de errores.

Dichas barreras pueden ser clasificadas en cinco tipos según su procedencia (Socas, 1997): dificultades asociadas a la complejidad de los objetos en matemáticas, a los procesos de pensamiento matemático, a las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas, al desarrollo cognitivo de los alumnos y a los procesos de enseñanza. Siguiendo esta línea, Wagner y Parker (1999) llevan a cabo su propia clasificación que podría combinarse con la anterior. Categorizan las dificultades según sean intrínsecas al objeto, inherentes al propio sujeto o estén relacionadas con las técnicas de enseñanza.

Las dificultades y obstáculos inherentes al objeto son debidas a la naturaleza del álgebra, a los objetos matemáticos y a las reglas por las que se rigen. Así, entrarían dentro de este tipo las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos en matemáticas y las asociadas a los procesos de pensamiento matemático de las que habla Socas (1997) por ser materia propia de las ciencias exactas.

Las primeras guardan relación con la comprensión de los objetos matemáticos como es el lenguaje, tanto su expresión en el lenguaje habitual que a veces da lugar a confusión, como el propio vocabulario matemático, pero sobre todo el lenguaje de signos. Socas (1997) habla de la precisión del lenguaje matemático como conflicto involucrado en el uso del lenguaje ordinario dentro de un contexto matemático. En lo que al vocabulario se refiere, distingue entre palabras propias del vocabulario común que tienen otro significado completamente distinto en el aula y palabras específicas para conceptos matemáticos. Por último, insiste en la confusión que provoca en los alumnos el lenguaje de signos y el nivel de abstracción que se requiere para entender su naturaleza, lo cual depende del estado de desarrollo en el que se encuentre el alumno.

El pensamiento matemático tiene su base en el razonamiento lógico que nace a partir de diferentes modos de pensamiento matemático. Las demostraciones formales, tan poco comunes en secundaria, alimentan ese razonamiento dando una explicación de porque resolvemos los problemas de esa manera y no por el mero hecho de que nos lo imparte así el profesor. El pensamiento lógico es totalmente compatible con los métodos intuitivos, las conjeturas, los ejemplos y los contraejemplos, de forma que son estos la forma práctica de interiorizar el argumento lógico.

Dentro de la lógica nos encontramos con la "lógica escolar" y la "lógica social". Ambas impiden al alumno realizar una resolución correcta de problemas matemáticos siguiendo la lógica matemática. La primera deja en un segundo plano la pregunta del problema y se centra en responder a ¿qué espera el profesor que yo haga? La segunda está directamente relacionada con como la sociedad ha enseñado al estudiante a tratar con las matemáticas. Por ejemplo, medimos la altura mediante parejas de números enteros expresando *1'80* como "un metro ochenta", es decir, los interpretamos como dos números distintos. Con esto se presenta la dificultad de ordenación de números decimales, de manera que llegamos a considerar *1'3<1'28* por ser *3* menor que *28*.

Las dificultades asociadas a procesos de pensamiento matemático se solventan evitando las rupturas que se provocan entre los modos de pensamiento matemático. Sin embargo, estas dificultades forman parte del proceso de construcción del conocimiento matemático, por lo que, en vez de evitarlas, su correcto enfrentamiento sería conocerlos y explicarlos para que los alumnos reflexionen sobre ellas y creen su propio pensamiento lógico.

Por su parte, las dificultades debidas al sujeto tienen su origen en la complejidad que supone la generalización y la abstracción requeridas en las tareas algebraicas, por lo que dependen de la capacidad que tenga el estudiante para enfrentarse a ellas. Incluiríamos entonces en este grupo las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales que se dan hacia las matemáticas y las asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos.

Las primeras tienen por protagonistas a la ansiedad y el miedo con los que los alumnos se enfrentan a los ejercicios en matemáticas, temen equivocarse sin ser conscientes que del error se aprende. La sociedad ha hecho que consideremos que las matemáticas son irreales, que no tienen relación con la vida cotidiana; o un misterio que pocos saben resolver; o incluso consideran que "las matemáticas es hacer cuentas". Esto desemboca en que los alumnos se enfrentan a ellas con tensión y miedo. Esto es, somos nosotros mismos quienes ponemos trabas al aprendizaje matemático.

En segundo lugar, las estructuras cognitivas que el alumno tenga en el momento del aprendizaje condicionan totalmente su desarrollo. Por ello, la información sobre la naturaleza de los procesos de aprendizaje y conocimiento del desarrollo individual facilita al profesor la elección del método más acertado para llevar a cabo su papel docente. Ser consciente de cuáles son las dificultades y respuestas de los alumnos ante diversas cuestiones no es tarea fácil debido a que cada alumno tiene un modo de razonamiento propio.

Por su parte, las dificultades causadas por los procesos de enseñanza son competencia de la institución escolar, el currículo de matemáticas y con los métodos de enseñanza. La institución escolar debe organizar la enseñanza de manera que se reduzcan las dificultades del aprendizaje. Por su parte, la organización curricular debe atender a la necesidad de tener conocimientos de conceptos anteriores y adaptarse al nivel de abstracción requerido y a la naturaleza lógica de las matemáticas. Por último, los métodos de enseñanza son más problemáticos porque consisten en adaptarse a todos los alumnos y al momento de desarrollo cognitivo en el que se encuentren, tanto a nivel individual como grupal.

3. El error en el aprendizaje de las matemáticas

Una vez entendido que las dificultades en un proceso son las que provocan los errores, es lógico que las investigaciones se desarrollen a la inversa: a través de los errores, se puede diagnosticar qué tipo de obstáculos o dificultades tienen los estudiantes para realizar las tareas que se les proponen, y de esta manera poder arbitrar los mecanismos necesarios para ayudarles a superarlos.

Cuando un alumno inicia un aprendizaje, su mente no está en blanco, sino que contiene unos saberes previos que resultan condicionantes a la hora de obtener nuevos conocimientos. Lo nuevo no se solapa con lo anterior, sino que obliga al alumno a reestructurar su conocimiento total y esto es precisamente lo que puede llevar al error. Las distintas formas de reestructuración nos ayudan a clasificar los errores según sus características principales (Rico, 1995). Hay errores persistentes determinados por interiorizar de forma equívoca un concepto básico y errores sistemáticos como resultado de la aplicación correcta de un procedimiento imperfecto. También pueden ser por azar, que reflejan la falta de atención y lapsus ocasionales, por lo que carecen de importancia. Sin embargo, son preocupantes los dados por falta de reflexión, pues muchas veces las respuestas a los problemas matemáticos carecen de significado para los alumnos y por lo tanto no se plantean el sentido de la solución.

Por su parte, Davis (1975) se centra en los errores que no son por azar, de manera que elaboró una teoría de esquemas cuya combinación permite predecir patrones comunes y tipificar los errores más usuales. Habla de errores por recuperación de un esquema previo como puede ser el paso de operaciones en aritmética a transformaciones algebraicas. Así, pone en contraposición que en la adición aritmética el signo es una pregunta y la respuesta viene dada por el proceso de responder directamente a esa pregunta, mientras que en la adición algebraica la expresión describe un problema y a la vez una respuesta o resultado. Menciona también las reglas que producen reglas haciendo referencia a procedimientos válidos para una situación pero totalmente incorrectos en otras similares. Por ejemplo, pasar a partir de la implicación $(x-1)(x+2)=0$ cuyas soluciones son $x=1$ y $x=-2$, a definir como soluciones $x=2$ y $x=-1$ de la ecuación $(x-1)(x+2)=1$. Por otro lado, considera como error clásico las reversiones binarias, es decir, afirmar que $2^3=6$ al confundir la potencia con el producto o $4 \cdot 4 = 8$ al confundir el producto con la suma.

Siguiendo la misma vía de investigación, Radatz (1980) realizó por fin una categorización más genérica de los errores en base a sus causas. Habló de las dificultades del lenguaje matemático por considerarse un idioma totalmente desconocido y de las dificultades dadas por la capacidad individual para visualizar en imágenes la información de un problema. Mencionó también los errores debido a un aprendizaje deficiente de conceptos previos, bien sean contenidos, procedimientos o el escaso dominio de símbolos.

En esta línea, incluyó los conceptos mal aprendidos a causa de la rigidez de pensamiento que derivan en errores perseverantes, errores de asociación como las reglas que producen reglas de las que hablaba Davis (1975) y errores por interferencia de operaciones como las regresiones binarias.

En una publicación posterior, Movshovitz-Hadar, Zaslavksy e Inbar (1987) realizaron una clasificación de los errores en seis categorías descriptivas en base a las soluciones dadas por los alumnos. Se trata de una investigación empírica en la que no entra en juego el procesamiento de la información.

1- Datos mal utilizados: errores causados por discrepancias entre los datos del enunciado y de la respuesta.
2- Interpretación incorrecta del lenguaje, como la traducción errónea del lenguaje simbólico o la incorrecta interpretación o el mal uso de símbolos matemáticos.
3- Interferencias no válidas lógicamente, donde se incluyen todos los errores de razonamiento.
4- Teoremas o definiciones deformadas: la utilización de una regla o definición identificable en un caso no válido.
5- Falta de verificación de la solución, cuando el procedimiento es correcto pero no hay una reflexión sobre la validez del resultado final.
6- Errores técnicos.

Siguiendo con el análisis de causas, aunque en este caso en base al procesamiento de la información, Socas (1997) considera que las dificultades del aprendizaje de las matemáticas se traducen en errores por causas muy diversas, pero, que sea cual sea su cuna, resulta útil organizarlos según su origen con el objetivo de que los profesores puedan generar remedios efectivos. De esta manera, se basa en los estudios de autores mencionados (Bachelard, 1938; Brousseau, 1983; Davis, 1975) para clasificar los orígenes del error en tres ejes: los considerados *obstáculos*, los de *ausencia de sentido* y los relacionados con *actitudes afectivas y emocionales*.

1. Obstáculos

En el primero se encuentran aquellos errores que proceden de la definición de obstáculo epistemológico dada por Bachelard (1938) y Brousseau (1983), como por ejemplo el hecho de que la concatenación en aritmética denote adición $(23 = 20 + 3)$, frente a la yuxtaposición algebraica xy que significa multiplicación (Herscovics, 1989). Socas (1997) habla de obstáculos como un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento, y los caracteriza como resistentes, tal que aumenta su resistencia con el número de veces que resulta válido y la cantidad de dominio donde resulta válido. A pesar de identificarlo y notificar su inexactitud, no termina de desaparecer en su totalidad. Siguiendo el estudio de los franceses, el autor considera difícil diferenciar los obstáculos didácticos de aquellos producidos por la adquisición de nuevos esquemas conceptuales como son los obstáculos cognitivos. Podemos entender que ciertos obstáculos cognitivos son producto de la experiencia previa de los alumnos condicionada por la organización curricular, pero que estos también surgen a partir de la lógica interna de las matemáticas y del desarrollo cognitivo del alumno. Por ejemplo, la multiplicación con números enteros lleva consigo la generalización implícita de que multiplicar significa aumentar y esto provoca un obstáculo cognitivo cuando los estudiantes aprenden a multiplicar por decimales entre cero y la unidad.

2. Errores de ausencia de sentido

Los errores cuyo origen se encuentra en una *ausencia de sentido* se dividen a su vez en tres etapas diferenciadas por el momento de desarrollo en el que se encuentre la mente del alumno:

2.1. Errores originados en la aritmética

La aritmética es la rama de las matemáticas más antigua y elemental y su estudio involucra las operaciones básicas como son la suma, la resta, la multiplicación y la división. A partir de esta definición, podríamos definir el álgebra como una aritmética generalizada estableciendo que las relaciones entre los números pueden ser de tipo general o particular.

De aquí nacen muchos errores pues para entender la generalización de las relaciones y procesos había que haber asimilado los casos particulares que se encuentran en el contexto aritmético. Esto es, no son errores propiamente algebraicos, sino problemas que quedan sin corregir en aritmética. Por ejemplo, serían errores de este tipo el no respetar la jerarquía de operaciones o un uso incorrecto de la propiedad distributiva. Otro ejemplo muy común es que muchos alumnos afirman que $\frac{1}{x} + \frac{1}{\mathrm{y}}$ es equivalente a $\frac{1}{x+y}$ o a $\frac{1}{x \cdot y}$, resultados que tienen su origen en no dominar operaciones con fracciones en aritmética.

2.2. Errores de procedimiento

El uso de fórmulas o reglas matemáticas de manera inadecuada se da cuando los alumnos extraen un procedimiento utilizado en un caso particular y lo adaptan a una situación nueva. Se da por ejemplo con la generalización sobre operadores como extender la validez de $(\mathrm{a} \cdot \mathrm{b})^2 = \mathrm{a}^2 \cdot \mathrm{b}^2$ al caso de la suma: $(\mathrm{a} + \mathrm{b})^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2$. Otro ejemplo de este tipo vendría dado por las regresiones binarias mencionadas por Davis (1975) o por la multiplicación de potencias con misma base $2^{\mathrm{a}+\mathrm{b}} = 2^{\mathrm{a}} \cdot 2^{\mathrm{b}}$ que lleva a interiorizar que $2^{\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}} = 2^{\mathrm{a}} + 2^{\mathrm{b}}$. También sería un error de procedimiento las reglas que producen reglas de las que habla Davis (1975).

2.3. Errores causados por el propio lenguaje algebraico.

El lenguaje es la base de la comunicación y por lo tanto interpretarlo de forma correcta es la única forma de conseguir una comprensión total. El lenguaje matemático es de carácter preciso y requiere de una interpretación exacta de sus signos. La sintaxis y la semántica del álgebra se alejan del lenguaje natural y del lenguaje aritmético, por lo que las traducciones llevan muchas veces al error. Otra de las causas es que es un lenguaje restringido al aula, los alumnos no trabajan sus equivocaciones más allá que en clase y por ende la familiarización es escasa.

3. Errores asociados a actitudes afectivas y emocionales

La relación entre errores que tienen su origen en las emociones del alumno es directa con las dificultades que generan de las que se habla en Socas (1997) y que están expuestas en el apartado 2 de esta investigación teórica.

3.1. El error en el aprendizaje del álgebra: El lenguaje algebraico

Por último, haremos un análisis más profundo de los diferentes componentes del lenguaje que presentan dificultades en los estudiantes y en múltiples ocasiones llevan al error (Castro, 2012):

i. *Vocabulario*

El vocabulario matemático es, en muchos casos, una dificultad para los estudiantes. Por una parte, el hecho de que muchas palabras coincidan con las del vocabulario habitual pero tengan un significado distinto da lugar a confusión. Es el caso de raíz, producto, primo, imagen, dominio o integral, por ejemplo. Por otro lado, durante todo el aprendizaje de matemáticas en secundaria, los alumnos se van encontrando con palabras que les son poco familiares y cuya comprensión termina por no ser del todo correcta. Es el caso del vocabulario específico matemático, como por ejemplo hipotenusa, isósceles o poliedro.

También resultan confusas las expresiones que se emplean para realizar operaciones matemáticas, como “reducir una fracción” o “reducir una ecuación” con el objetivo de simplificarlas; “elevar a cuatro” referido a una potencia; o “añadir un 0” cuando multiplicamos por 10. Estas frases integran conceptos del lenguaje diario que, en vez de aclarar su significado, lo oscurecen.

ii. *Símbolos*

Dentro del lenguaje matemático es de vital importancia el lenguaje de signos. Uno de los problemas más comunes en relación a esto es su sintaxis, es decir, las reglas de operaciones, pues carecen de una justificación lógica. Organizamos las dificultades que presentan los signos matemáticos según su estado de aprendizaje:

a) *Semiótico*, referido al momento en el que los alumnos aprenden signos nuevos con los signos ya conocidos. Por ejemplo, a partir de las operaciones sumar, restar, multiplicar y dividir, definen la operación potencia y por tanto lo que significa el símbolo
$$a^b = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$$
b) *Estructural*, en el caso de que la estructura del sistema antiguo organice la del nuevo. Este es el caso de, por ejemplo, las operaciones con potencias. Al desarrollar a^b y a^c y multiplicar su resultado, se concluye que $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$.
c) *Autónomo*, que es el sistema nuevo, los signos que actúan con significado propio. Por ejemplo,
$$e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2}$$
Como estos últimos son nuevos para los alumnos y no tienen relación con el sistema de signos antiguo, su familiarización y su proceso de generalización es una fuente de dificultades y errores.

Un elemento a destacar es el signo *igual*, pues su correcta interpretación es esencial para el aprendizaje del álgebra. Algunos estudiantes no tienen en cuenta que el signo = tiene significado de equivalencia cuantitativa entre los dos lados de la igualdad y transforman las expresiones o ecuaciones arbitrariamente.

iii. *Variables*

En las clases de matemáticas las variables se emplean como incógnitas, como números generalizados y para señalar relaciones funcionales. Los alumnos no entienden el significado de las letras y las interpretan como si fueran objetos o palabras. Esto tiene su origen en que desde bien pequeños se les enseña que “m” significa metros y no número de metros como significaría “la equis” en una ecuación donde se esté trabajando con longitudes. La interpretación de variables como abreviaturas afecta a la hora de manejar una expresión algebraica. También se da la situación en la que no se interpreta la letra, la variable, como un valor específico, de manera que si cambiamos una letra por otra piensan que cambia la solución de la ecuación.

iv. *Expresiones*

Las expresiones algebraicas que se manejan en secundaria son las ecuaciones y las funciones. En las primeras aparece una sola variable que representa un número. En el caso de sistemas de ecuaciones, cada variable representa un número relacionados entre sí. Cabe destacar nuevamente la relevancia que cobra aquí el signo igual, pues muchos estudiantes no entienden que ambos lados de la ecuación son iguales, no los relacionan.

En las funciones hay dos o más variables que representan una infinidad de valores también relacionados entre sí. El concepto de función es difícil de entender para los estudiantes y la notación formal *f(x)* no tiene significado para ellos.

v. *Estructura de las expresiones algebraicas*

Las expresiones algebraicas tienen una estructura externa referida a los términos que componen la expresión, los signos, el orden de los elementos y las relaciones entre ellos; y una estructura interna que describe el valor de la expresión. Las dificultades vinculadas a la estructura surgen más bien con el sentido de estructura. Un estudiante tiene un buen sentido estructural cuando opta por un método eficaz y elegante para resolver el problema, esto es, ser capaz de identificar la estructura algebraica de la expresión y ser capaz de transformarla. Por ejemplo:

$$\frac{x^2-2x+1}{3(x-1)}=\frac{(x-1)^2}{3(x-1)}=\frac{x-1}{3}$$

4. Procesos de enseñanza

Varias de las investigaciones ya mencionadas añaden a su clasificación aquellas dificultades o aquellos errores causados por los procesos de enseñanza, como es el caso de Wagner y Parker (1999) y Socas (1997), pero no llegan a profundizar en el tema. En efecto, hasta entrado el siglo XXI no se cuestiona la enseñanza tradicional contrastando información ni la vinculación de las dificultades al diseño del currículo o a como los profesores ejecutan su papel docente. No obstante, dentro de una línea de trabajo denominada enseñanza por diagnóstico, Lakatos (1981) sí que ofrece una propuesta dirigida a prever los errores, detectarlos y proponer medios para corregirlos a partir de una perspectiva crítica de la docencia del momento. Tiene una visión similar a la de Bachelard (1938) y Brousseau (1983) ya que apuesta por la discusión de errores detectados en teorías para desarrollar otras nuevas que quizá no hubieran nacido sin el análisis crítico de los estudios vigentes. Apuesta entonces por descartar la verdad objetiva o absoluta para apostar por una verdad relativa a unos conocimientos, unos esquemas de interpretación y unas reglas metodológicas que permiten acceder a esos conocimientos concretos. Propone optar por contraejemplos locales y globales para criticar conjeturas y aumentar el contenido pero limitar la extensión de conceptos. Su propuesta basada en la construcción del conocimiento a partir de los principios de la falsabilidad ayudaría a reducir o evitar los obstáculos de los que hablan los dos autores anteriores.

En lo que respecta a lo más actual, en Castro (2012) se hace una recopilación de los más destacados estudios sobre los procesos de enseñanza que favorecen las dificultades o incluso son la propia dificultad en el aprendizaje de las matemáticas. Se habla de crisis en la enseñanza del álgebra provocada por un motivo didáctico que apunta que los métodos de enseñanza se han quedado anticuados (Malara y Navarra, 2012) y los contenidos del currículo escolar de secundaria han cambiado muy poco (Kieran, 1996). Esto implica que el álgebra no se enseña como una generalización de ideas a las que se llega a través del razonamiento, sino que se utiliza como una herramienta de manipulación y de cálculo y no de pensamiento (Radford, 2012). Malara (2003) y Molina (2007) apoyan además que la mejora de la enseñanza del álgebra está totalmente condicionada por los cambios que se realicen en las escuelas de primaria de manera que estos favorezcan una aproximación al pensamiento algebraico.

Con objetivo de mejora, han sido propuestos distintos enfoques que guíen a los profesores a la enseñanza del álgebra. Drijvers y Hendrikus (2003) consideran cuatro enfoques tras hacer una revisión de los ya propuestos por otros autores. El primero se centra en el álgebra como medio de resolución de problemas; el segundo sobre las relaciones entre variables; el tercero habla del álgebra como generalización y el último se centra en el lenguaje como sistema de representación de las matemáticas. No obstante, consideran que en la práctica educativa no son enfoques disjuntos por existir tareas que engloban más de un enfoque. En los últimos años, se ha optado además por el uso de la tecnología como un soporte visual sobre gráficos y representación simbólica y tablas para facilitar la comprensión de los símbolos y la resolución de problemas (Arnau, Arevalillo-Herráez y Puig, 2011).

5. Análisis crítico del estado del arte

No se puede cuestionar que hay muchas y variadas investigaciones acerca del tema que nos ocupa. Muchos autores han estudiado sobre características y causas de los errores, mientas otros han centrado sus trabajos en evitar los errores de los alumnos mediante la mejora de las técnicas de enseñanza, del currículo o incluso de la formación del profesorado. Son estos seguramente los enfoques más adecuados para el propósito general de este trabajo como es dar importancia a los errores, no pasarlos por alto y tratar de encontrar soluciones, pero sobre todo lo es el primer enfoque, que analiza los orígenes de cada fallo para entender por qué suceden y así poder encontrar el remedio más adecuado para ellos. Considero que para solucionar un problema primero hay que identificarlo, esto es, solucionar el problema desde el origen nos lleva a una solución total y no circunstancial.

A partir de aquí, las investigaciones que se exponen en el estado del arte son útiles para dicho objetivo. El concepto de obstáculo dado por Bachelard (1938) es un concepto de peso y un buen comienzo para entender que los conocimientos son modificables. Esto dio pie a muchos estudios posteriores en los que no se trató de corregir el concepto sino que todos se apoyan en la teoría del filósofo. En contraposición, cada autor ha expuesto su propia teoría sobre la clasificación y las características comunes de los errores, siendo estas similares e incluyendo puntos en común pero sin tomarse como referencia unos a otros. La impresión que se percibe es que varios investigadores vuelven a realizar un mismo estudio empleando otras palabras cuando lo realmente útil es enfocar esa clasificación hacia propuestas de mejora.

El caso más claro es el de Socas (1997) y Wagner y Parker (1999), estudios en los que existe una conexión directa. Aunque la segunda publicación es posterior a la primera, en Socas (1997) sí que se recogen las dos dificultades intrínsecas al objeto como lo que se considera dificultades asociadas a la propia disciplina. Aun así, realmente no hace una reflexión acerca de si esas dificultades dependen en su totalidad del alumno o son causadas por factores externos, pues para solucionar el problema hay que tener en cuenta todos aquellos agentes que lo alimentan. Sin embargo, en su clasificación de los errores según su origen, sí que afirma que los que tienen su origen en obstáculos no son totalmente independientes, sino que en múltiples ocasiones se solapan los obstáculos cognitivos y didácticos, aunque no hace la misma reflexión para los otros dos tipos. Pese a todo, el análisis de este autor es exhaustivo al reflexionar sobre múltiples y diferentes situaciones que generan errores dentro del aula, incluyendo componentes cognitivos, sociales, escolares, emocionales y objetos matemáticos.

Todos los autores del estado del arte coinciden en las dificultades que genera el lenguaje matemático, pero no concuerdan en la forma de nombrar a los tipos de error si bien lo hacen para sus definiciones. Esto es, Rico (1995) habla de errores persistentes por memorizar de forma equívoca un concepto básico como puede ser la jerarquía de operaciones que Socas (1997) categoriza como un error con origen en la aritmética y además es lo mismo de lo que habla Radatz (1980) en "errores debido a un aprendizaje deficiente de conceptos previos". Los errores de procedimiento de Socas (1997) ya los habían tratado anteriormente estos autores como errores sistemáticos (Rico, 1995), errores de asociación (Radatz, 1980) o las reglas que producen reglas (Davis, 1975). Asimismo, la falta de reflexión de la que habla Rico (1995) está muy relacionada con los obstáculos o, en caso de tratarse de expresiones algebraicas, con su estructura interna (Castro, 2012) y también guarda conexión con la falta de verificación de una solución que mencionan Movshovitz-Hadar et al. (1987).

Aunque es cierto que todas las aportaciones a un estudio suman positivamente, establecer una relación entre ellas lleva a un escalón superior en el proceso de reflexión, pues a partir de dichas relaciones se puede establecer un vínculo entre situaciones que provocan el error que no habían sido consideradas y sobre todo a ser más preciso en la clasificación incluyendo el mayor número de ejemplos encontrados. Esto es, gracias a patrones descritos por otros autores (Rico, 1995; Radatz, 1980; Davis, 1975) se puede completar los errores de procedimiento (Socas, 1997) con el mayor número de paradigmas posibles.

En lo que se refiere a los procesos de enseñanza, estoy de acuerdo en que es necesario un cambio en los modelos y que es algo que no depende únicamente de las investigaciones. Destaco que muchos están de acuerdo en que la mejora empieza por fomentar la creación del propio pensamiento lógico de los alumnos para dejar a un lado las mecanizaciones y las acciones memorísticas. Si bien es cierto que es una afirmación muy general y que lo efectivo estaría en proponer soluciones para cada caso concreto, es posible que actualmente se tenga un enfoque en esta línea, más puntual. Algunos modelos de enseñanza han cambiado en los últimos tiempos, de manera que, sobre todo, los problemas derivados de la enseñanza primaria cada vez se prevén más y se aplican técnicas para solventar, por ejemplo, las dificultades con el cálculo mental o la jerarquía de operaciones.

De todo lo anterior, termino esta investigación bibliográfica sintetizando las siguientes conclusiones que sirven de marco teórico para el desarrollo posterior del análisis de datos.

- Las dificultades que los alumnos encuentran y los errores que cometen no son, en su mayoría, casos aislados, sino que guardan relación entre ellos a través de estructuras lógicas que indican ya un conocimiento adquirido y no una falta de conocimiento. Es precisamente por ello por lo que es posible convertir los errores en una herramienta de aprendizaje y no como un mero indicador de carencia de conocimientos asociado a una mala calificación. Podemos tomarlo como un punto de partida del correcto aprendizaje si se asume como algo totalmente normal.

- Las características y el origen de los errores son comunes, lo que nos permite encontrar por lo tanto una solución también común para ellos, sin dejar de tener en cuenta las casuísticas externas a la materia como es el desarrollo del alumno. Debemos separar ciertos errores en base a su origen pero sin olvidar las características comunes que estos pueden llegar a tener, esto es, el estudio de errores no es una ciencia exacta y no se pueden contemplar todas las casuísticas que afectan a su desarrollo.

- No obstante, el enfoque principal debería ser impulsar el pensamiento lógico y la capacidad de razonamiento de los alumnos para que así sean ellos mismos los que sean capaces de superar sus propias dificultades y encontrar mecanismos para solucionar los errores que se les presenten.

- Para terminar, indicar una clasificación de los errores según su origen que se ha considerado la más acertada tras lo estudiado:

Clasificación de errores según su origen

1. Obstáculos, que consistirán básicamente en la realización de operaciones mentales, el no escribir las fórmulas y el procedimiento y en realizaciones válidas para casos particulares.
2. Errores de ausencia de sentido, divididos en tres ítems:
   - 2.1. Con origen en la aritmética, que serán esencialmente los fallos relacionados con la jerarquía de operaciones.
   - 2.2. Errores de procedimiento, que consistirá en el mal uso de reglas matemáticas o fórmulas como la de la resolución de ecuaciones de segundo grado.

2.3. Dificultades asociadas al lenguaje y signos algebraicos:
   i. Vocabulario.
   ii. Símbolos (en base a su estado de aprendizaje: semiótico, estructural o autónomo).
   iii. Variables.
   iv. Expresiones, referidas a no entender correctamente la diferencia entre expresión y ecuación algebraica, donde entra en juego la interpretación del signo “igual”.
   v. Estructura de las expresiones, que puede ser:
      - Externa, referida a la relación entre los elementos de la expresión.
      - Interna, referida a la visualización y elección del método más eficaz para resolver un ejercicio.

3. Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales:
   3.1. “Despistes”, como aquellos fallos de cálculo que están fuera de cualquier clasificación u olvidarse de escribir un número.
   3.2. En blanco.

La metodología

El trabajo realizado es una investigación con un enfoque mixto, pues se lleva a cabo un estudio cualitativo basado en la diferenciación de dificultades que se relaciona con el enfoque cuantitativo mediante el uso de datos numéricos para obtener la frecuencia de cada tipo de error. La investigación se desarrolla mediante un cuestionario que consta de expresiones matemáticas que potencian el error y por lo tanto la pregunta será cuántos alumnos han fallado y qué tipo de error han cometido.

A. Contexto

La investigación se llevó a cabo con dos grupos de estudiantes de distintos cursos de educación secundaria durante el curso académico 2021-2022. En el primer grupo, los alumnos del primer curso de Educación Secundaria Obligatoria del Instituto Fray Luis de León de Salamanca, España, realizaron el cuestionario a modo de examen en 25 minutos de una sesión de la asignatura de Matemáticas.

En el segundo grupo se incluyó el cuestionario como trabajo personal que los alumnos del primer curso de bachillerato del mismo instituto realizaron individualmente de un día para otro. Dado que los contenidos no eran materia del trimestre en el que se pidieron, se solicitó que los resolvieran con lo que recordaran al respecto y que lo hicieran a modo de examen con el objetivo de que los resultados fueran más precisos.

B. Participantes

Un total de 31 alumnos del IES Fray Luis de León (Salamanca) realizaron los ejercicios propuestos. El grupo de 1º de la ESO consta de 20 participantes, dos de ellos con discapacidades visuales, de los cuales uno tiene a mayores dificultades auditivas, y otros dos están repitiendo curso. Del grupo de 1º de bachillerato de la asignatura de Matemáticas I participaron 11 alumnos, entre los que se encuentra un repetidor y ninguno presenta discapacidades.

C. Herramientas

El primer recurso empleado para el desarrollo de este proyecto es la literatura expuesta en la sección anterior y la clasificación de errores extraída (**Clasificación de errores según su origen**). En base a ello y para llevar a cabo la recogida de datos, se diseñaron dos cuestionarios, uno para cada curso, con ejercicios de álgebra cuya resolución incluye pasos en los que se puede cometer un error. Ambos cuestionarios son de elaboración propia, diseñados mediante la selección de ejercicios de los libros de texto de cada grupo o en su defecto basados en ellos. La intención era que se incluyeran todas las dificultades asociadas al lenguaje y los signos algebraicos, de manera que se obtuvieron como resultado apartados con distintas variables o, dicho de otra manera, no todos los ejercicios incluyen todos los tipos de errores. Esto es, dentro del primer ítem (obstáculos), apenas aparecen errores por ser, además de difíciles de detectar, difíciles de analizar en un cuestionario como este, se necesitarían conocer los casos particulares de cada alumno. En cuanto al segundo, los errores con origen en la aritmética son más comunes en el primer curso de secundaria por ser conocimientos que todavía no han tenido tiempo de asentar correctamente, aunque también aparecen en algún caso de bachillerato. Por el contrario, los errores de procedimiento son mayormente habituales en bachillerato, dado que el desarrollo de ejercicios es poco común en un curso tan poco avanzado. Por su parte, las dificultades con el lenguaje y los signos aparecen en ambos cursos, repitiéndose en algunos casos el mismo tipo de error a pesar de la diferencia de edad y nivel. No entraremos en dificultades dadas por los procesos de pensamiento matemático, ya que serían necesarios otro tipo de ejercicios que generalmente están fuera del currículo de las matemáticas. También se ha descartado el estudio del desarrollo cognitivo del alumno por ser algo que no se puede medir mediante unas preguntas, pero sí se ha tomado como variable las actitudes afectivas y emocionales, incluyendo en ella los fallos de cálculo, pues con frecuencia se deben a despistes, y el dejar la pregunta en blanco causado por el miedo a fallar que producen las matemáticas. Este último ítem se tiene en cuenta en todos los apartados de ambos cuestionarios menos en un ejercicio de primero de la ESO. Con esto, se incluyen a continuación los cuestionarios y la explicación de lo que se contabilizará en cada ejercicio:

- *Cuestionario a 1º de la ESO*

EJERCICIOS DE ÁLGEBRA 1º DE ESO

1. Calcula el valor numérico para $x = 2$ para el polinomio $3x^2 - 3x + 5$
2. Opera y simplifica cuando sea posible
   1) $2x^2 \cdot 50x^3$
   2) $30x^3 : 10x$
3. Sea x un número, expresa simbólicamente:
   1) Su doble
   2) Su triple
   3) El número siguiente
   4) El número anterior
4. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:
   1) $2x - 6 + 8x = 7x - 7 + 2$
   2) $2(x-7) - (3x-2) = 3x + 10$
   3) $\frac{3x+2}{5} + \frac{4x-1}{2} = 100$
5. Calcula las siguientes operaciones:

1) $3{,}45 : 0{,}1 =$
2) $4{,}55 \cdot 0{,}001 =$

En el primer curso de secundaria lo único que no se ha tenido en cuenta son los errores de procedimiento, dado que se trata de un curso con poco nivel y en el que por tanto estos ejercicios no son habituales. Con esto, dentro de la categoría de ausencia de sentido se analizan los errores con origen en la aritmética y las dificultades asociadas al lenguaje y signos matemáticos y, en una categoría a parte, los obstáculos.

El ejercicio 1 está pensado para analizar las dificultades que pueden presentar los alumnos al interpretar las variables, es decir, si son capaces de sustituir correctamente la "x" en la expresión algebraica. Por tanto, solo aparecerán errores de variables dentro de las dificultades asociadas al lenguaje y los signos matemáticos, que, junto con las confusiones con la jerarquía de operaciones como error con origen en la aritmética completan los errores de ausencia de sentido.

El segundo ejercicio está pensado principalmente para ver las dificultades que se les presentan a los alumnos con los símbolos, en particular, los de tipo estructural que suponen la multiplicación y división de potencias. Asimismo, es un ejercicio donde pueden aparecer dificultades con las variables por falta de interpretación de las mismas. No se estudian por tanto los errores con origen en la aritmética y solo podrán aparecer dificultades asociadas al lenguaje y signos matemáticos dentro de la categoría ausencia de sentido.

El tercer ejercicio tiene por objetivo medir los conocimientos que los alumnos del primer curso de secundaria tienen sobre el vocabulario algebraico, por lo que se han escogido cuatro enunciados para traducir a lenguaje simbólico. A pesar de que en un inicio solo se contemplaran dificultades en el apartado de vocabulario, han aparecido dificultades con los símbolos de tipo semiótico y con la interpretación de variables. Con esto, nuevamente este ejercicio solo incluye dificultades con el lenguaje y signos algebraicos dentro de los errores de ausencia de sentido y, además, es el único ejercicio que no incluye fallos de cálculo como despistes.

En contraposición, en el cuarto ejercicio sí que se presentan errores de cálculo que tienen su origen en la aritmética. En cuanto a las dificultades con el lenguaje y los signos, todos los apartados pueden incluir dificultades con las variables y las expresiones por tratarse de un ejercicio de resolución de ecuaciones. Además, el segundo apartado puede presentar a mayores errores relacionados con la estructura externa de la ecuación al no aplicar correctamente el signo menos sobre el paréntesis que le sigue.

Para cerrar el cuestionario, el último ejercicio está pensado para estudiar los obstáculos cognitivos que provoca a los alumnos multiplicar y dividir por decimales positivos menores que la unidad. En estos dos apartados tampoco se tendrán en cuenta los fallos de cálculo que pueden ejecutar, ya que estos serían en esencia obstáculos.

- *Cuestionario 1º de Bachillerato*

EJERCICIOS ÁLGEBRA 1º BACH

1. Simplifica:
   1) $\frac{a^2}{a\cdot b}+\frac{a\cdot b^2}{b^4}-a$
   2) $(x^2-y^2):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$
   3) $\frac{a^4(3a)^3}{\sqrt{\sqrt[3]{a^5}}}$
   3) $\frac{3x^2y}{x-2}\cdot\frac{3y}{x}$
   4) $\frac{x^2y+y^2x+x^2-y^2}{x^2y-xy^2+x^2y^2}$

2. Resuelve:
   1) $\frac{3x}{x+2}+\frac{2x}{2-x}=\frac{11}{x^2-4}$
   2) $2^{x+4}-8^x=0$
   3) $\frac{\sqrt{x^2+9}}{\sqrt[3]{x+1}}=\sqrt[3]{x^2+2x+1}$

Al contrario que en el cuestionario anterior, en primero de bachillerato sí que aparecen errores de procedimiento dentro de la categoría de ausencia de sentido, dado que los ejercicios requieren un desarrollo mayor. Dentro de esta última categoría se tienen en cuenta los mismos ítems anteriores: los errores con origen en la aritmética y las dificultades asociadas al lenguaje y signos matemáticos. En esta última, no se han valorado las dificultades con el vocabulario.

El primer apartado del ejercicio de simplificar tiene su dificultad básicamente en eso, pues los alumnos harán una buena interpretación de su estructura interna si simplifican antes de operar. Asimismo, se ha considerado la posibilidad de que no sepan sacar correctamente el común divisor como error de procedimiento, completando así los errores de ausencia de sentido.

El segundo apartado no presenta la posibilidad de cometer errores causados por el lenguaje y los signos algebraicos ni por el procedimiento, sino que los errores de ausencia de sentido se concentran en las dificultades relacionadas con la suma de fracciones en aritmética, esto es, sumar numerador y denominador indistintamente, aunque en este caso es más común no operar el uno del numerador: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y}$ lo que sería análogo a $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2+3}$.

El tercer apartado sí que reúne diversas dificultades relacionadas con el lenguaje y los signos algebraicos, en concreto con los símbolos matemáticos. Por un lado, si el estadio de aprendizaje es estructural, se pueden presentar errores de símbolos relacionados con las operaciones con potencias o con las raíces ($\sqrt{\sqrt[3]{a^5}}=\sqrt[6]{a^5}$); mientras que si el estadio es autónomo el alumno podría llegar a que $a^{37/6}=a^6\sqrt[6]{a}$. Además, es posible que se presenten errores con origen en la aritmética en caso de afirmar que $(3a)^3=3a^3$ o que $3^3=9$ al multiplicar base por exponente, dejando fuera los errores de procedimiento dentro de la categoría de ausencia de sentido.

En el ejercicio 1.4 se pueden presentar dos dificultades relacionadas con el lenguaje y los signos matemáticos: una de tipo estructural interna al no simplificar la "x" antes de operar y la otra relacionada con las variables por no agrupar correctamente y concluir que $3x^2y \cdot 3y = 3x^2y^2$ o similares. En este caso, no se han considerado errores relacionados con la aritmética o con el procedimiento, siendo entonces las dificultades con el lenguaje y los signos los únicos errores de ausencia de sentido que se tienen en cuenta.

El último de los apartados acerca de simplificar está pensado esencialmente para eso, para medir el razonamiento matemático que los alumnos tienen al tener que sacar factor común de forma no tan directa a como están acostumbrados. Asimismo, se ha contemplado la posibilidad de que los alumnos consideren $x^2y - xy^2 = 0$. Son entonces las dificultades relacionadas con la estructura interna y con las variables las que se encuentran dentro de la categoría de lenguaje y signos, siendo además las únicas de tipo ausencia de sentido.

Con los ejercicios sobre resolución de ecuaciones se introduce la dificultad de interpretar correctamente la expresión y con ella el signo igual, de manera que los tres apartados cuentan con la categoría de expresiones. En el caso del primer apartado también puede haber problemas con la estructura de la ecuación, tanto con la interna por no darse cuenta de que $x^2 - 4 = (-1) \cdot (2 - x) \cdot (x + 2)$, como con la externa por no aplicar el menos sobre la fracción o sobre el paréntesis tras haber multiplicado por el denominador común. Esto es, el ejercicio 2.1. puede presentar dificultades asociadas al lenguaje y los signos del tipo expresiones, estructura interna y estructura externa. Además, pueden darse errores con origen en aritmética siguiendo la línea del ejercicio 1.2 en el caso de que no se sumen bien las fracciones. Por último, el no resolver correctamente la ecuación de segundo grado se considera un error de procedimiento por no saber aplicar una fórmula, lo que completa los errores de ausencia de sentido.

En el segundo apartado sobre resolución de ecuaciones aparecen múltiples dificultades de distinto tipo. La forma de afrontar el ejercicio puede ser un obstáculo en caso de que decidan elevar a la sexta ambos lados de la ecuación para deshacerse de las raíces, pues no está mal ejecutado y en muchos casos es útil, pero en este ejercicio lleva a tener que resolver un polinomio de grado 5, lo que, además de suponer una dificultad mayor, se añaden soluciones no reales. En cuanto a los errores de ausencia de sentido, se pueden presentar dificultades con el procedimiento y con el lenguaje y los signos algebraicos. Respecto a los primeros, cuando los alumnos aplican un exponente o una raíz sobre cada término de un polinomio como si se tratara de una multiplicación ($\sqrt{x^2 + 9} = x + 3$) es a causa de un error de procedimiento, pues viene precisamente de una regla que sí es válida en el caso del producto. Los segundos se dividen en una mala interpretación del signo igual como error de expresión y en el hecho de que los alumnos no se den cuenta de que $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, que se considera un error de estructura interna por ser este el método más eficaz para resolver la ecuación.

El último ejercicio puede presentar simplemente errores de tipo obstáculo en el caso de que el alumno considere sumar los exponentes cuando sus bases se encuentran sumando y no como producto. Se trata de un obstáculo y no un error de procedimiento porque en este caso es un planteamiento válido al estar la ecuación igualada a 0, pero no sería válido para todos los casos.

Como último recurso, se tomaron dos estudios similares a este proyecto, uno para cada curso, que incluyeran un análisis de datos sobre errores algebraicos.

D. Datos

Los datos empleados para el análisis serán las fichas completadas por los alumnos de ambos cursos.

E. Procedimiento

El proceso llevado a cabo empieza con la **investigación bibliográfica** sintetizada en el estado del arte de este trabajo, junto con su revisión crítica expuesta en el apartado que se encuentra a continuación y en el que se extraen conclusiones al respecto. En base a ello, se lleva a cabo el **diseño del cuestionario** justificado en el apartado C de esta sección.

A continuación, se entregó a los alumnos el cuestionario correspondiente para que lo resolvieran de manera individual y tras su recolección, se pasó al tercer paso: el **análisis de datos**. Dicho proceso consistió en, ejercicio a ejercicio, contar el número de errores que se habían cometido de cada tipo, errores que ya habíamos presupuesto al diseñar el cuestionario. Una vez completado el proceso cuantitativo, se calculó la frecuencia de cada tipo de error para posteriormente comparar los datos obtenidos. El objetivo es averiguar cuáles son los fallos más cometidos dentro del bloque de *dificultades asociadas al lenguaje y los signos algebraicos* y, en un sentido más general, comparar la frecuencia de los *obstáculos*, los *errores de ausencia de sentido* y las *dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales*, incluyendo los subtipos 2.1., 2.2., 2.3., 3.1. y 3.2. Una vez obtenidos estos datos en cada curso, se pasará a reflexionar sobre si los tipos de errores más frecuentes en uno coinciden con los del otro. Paralelamente, se corrigió el cuestionario para obtener la nota media de cada curso y así poder realizar una comparativa acerca del nivel de álgebra de cada curso.

Finalmente, con la ayuda de los dos estudios similares, se reflexionó acerca de si los resultados y la metodología empleada fueron los más acertados y su transcendencia.

F. Sistema de análisis

En este trabajo se llevan a cabo dos sistemas de análisis distintos: uno para el análisis del nivel de conocimientos y otro para el análisis de la frecuencia de errores. El primero se ejecuta mediante una media aritmética donde los ejercicios realizados de forma correcta suman positivamente y se dividen por tanto entre el número de ejercicios totales y el número de alumnos que han participado en la investigación. Posteriormente, se comparan las cifras de ambos cursos y se estudia el progreso.

El análisis de frecuencias comienza con el conteo de cada tipo de error en base a la clasificación expuesta en el marco teórico y en base al diseño de los cuestionarios explicado en herramientas. La clasificación es la siguiente:

Clasificación de errores según su origen
1. Obstáculos

2. Errores de ausencia de sentido
    2.1. Con origen en la aritmética
    2.2. Errores de procedimiento
    2.3. Dificultades asociadas al lenguaje y signos algebraicos
        i. Vocabulario
        ii. Símbolos
            - En estado semiótico
            - En estado estructural
            - En estado autónomo
        iii. Variables
        iv. Expresiones
        v. Estructura de las expresiones
            - Externa
            - Interna
3. Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales
    3.1. Cálculos
    3.2. En blanco

La probabilidad se calcula a partir de la Regla de Laplace, tomando como casos posibles aquellos ejercicios donde el tipo de error analizado tuviera una posibilidad real de aparecer. Esto es, en cada curso completaremos la tabla correspondiente donde las casillas con guion no se introducen como casos posibles:

- Cuestionario de 1º de la ESO:

	OBST	**AUSENCIA DE SENTIDO**							**ACTITUDES**	
		ARITMÉTICA	**LENGUAJE Y SIGNOS**						**CÁLCULOS**	**EN BLANCO**
			VAR	**SIMB EST**	**SIMB SEM**	**EXPR**	**EST EXT**	**VOCAB**		
1	-			-	-	-	-	-		
2a	-	-			-	-	-	-		
2b	-	-			-	-	-	-		
3a	-	-		-		-	-		-	
3b	-	-		-		-	-		-	
3c	-	-		-	-	-	-		-	
3d	-	-		-	-	-	-		-	
4a	-			-	-		-	-		
4b	-			-	-			-		
4c	-			-	-		-	-		
5a		-	-	-	-	-	-	-	-	
5b		-	-	-	-	-	-	-	-	

- Cuestionario de 1º de Bachillerato:

	OBST	AUSENCIA DE SENTIDO								ACTITUDES	
		ARITM	PROCED	LENGUAJE Y SIGNOS						CALC	E.B.
				SIMB EST	SIMB AUT	VARIABLES	EXPR	EST INT	EST EXT		
1.a	-	-		-	-	-	-		-		
1.b	-		-	-	-	-	-	-	-		
1.c	-		-			-	-	-	-		
1.d	-	-	-	-	-		-		-		
1.e	-	-	-	-	-		-		-		
2.a	-			-	-	-					
2.b		-		-	-	-			-		
2.c		-	-	-	-	-	-	-	-		

Resultados

En esta sección se incluyen los datos obtenidos de los cuestionarios y con ellos los resultados tras el proceso de análisis correspondiente.

1. Análisis del nivel de conocimientos

1.1. Primero de ESO

Dado que contamos con 20 alumnos y cada uno de ellos ha realizado un total de 12 ejercicios, se han realizado un total de 240 ejercicios, de los cuales se han resuelto correctamente los siguientes:

1	2a	2b	3a	3b	3c	3d	4a	4b	4c	5a	5b	**TOTAL**
15	15	10	16	16	12	11	14	3	6	11	14	**143**

Tabla 1.

Con lo que la media de la clase es de un 5,9 sobre 10.

1.2. Primero de bachillerato

En este caso, contamos con un total de 88 ejercicios al haber 11 alumnos y 8 apartados en la ficha, siendo el número de ejercicios correctamente resueltos el siguiente:

1.a.	1.b.	1.c.	1.d.	1.e.	2.a.	2.b.	2.c.	**TOTAL**
8	8	6	10	6	6	5	10	**59**

Tabla 2.

Con lo cual, la nota media de la clase es de 6,7 sobre 10.

1.3. Comparación de niveles

Si bien el primer curso de secundaria corresponde con la iniciación al álgebra, la diferencia de nivel entre dicho curso y bachillerato no es especialmente alta.

El nivel que se exige en el IES Fray Luis de León en álgebra es superior al que establece el currículo oficial, que es básicamente traducciones al lenguaje algebraico y operaciones con expresiones algebraicas sencillas, de manera que el último ejercicio tendría una complicación ligeramente superior. Con esto y dado que es el primer contacto que los alumnos tienen con “una equis”, el nivel obtenido es razonable. Del mismo modo, tampoco resulta sorprendente el nivel de los alumnos en primero de bachillerato pues, aunque llevan 5 cursos en contacto con el lenguaje y operaciones algebraicas, son los mismos 5 cursos que han tenido tanto para solventar un error como para mecanizarlo. Además, es un curso muy pautado por el currículo, de manera que si algo se sale del temario con el que los estudiantes están trabajando sucede una especie de “borrón y cuenta nueva” y olvidan los conocimientos ya adquiridos.

En conclusión, aunque la lógica diga que el nivel de conocimientos en álgebra de primero de bachillerato deba ser mayor por ser algo trabajado a largo plazo, los resultados obtenidos no dicen lo mismo por ser este solo menos de un punto mayor que el de primero de la ESO, en concreto de una diferencia de 0,8 puntos.

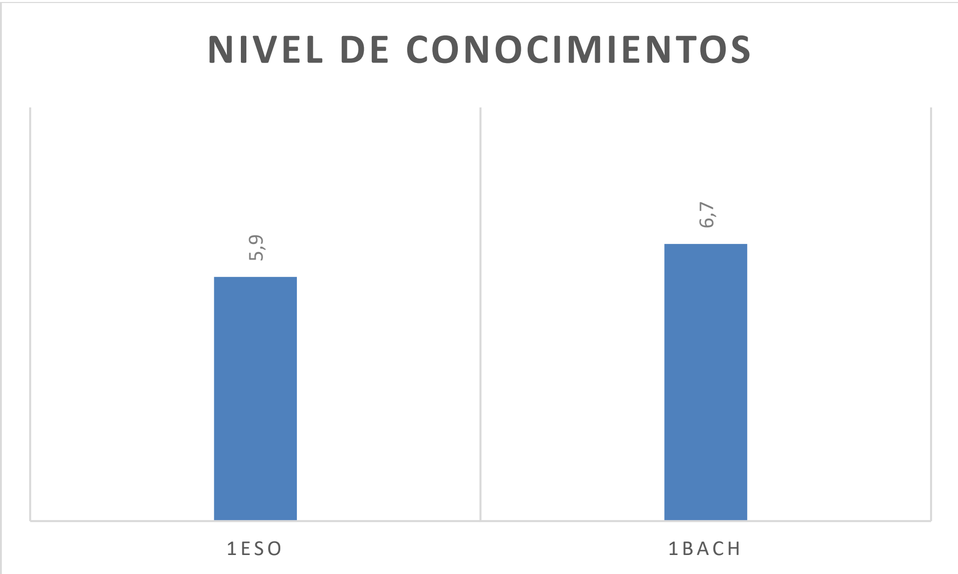

Tabla 3. Elaboración propia.

2. Análisis de errores

2.1. Primero de ESO

Siguiendo la clasificación explicada en el sistema de análisis, se contabilizarán y analizarán todos los tipos de errores uno por uno.

1. Obstáculos

Con los dos apartados del ejercicio 5 se han contabilizado un total de 15 errores asociados a obstáculos. Son más frecuentes los fallos en el apartado de la división, pero la mayoría de estos no son por asociar dividir con disminuir (*Ilustración 2*), sino que “mueven mal la coma” (*Ilustración 1*). En la multiplicación hay el mismo número de alumnos que asocia multiplicar con aumentar (*Ilustración 1*) como los que se equivocan al “mover la coma” (*Ilustración 3*).

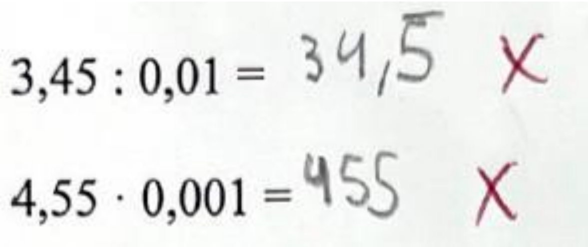

Ilustración 1. Obstáculo.

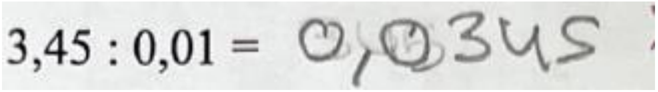

Ilustración 2. Obstáculo.

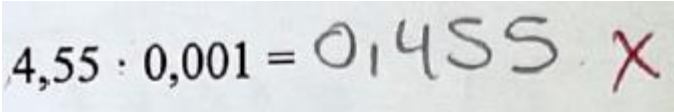

Ilustración 3. Obstáculo.

2. Errores de ausencia de sentido

2.1. Con origen en la aritmética

En total se cometen 14 errores con origen en la aritmética repartidos en los 4 apartados donde existía la posibilidad de que aparecieran. En particular, en el primer ejercicio 4 alumnos resuelven mal el ejercicio al cometer fallos con la jerarquía de operaciones (*Ilustración 4*), mientras que los restantes se concentran en el ejercicio de resolución de ecuaciones. En los tres apartados nos encontramos con múltiples alumnos con problemas en sumas que incluyen números negativos, como por ejemplo $-7+2=9$ o $2x-3x=1x$ (*Ilustración 5*).

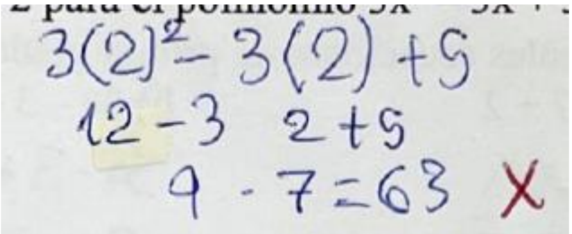

Ilustración 4. Error con origen en aritmética.

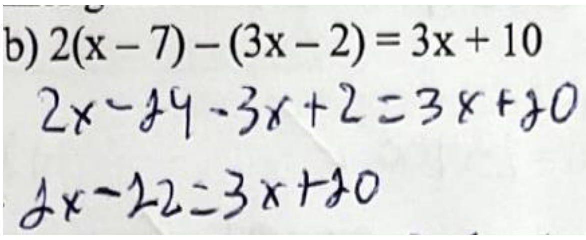

Ilustración 5. Error con origen en aritmética.

2.2. Errores de procedimiento

No se analizan.

2.3. Dificultades asociadas al lenguaje y signos algebraicos

i. Vocabulario.

Las dificultades relacionadas con el vocabulario estaban concentradas en el tercer ejercicio de donde se obtienen 25 errores. Ocho de ellos vienen repartidos equitativamente en el primer y segundo apartado por confundir “doble” y “triple” con “elevar al cuadrado” y “elevar al cubo” respectivamente (*Ilustración 6*). Los errores cometidos en los últimos apartados corresponden a los mismos alumnos, excepto un caso que traduce correctamente “el número siguiente”, pero en “el número anterior” se confunde y escribe $1-x$. Los demás cometen fallos como escribir “1” y “0”, “$1\cdot x$” y “$-1\cdot x$” o “$>x$” y “$<x$” respectivamente, lo que

indica una total incomprensión del lenguaje algebraico (*Ilustración 6. Ilustración 7*)

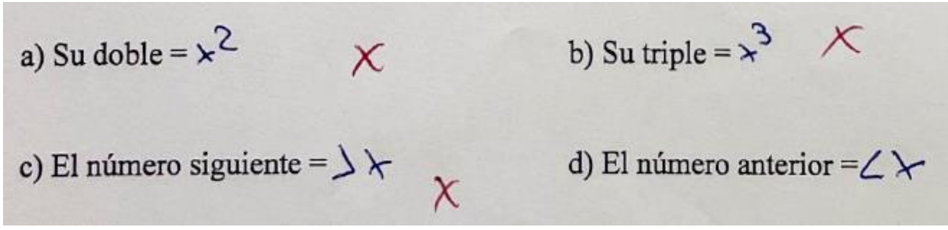

Ilustración 6. Error de vocabulario.

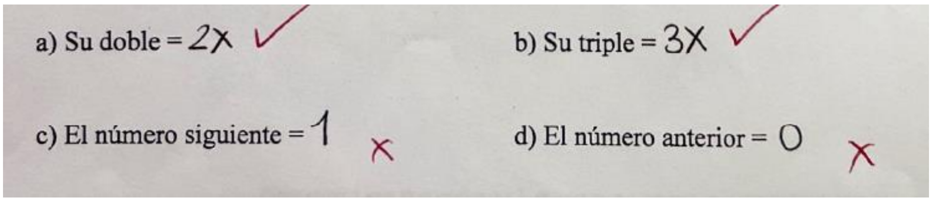

Ilustración 7. Error de vocabulario.

ii. Símbolos

Según su estado de desarrollo del aprendizaje:

- Estado semiótico. Sorprendentemente, aparecieron en el tercer ejercicio 3 errores relacionados con los símbolos en estado de aprendizaje semiótico. Dos alumnos escribieron “elevar al cuadrado” como $x \cdot x$ y unos de ellos hizo lo mismo con “elevar al cubo” (*Ilustración 8*).

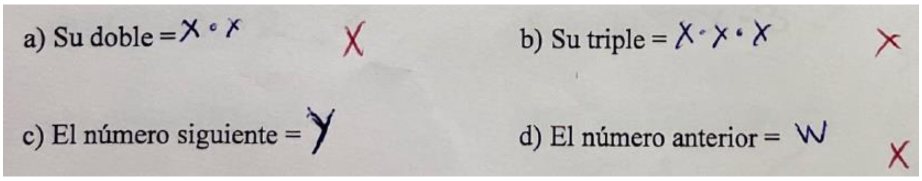

Ilustración 8. Error de símbolos.

- Estado estructural. En este caso, aparecen un total de 5 errores agrupados en el ejercicio 2. Están concentrados en la división, pues los alumnos aplican la fórmula de la multiplicación al escribir x^4 como resultado de $x^3 : x$ (*Ilustración 9*), de manera que el procedimiento de multiplicación de potencias se entiende correctamente. Aun así, uno de los estudiantes afirma que no se puede realizar ninguna de las operaciones debido a la confusión del producto con la suma, dado que la última efectivamente es una operación que no se puede llevar a cabo.

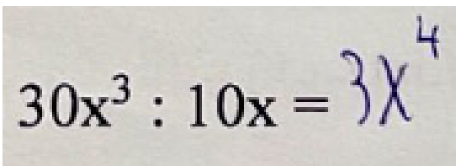

Ilustración 9. Error de símbolos.

- Estado autónomo. Resulta un estado de aprendizaje demasiado desarrollado para estudiantes de 12 años, de manera que su estudio no se puede aplicar a este cuestionario.

iii. Variables.

Las dificultades con las variables era algo a tener en cuenta en todos los ejercicios y, a excepción del primero, se ha dado al menos un error en cada apartado, sumando un total de 16 errores. En efecto, en el ejercicio 2 las variables suponen un problema al omitir la “x” en la multiplicación, pues 3 y 4 alumnos escriben como resultado 100^5 en vez de $100x^5$ y 3^2 en vez de $3x^2$, respectivamente (*Ilustración 10. Ilustración 11*).

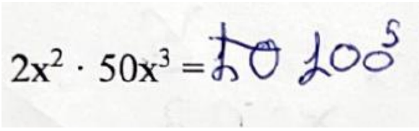

Ilustración 10. Error de variables.

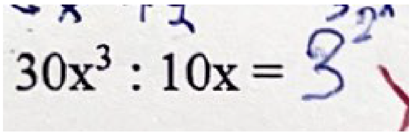

Ilustración 11. Error de variables.

Otro error muy distinto al anterior lo comete un alumno en el ejercicio 3. Se da al utilizar el orden de las letras en el vocabulario para designar “el número siguiente” (*y*) y el “número anterior” (*w*), lo que refleja que no entiende que la “x” puede ser cualquier número (*Ilustración 12*).

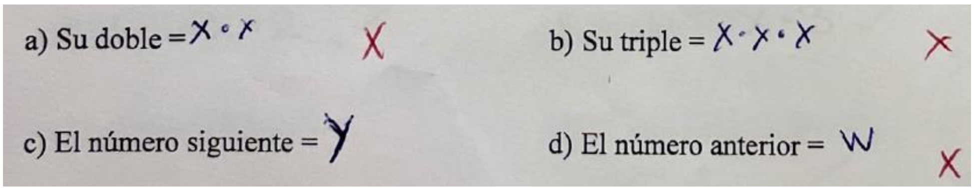

Ilustración 12. Error de variables.

En el ejercicio 4 se da un error en la línea del ejercicio 2, de manera que se dan casos en los que se omiten las variables (*Ilustración 13*) y otros en el que se añaden de forma errónea (*Ilustración 14*).

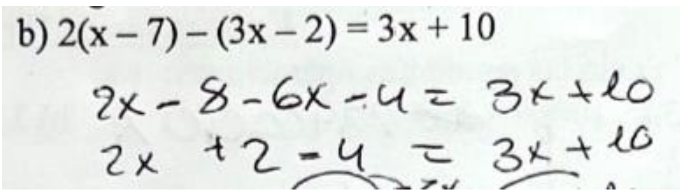

Ilustración 13. Error de variables.

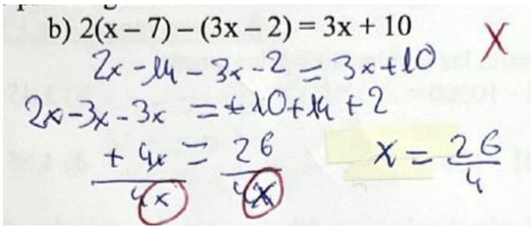

Ilustración 14. Error de variables.

Sin embargo, ninguno de los 20 alumnos ha fallado al sustituir la variable en la ecuación en el primer ejercicio.

iv. Expresiones

Dado que los errores de expresión están condicionados por la interpretación del signo igual, estos solo podían aparecen en el último ejercicio, donde se suman un total de 20 fallos. En los dos primeros apartados no se equivocan muchos alumnos (*Ilustración 15*), pero en el último más de la mitad no multiplica por 10 en el lado derecho de la ecuación (*Ilustración 16*). Además, se da el caso de un alumno que claramente no entiende el concepto de ecuación (*Ilustración 17*).

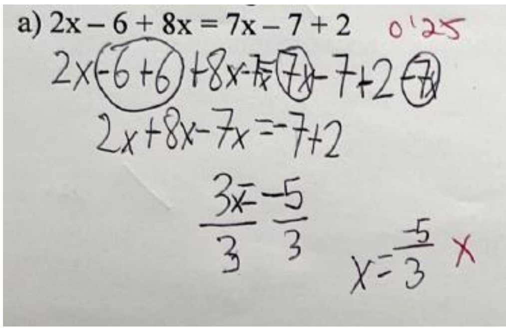

Ilustración 15. Error de expresión.

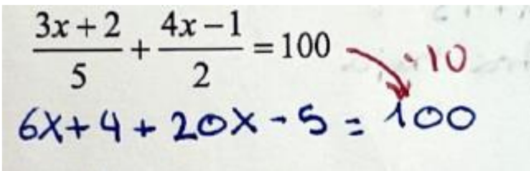

Ilustración 16. Error de expresión.

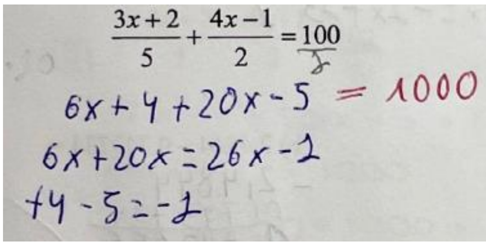

Ilustración 17. Error de expresión.

v. Estructura de las expresiones

Puede ser:

- Externa. Se han contabilizado un total de 12 errores en el ejercicio 4.b., de manera que pocos aplican correctamente el menos sobre el paréntesis (*Ilustración 18*) y, a mayores, muchos multiplican también el segundo paréntesis por el 2 que únicamente afecta al primero (*Ilustración 19*).

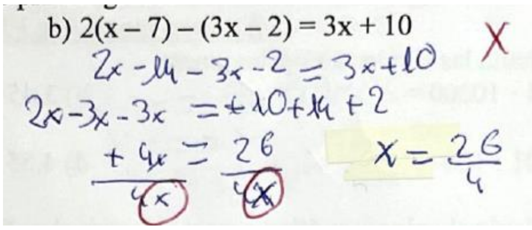

Ilustración 18. Error de estructura externa.

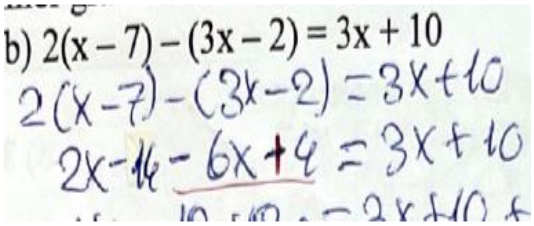

Ilustración 19. Error de estructura externa.

- Interna. Al igual que otros ítems, la estructura interna no es una variable evaluable porque al tener tan poco nivel los alumnos no tienen variedad a la hora de escoger métodos de resolución.

3. *Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales*

3.1. Cálculos

Exceptuando el ejercicio 3, los demás suman a los fallos definidos como “despistes” 7. Por ejemplo, se considera un error de cálculo por despiste el de la *Ilustración 20*, pues al afirmar que $-14 + 2 = -2$, lo más probable es que confundiera el -14 con un -4.

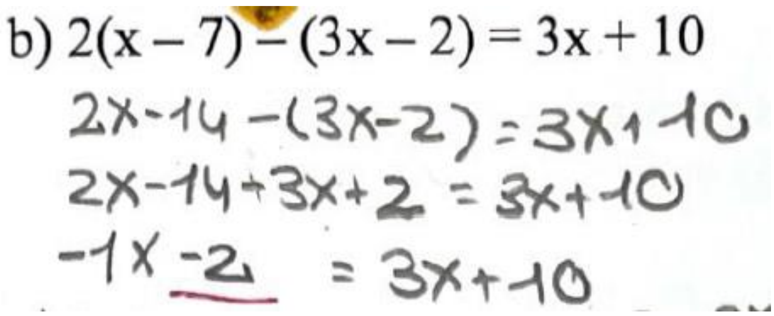

Ilustración 20. Error de cálculo por despiste.

3.2. En blanco

De todos los ejercicios, se han sumado 5 apartados en blanco.

Finalmente, ya nos encontramos en posición de completar la tabla, que queda como sigue:

OBS	AUSENCIA DE SENTIDO		ACTITUDES	
	ARITM	LENGUAJE Y SIGNOS	CÁLCULOS	

			VAR	SIMB EST	SIMB SEM	EXPR	EST EXT	VOCAB		EN BLANCO
1	-	4	0	-	-	-	-	-	0	1
2a	-	-	3	1	-	-	-	-	1	0
2b	-	-	4	4	-	-	-	-	1	1
3a	-	-	1	-	2	-	-	4	-	0
3b	-	-	1	-	1	-	-	4	-	0
3c	-	-	1	-	-	-	-	8	-	0
3d	-	-	1	-	-	-	-	9	-	0
4a	-	2	1	-	-	3	-	-	1	1
4b	-	7	2	-	-	3	12	-	3	1
4c	-	1	2	-	-	14	-	-	1	1
5a	9	-	-	-	-	-	-	-	-	0
5b	6	-	-	-	-	-	-	-	-	0
TOTAL	15	14	16	5	3	20	12	25	7	5
CASOS	2	4	10	2	2	3	1	4	6	12

Tabla 4. Resultados

2.1.1. Frecuencia de errores

En primer lugar, analizaremos el caso particular de las dificultades que suponen el lenguaje y signos algebraicos para los estudiantes de primero de secundaria.

	LENGUAJE Y SIGNOS					
	VARIABLES	**SIMB EST**	**SIMB SEM**	**EXPRESION**	**EST EXT**	**VOCAB**
TOTAL	16	5	3	20	12	25
CASOS TOTALES	10	2	2	3	1	4
FRECUENCIA	0,08	0,125	0,075	0,33333333	0,6	0,3125

Tabla 5. Frecuencia de errores. Elaboración propia.

Mientras que las dificultades relacionadas con las variables y los símbolos son mínimas, destaca la dificultad que supone para los alumnos de primero de secundaria los problemas con la estructura externa de las expresiones, pues son más de la mitad los que no saben aplicar correctamente un signo negativo sobre un paréntesis, algo que también supone un impedimento para muchos niños de primaria en aritmética. También resaltan, aunque no tanto, los problemas con las expresiones, dado que los alumnos no terminan de interpretar correctamente el símbolo igual, pues están acostumbrados a verlo como un intermediario entre cuentas hasta llegar a una solución y no como un signo de equivalencia entre dos expresiones. En la misma medida se encuentran los problemas con el vocabulario, que están ligeramente ligados a la interpretación de las variables en el sentido de que "la equis puede ser cualquier número", algo que los alumnos no entienden.

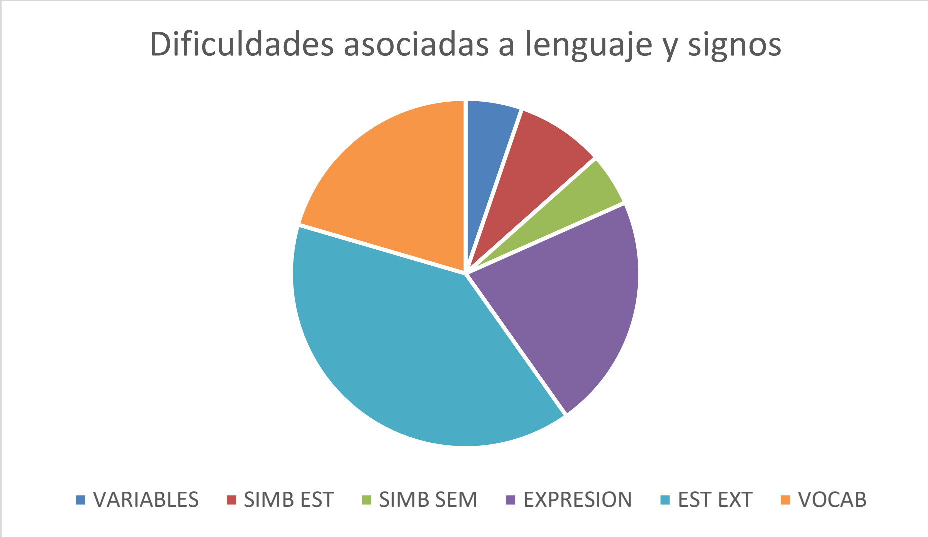

Tabla 6. Elaboración propia.

Pasaremos ahora a realizar una comparación más general relacionando la probabilidad de cometer errores con origen en obstáculos, con errores de ausencia de sentido (los asociados a la aritmética y al lenguaje y los signos algebraicos) y con los asociados a las actitudes emocionales del alumno (despistes y el dejar el ejercicio en blanco).

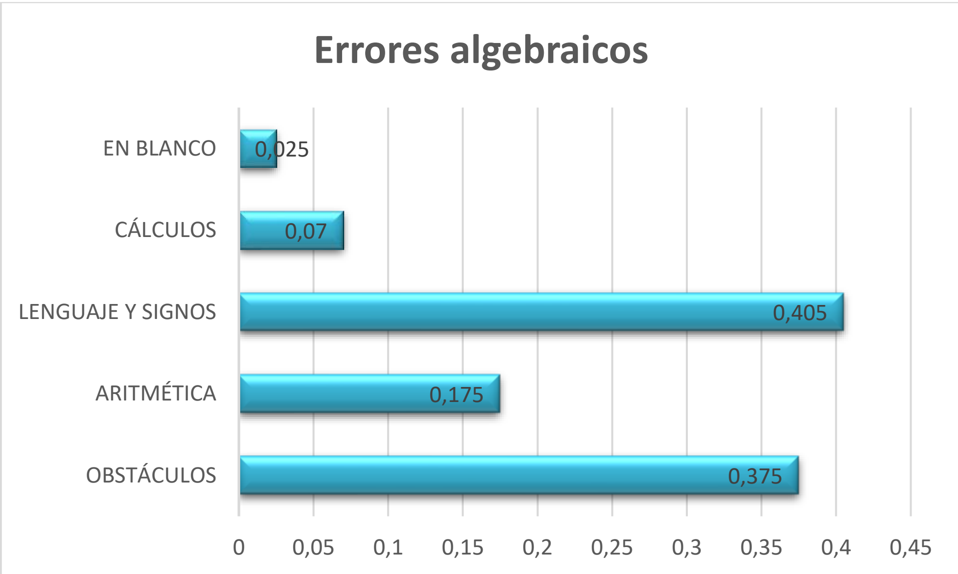

Tabla 7. Elaboración propia.

Así como era de esperar que los errores propiamente algebraicos resultaran los más problemáticos suponiendo un 0.4 de probabilidad de fallo, sorprende que los errores asociados a actitudes afectivas y emocionales tengan una frecuencia menor a 0.1, dado que el hecho de ser el primer contacto de los alumnos con el álgebra sería muy razonable que esto provocara inseguridad en ellos generándoles situaciones de miedo por no saber cómo enfrentarse a los ejercicios. También se precedía obtener un porcentaje más alto de los errores causados por conocimientos mal asentados en la etapa de primaria, mientras que la frecuencia no llega a 0,2. Esto es, muchos alumnos arrastran errores asociados a la aritmética por no haber interiorizado correctamente conocimientos básicos en matemáticas como la jerarquía de operaciones o la suma con números negativos, pero este no es el caso de la mayoría de los alumnos del IES Fray Luis de León. Sin embargo, lo verdaderamente preocupante es el alto número de alumnos que se encuentran con un obstáculo en el ejercicio de operaciones. De esta cifra podría ser responsable la falta de reflexión que por ejemplo tiene el alumno en *Ilustración 1* dado que ambas operaciones, multiplicar y dividir, catalogadas como opuestas, le dan como resultado un número mayor. Sin embargo, es una conclusión a la que un niño de su edad sería complicado que llegara de forma individual, además de que no es el caso de todos los alumnos, por lo que seguramente el error tenga su origen en la enseñanza, dado que es algo que acostumbra a explicarse por un método memorístico. Independientemente de los obstáculos, destaca la cifra obtenida respecto al lenguaje y signos algebraicos (40%), por lo que impartir la materia nueva de la forma habitual no es suficiente, es decir, es un área que requiere más explicaciones y dedicarle más tiempo para intentar paliar todos estos errores comunes a los alumnos del primer curso de secundaria.

2.2. Primero de bachillerato

Análogamente, se contabilizarán y analizarán todos los tipos de errores en base a la clasificación del sistema de análisis.

1. *Obstáculos*

   En este caso, 3 alumnos de bachillerato se toparon con un obstáculo, todos en el ejercicio 2.2, pues en el último ninguno de los 11 estudiantes afirmó que $2^{x+4} - 8^x = 2^{x+4-3x}$. En el ejercicio 2.1, de los tres alumnos que elevan la ecuación a la sexta, ninguno de ellos termina por resolver correctamente el ejercicio (*Ilustración 21*).

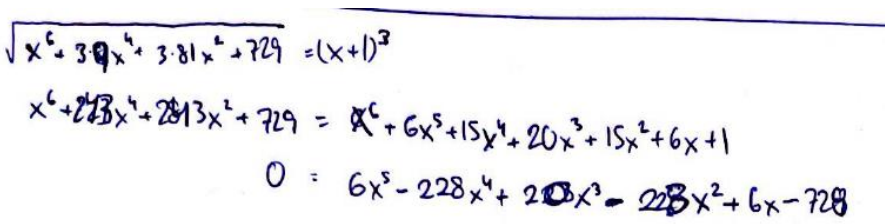

Ilustración 21. Obstáculo.

2. Errores de ausencia de sentido

   2.1. Con origen en la aritmética

   En el ejercicio 1.3, a pesar de que ningún alumno se olvide de elevar 3 al cubo, sí que realizan mal la operación y dos de ellos afirman que 3 al cubo es 9 (*Ilustración 22*), un error que parece fruto de las prisas pero que es en esencia un concepto mal aprendido que está en el subconsciente, al igual que afirmar que $2 \cdot 3 = 5$.

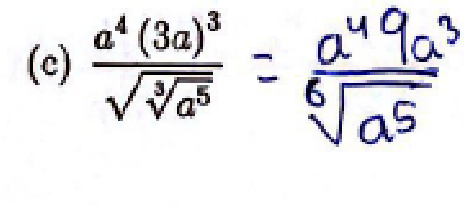

Ilustración 22. Error con origen en aritmética.

En el segundo y el sexto apartado se comete el mismo tipo de error relacionado con la suma de fracciones. En el 1.2 dos alumnos afirman que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$ (*Ilustración 23*) y en el 2.1 uno, aunque sí que multiplica los denominadores de las fracciones, suma los numeradores sin haber multiplicado por el mínimo común denominador (*Ilustración 24*). Con esto se tienen en total 5 errores con origen en la aritmética.

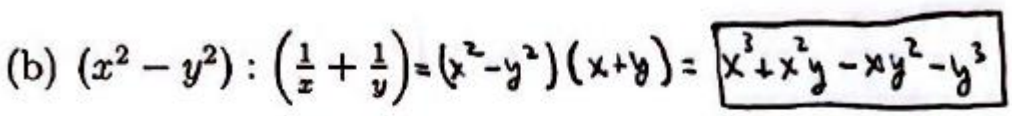

Ilustración 23. Error con origen en aritmética.

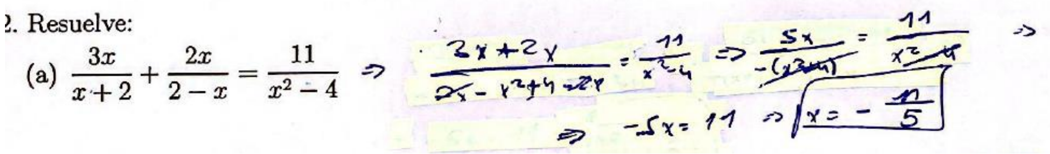

Ilustración 24. Error con origen en aritmética.

2.2. Errores de procedimiento

Teniendo en cuenta los apartados correspondientes, se han contabilizado un total de 6 errores de procedimiento con causas distintas.

En el primer ejercicio se dan fallos asociados a la suma de fracciones: un alumno saca perfectamente el denominador común tras haber simplificado, pero multiplica todos los numeradores por dicho término (*Ilustración 25)*, mientras que otros ni simplifican ni obtienen correctamente el mínimo común divisor en el denominador, lo que le lleva a realizar de forma totalmente incorrecta el ejercicio (*Ilustración 26*).

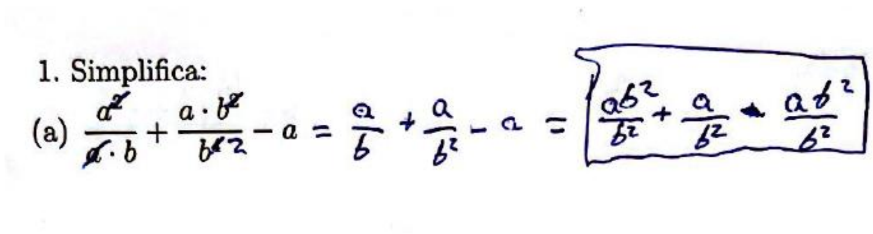

Ilustración 25. Error de procedimiento.

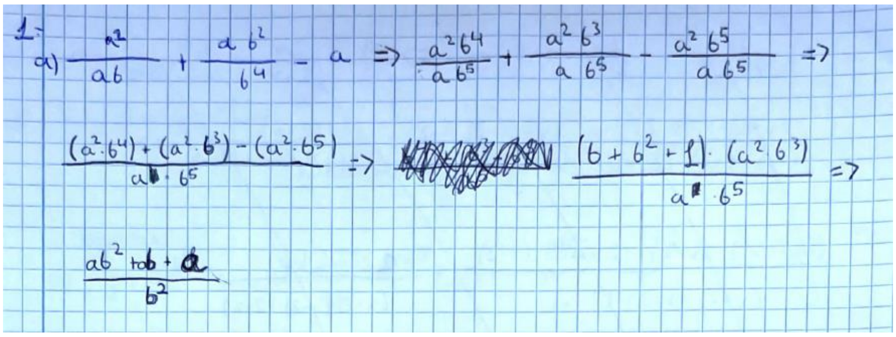

Ilustración 26. Error de procedimiento.

En el ejercicio 2.1 el error de procedimiento es a causa de un alumno que no aplica correctamente la fórmula de la ecuación de segundo grado (*Ilustración 27*) y en el 2.2 dos consideran que $(x^2 + 9)^3 = x^6 + 9^3$ (*Ilustración 28*).

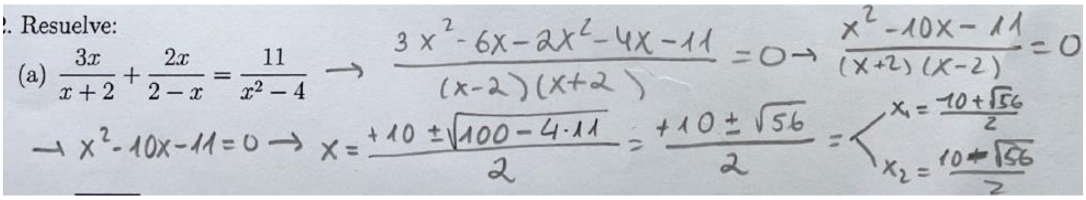

Ilustración 27. Error de procedimiento.

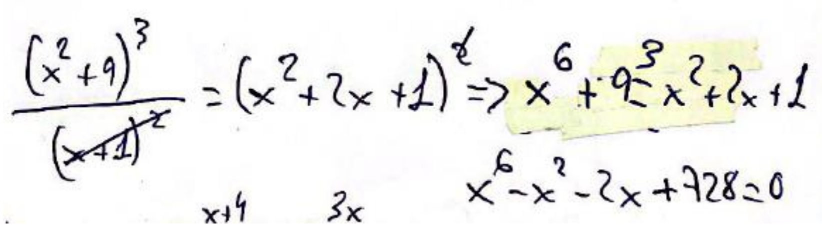

Ilustración 28. Error de procedimiento.

2.3. Dificultades asociadas al lenguaje y signos algebraicos:

i. Vocabulario

No se estudian.

ii. Símbolos

Según su estado de desarrollo del aprendizaje:

- Estado semiótico. No han aparecido errores de este tipo por tratarse de un curso de nivel avanzado.
- Estado estructural. En el ejercicio 1.3 ninguno de los alumnos se equivoca en las raíces, por lo que los dos errores que se dan son por operar mal con potencias (*Ilustración 29*).

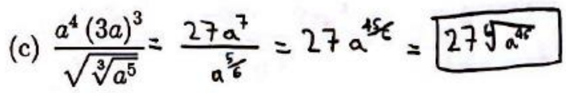

Ilustración 29. Errores de símbolos.

- Estado autónomo. En el mismo ejercicio, el paso final de convertir la potencia a una raíz y simplificar lo realizan bastantes alumnos, incluso algunos que obtuvieron mal el resultado final por un error anterior, siendo 5 los que no lo hacen.

iii. Variables

En el apartado 1.4 ningún alumno afirma que $3x^2y \cdot 3y = 3x^2y^2$, así como en el siguiente nadie considera que $x^2y - xy^2 = 0$, lo que las dificultades relacionadas con las variables son inexistentes.

iv. Expresiones

De los tres apartados del ejercicio de resolución de ecuaciones, solo en el segundo se da un error de expresión en el que un alumno simplifica el denominador de un lado de la ecuación con el numerador del otro (*Ilustración 30*).

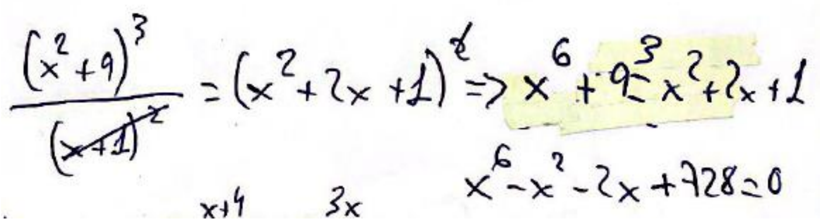

Ilustración 30. Error de expresión.

v. Estructura de las expresiones

Puede ser:

- Externa

Los problemas con la estructura externa están concentrados en un alumno que se olvida de aplicar el menos sobre la fracción (*Ilustración 31*).

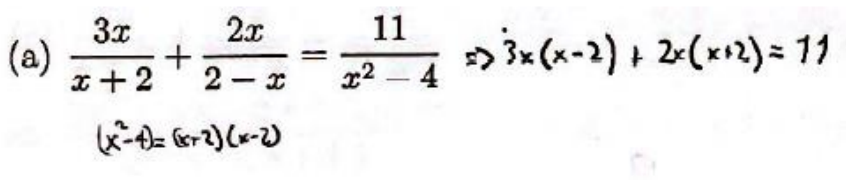

Ilustración 31. Error de estructura externa.

- Interna

Por el contrario, los problemas con la estructura interna están más repartidos por los apartados pero son bastante similares. En cuanto al primer ejercicio, en el primer y cuarto apartado se dan errores por no simplificar (*Ilustración 32. Ilustración 33*) y en el quinto hay 3 alumnos que no son capaces de sacar factor común en el numerador, si bien lo han hecho en el denominador al ser un paso directo (*Ilustración 34*). En el segundo ejercicio, hay un alumno que no interpreta la relación en la diferencia de cuadrados del primer apartado, similar a lo que les ocurre a varios alumnos en el siguiente al no darse cuenta de que $x^2 + 2x + 1$ es una identidad notable (*Ilustración 35*). Con esto, se suman 13 errores dentro de esta categoría.

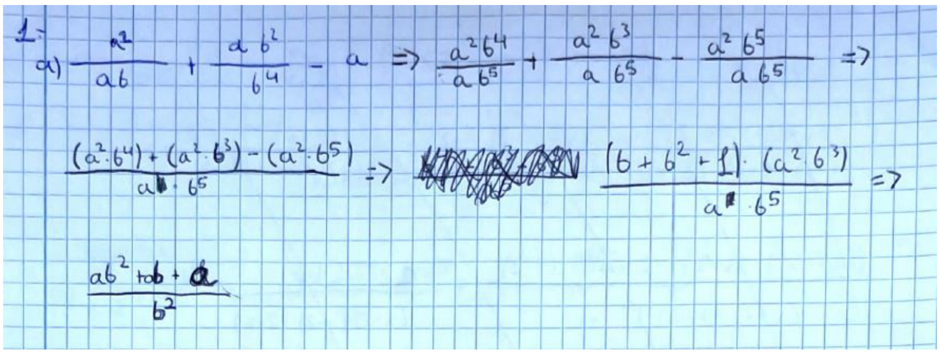

Ilustración 32. Error de estructura interna.

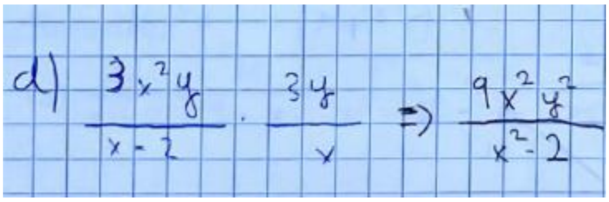

Ilustración 33. Error de estructura interna.

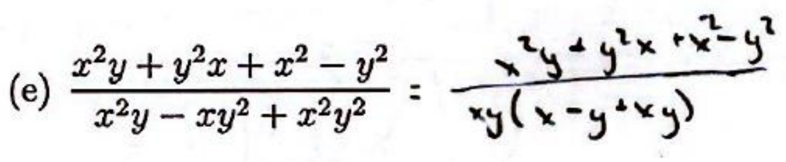

Ilustración 34. Error de estructura interna.

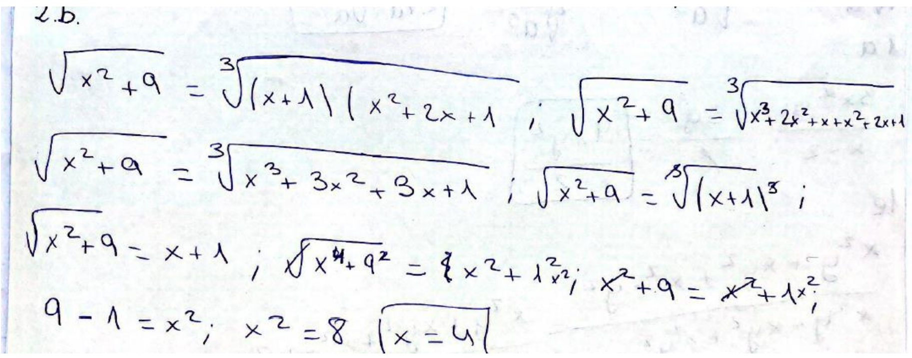

Ilustración 35. Error de estructura interna.

3. Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales:
   3.1. Cálculos

   Se han contabilizado en todos los ejercicios un total de 4 errores categorizados como "despistes", como por ejemplo un fallo de cuentas al resolver la ecuación final del ejercicio 2.3 (*Ilustración 36*).

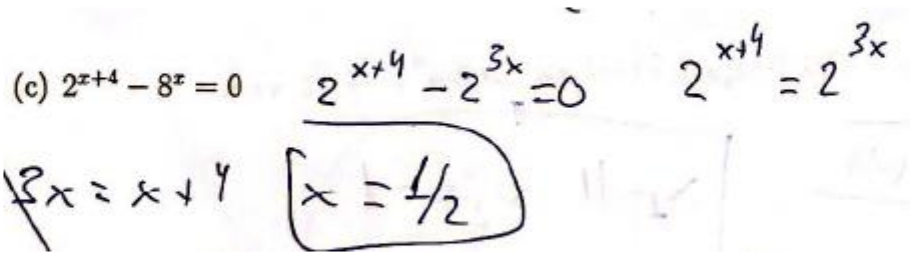

Ilustración 36. Error de cálculo.

   3.2. En blanco.

   De todos los apartados, se han dejado 7 en blanco.

Finalmente, ya nos encontramos en posición de completar la tabla que queda como sigue:

	OBST	AUSENCIA DE SENTIDO								ACTITUDES	
		ARITM	PROCED	LENGUAJE Y SIGNOS						CÁLCULOS	EN BLANCO
				SIMB EST	SIMB AUT	VAR	EXPR	EST INT	EST EXT		
1.1	-	-	3	-	-	-	-	4	-	0	0
1.2	-	2	-	-	-	-	-	-	-	0	1
1.3	-	2	-	2	5	-	-	-	-	0	0
1.4	-	-	-	-	-	0	-	2	-	0	0
1.5	-	-	-	-	-	0	-	3	-	0	2
2.1	-	1	1	-	-	-	0	1	1	1	1
2.2	3	-	2	-	-	-	1	3	-	2	3
2.3	0	-	-	-	-	-	0	-	-	1	0
TOTAL	3	5	6	2	5	0	1	13	1	4	7
CASOS	2	3	3	1	1	2	3	5	1	8	8

Tabla 8. Resultados.

2.2.1. Frecuencia de errores

Análogamente a lo realizado con primero de secundaria, pasamos ahora a calcular la frecuencia de cada tipo de error dentro de las clasificaciones realizadas.

En primer lugar, analizaremos el caso particular de las dificultades que suponen el lenguaje y signos algebraicos.

	LENGUAJE Y SIGNOS					
EJERCICIOS	**SIMB EST**	**SIMB AUT**	**VARIABLES**	**EXPR**	**EST INT**	**EST EXT**
TOTAL	2	5	0	1	13	1
CASOS TOTALES	1	1	2	3	5	1
FRECUENCIA	0,18181818	0,45454545	0	0,03030303	0,23636364	0,09090909

Tabla 9. Frecuencia de errores. Elaboración propia.

Aunque los errores relacionados con los símbolos en estado de aprendizaje autónomo sean los más cometidos, esto no resulta lo más preocupante por ser más bien una cuestión de precisión, pues en la práctica es esencialmente lo mismo $2^{3/2}$ y $2\sqrt{2}$, aunque la segunda resulte bastante más elegante y facilita otros procesos posteriores. En contraposición, sí que deberíamos alarmarnos por la frecuencia resultante en los errores de estructura interna, pues si bien esta no es especialmente alta, refleja la falta de eficacia que los alumnos presentan a la hora de resolver ejercicios. Esto es, muchos alumnos de un nivel tan alto como es primero de bachillerato no tienen capacidad de relación entre las distintas expresiones matemáticas, expresiones con las que en su mayoría llevan trabajando desde varios cursos atrás como son las identidades notables. Le sigue de cerca la frecuencia en la dificultad que supone operar con potencias y, aunque solo son dos alumnos los que cometen un error, se trata de un contenido que en esta etapa educativa debería estar más que interiorizado, por lo que se podría definir como una preocupación relativa. Por otro lado, resulta tranquilizador que en el primer curso de bachillerato ya estén familiarizados con las variables y sepan diferenciar perfectamente una incógnita de una generalización de números y de una relación funcional, aunque uno de los estudiantes todavía no ha asimilado que las operaciones que se hacen a un lado del signo igual hay que realizarlas en el otro, algo que sí resulta inquietante. Sin embargo, era esperable que alguien se equivocara al aplicar un menos sobre una fracción algebraica, pues es un error que se suele arrastrar durante toda la etapa de secundaria. Aun así, solo se ha equivocado un alumno frente a la previsión de obtener un porcentaje mayor en este aspecto.

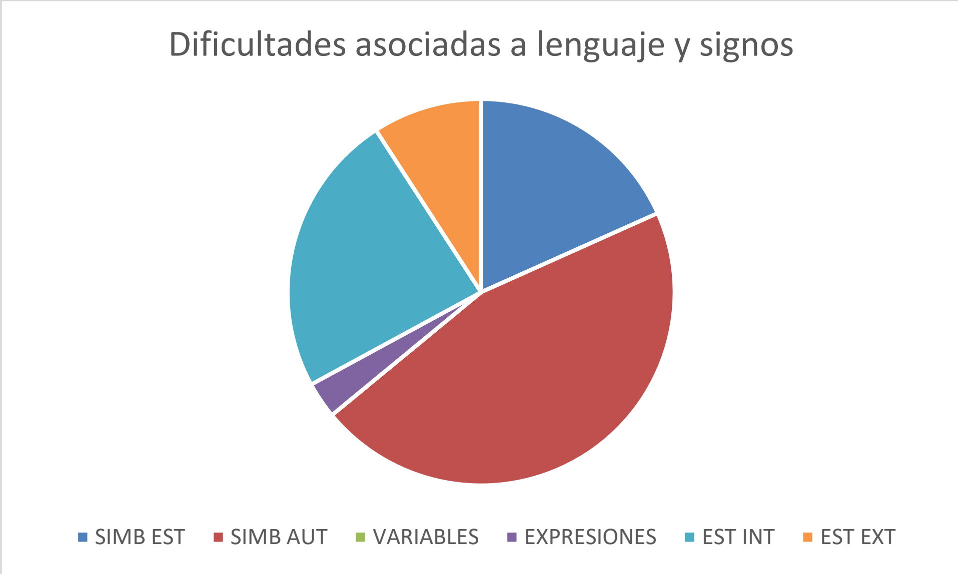

Tabla 10. Elaboración propia.

Pasamos ahora a analizar más generalmente los errores cometidos, comparando los obstáculos con los errores de ausencia de sentido y las dificultades causadas por las emociones.

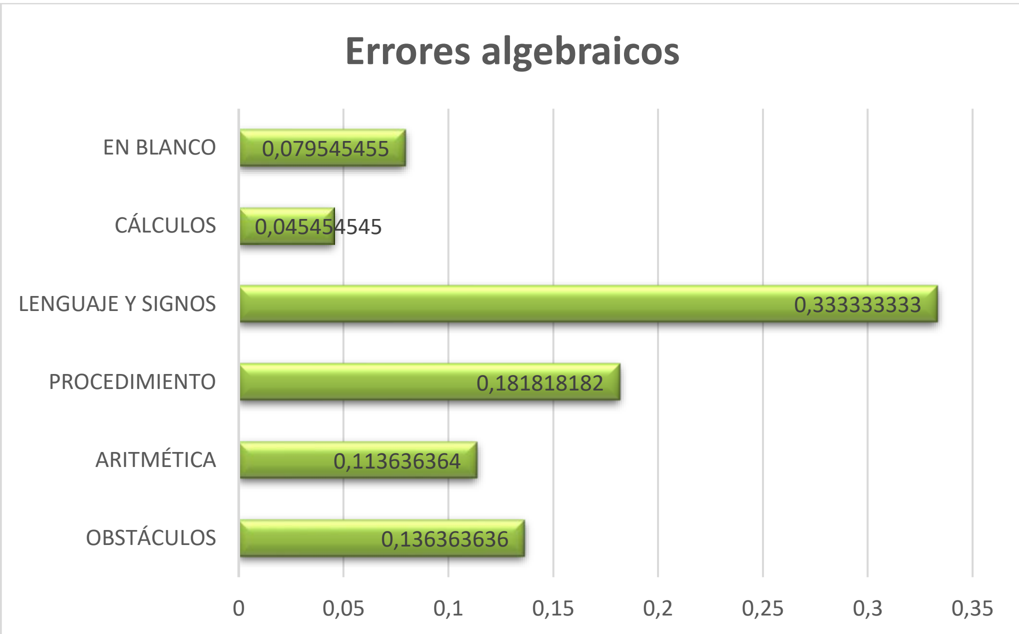

Tabla 11. Elaboración propia.

A pesar de que se observa claramente que predominan los errores de ausencia de sentido suponiendo en conjunto un 37,5% de probabilidad de fallo, destaca que los obstáculos sean el tercer tipo dentro de esta clasificación, por encima de los errores con origen en la aritmética. Es decir, que haya alumnos que escojan un método de resolución que puede resultar incorrecto en muchas ocasiones refleja la falta de reflexión por parte de los estudiantes acerca de las soluciones y los procedimientos empleados en matemáticas.

Volviendo a los errores de ausencia de sentido, destacan con diferencia los problemas que suponen para los alumnos el lenguaje y los signos algebraicos, siendo la probabilidad de fallo de un 33%, una cifra realmente alarmante. Le siguen sin mucha distancia entre ellos los errores de procedimiento y los que tienen su origen en la aritmética, teniendo ambos su origen en cursos anteriores, pues no se trata de conocimientos nuevos sino de fallos dados por no sumar correctamente fracciones o no aplicar bien la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado, materia que no pertenece al curso de primero de bachillerato.

Por último, la probabilidad de que un alumno afronte un ejercicio con miedo es del 12,5%, que no es una cifra alta para el temor social que existe hacia las matemáticas. Sin embargo, destaca que el hecho de dejar un ejercicio en blanco sea superior a los despistes que un alumno pueda tener. Es decir, prevalece el miedo a hacerlo mal frente a intentarlo y que por tanto exista alguna posibilidad de acertar.

2.3. Comparación en la frecuencia de errores

Una vez analizados ambos cursos en profundidad, vamos a estudiar qué pasa con los errores algebraicos al avanzar en edad, es decir, si durante los cursos de secundaria los alumnos consiguen eliminar un error o, por el contrario, si su frecuencia hace que terminen por considerarlos correctos.

En primer lugar y de forma más general, comparamos la frecuencia existente entre los obstáculos, los errores de ausencia de sentido y aquellos dados por las dificultades que provocan las actitudes afectivas y emocionales.

Los dos últimos tipos ocurren con una probabilidad bastante similar, de manera que en 1º de la ESO los errores de ausencia de sentido son un poco más comunes que en 1º de bachillerato (47,5% frente a 37,5%) y en cuanto a los relacionados con las emociones pasa lo contrario, pues en bachillerato son algo más habituales que en primero de secundaria (12,5% frente al 6%). Esto último no resulta tan sorprendente por la presión a la que se está sometido en bachillerato, además de que resulta un porcentaje razonable. En cuanto a los errores de ausencia de sentido, en ambos cursos resulta una probabilidad de fallo muy alta, lo que manifiesta las altas dificultades que se les presentan a los alumnos al enfrentarse a las matemáticas. Sin embargo, no resulta sorprendente que estas dificultades sean mayores en 1º de la ESO por la falta de madurez y conocimientos que presentan los alumnos de dicho curso. En cuanto a los obstáculos, aunque la diferencia sea considerable, no es realmente comparable por el tipo de ejercicio empleado, pues en la ESO ya concluimos que los resultados eran fallos memorísticos y en bachillerato los vinculamos a falta de reflexión. Aun así, primero de secundaria es un curso temprano en el que se tiene la oportunidad de disminuir esa probabilidad trabajando la capacidad de reflexión que quizá no sea suficiente llegado a bachillerato.

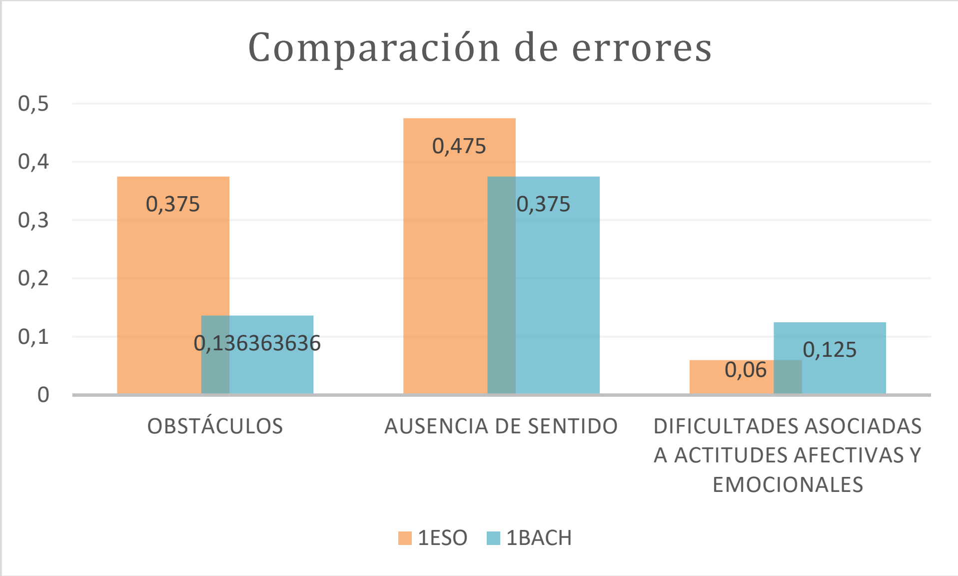

Tabla 12. Elaboración propia.

Particularizando un poco los resultados, dividimos por un lado los errores de ausencia de sentido en los que tienen su origen en la aritmética y en las dificultades del lenguaje y los signos algebraicos y, por otro, las dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales en cálculos por despistes y en dejar el ejercicio en blanco; obteniendo los siguientes resultados:

	OBSTÁCULOS	AUSENCIA DE SENTIDO		DIFICULTADES ASOCIADAS A ACTITUDES	
		ARITMÉTICA	LENGUAJE Y SIGNOS	CÁLCULOS	EN BLANCO
1ESO	0,375	0,175	0,405	0,05833333	0,025
1BACH	0,136363636	0,113636364	0,333333333	0,04545455	0,07954545

Tabla 13. Elaboración propia.

En cuanto a los errores de ausencia de sentido, que el total supusiera aproximadamente el mismo porcentaje de dificultad se ve reflejado en que en ambos subtipos la probabilidad de fallo también es muy parecida. Por su parte, los alumnos de primero de secundaria tienen más problemas con el lenguaje y los signos algebraicos de los que tienen en bachillerato, algo que resulta lógico porque son esencialmente errores de concepto que son relativamente fáciles de limar con el tiempo. Esto es, tras repetir durante cursos como se multiplican potencias o como hay que enfrentarse a una ecuación, los estudiantes terminan por interiorizarlo y van dejando de cometer errores. Lo mismo sucede con los errores con origen en aritmética, resultado que también es razonable, aunque podríamos criticar el hecho de que la diferencia sea tan pequeña, pues los de 1º de la ESO todavía no han tenido tiempo de interiorizar correctamente dichos procedimientos, mientras que los de bachillerato seguramente son conocimientos mal adquiridos que han ido arrastrando durante toda la etapa de secundaria.

En cuanto al segundo grupo, era de esperar que los alumnos de primero de bachillerato superaran a los de la ESO en dejar los ejercicios en blanco, pues quizá los primeros tienen una actitud más dejada hacia los estudios. Asimismo, es razonable que los de 12 años, con una actitud más inquieta y descentrada, cometan más “fallos tontos” que los de bachillerato, que a priori se enfrentan a los ejercicios más concentrados.

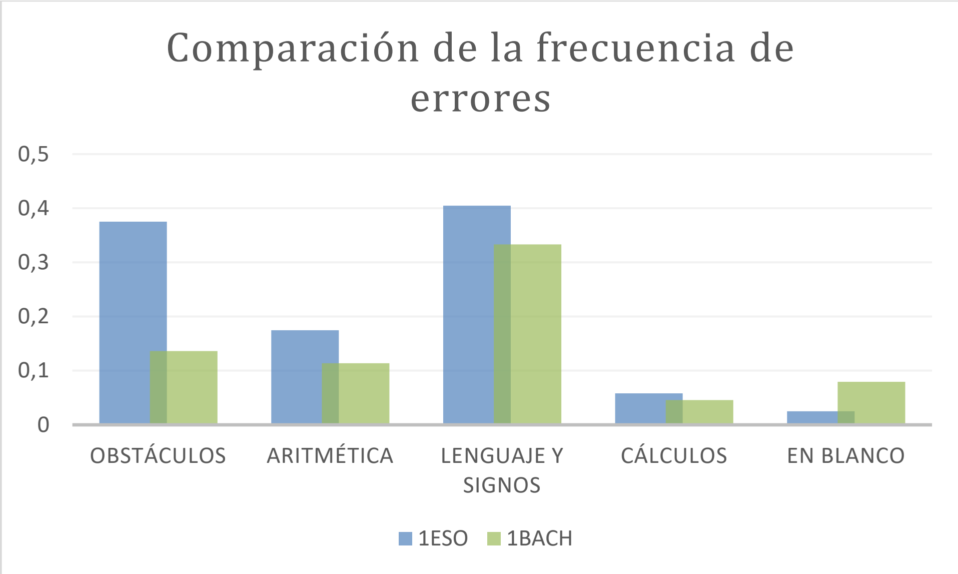

Tabla 14. Elaboración propia.

Discusión de resultados

En el apartado anterior se han podido observar cuáles son los errores más comunes cometidos por los alumnos de secundaria, de manera que es interesante comparar dichos resultados con otros estudios similares para comprobar la lógica de los mismos e incluso reflexionar sobre si el procedimiento llevado a cabo es el más acertado.

Primero de ESO

Dado que la iniciación al álgebra tiene como protagonista la traducción al lenguaje simbólico, los estudios más relevantes tratan sobre ello. En particular, Amador, Montejo, y Ramírez (2015) consideran que el saber matemático se asienta a partir de un conocimiento sólido del lenguaje algebraico, importancia que reflejan a través del análisis de los errores que comenten los alumnos al realizar sus primeras tareas sobre la traducción de expresiones algebraicas. Su objetivo es prever los errores que van a cometer los alumnos de 1º de ESO a partir de las respuestas que ofrecieron los de 2º de ESO con los conocimientos que tenían del curso anterior y así evitar que se presenten dichas dificultades de aprendizaje. Con las respuestas establecen un conjunto de errores y los relacionan mediante grafos con las capacidades que se activan al realizar los ejercicios. Seleccionan como capacidades las ejecuciones correctas distinguiendo entre capacidades relacionadas con el vocabulario aritmético (“aumentar”, “disminuir”, “número de veces”, etc.) capacidades geométricas (las cuales no se tendrán en cuenta en la discusión), capacidades relacionadas con las expresiones algebraicas y habilidades aritméticas (como la jerarquía de operaciones).

El cuestionario consta de 13 enunciados a traducir a lenguaje simbólico, de los cuales tomaremos como referencia 10 por incluir las restantes cuestiones de geometría, y lo resuelven un total de 74 alumnos. En el apartado de análisis de errores encontrados, los autores exponen ejercicio a ejercicio cuáles han sido los errores más destacados, donde incluyen las cuestiones de vocabulario y la posibilidad de dejar el ejercicio en blanco. Los resultados son los siguientes:

Vocabulario	En blanco
295	88

Tabla 15.

Analizando los datos de ambos estudios, observamos que los fallos generados por no realizar correctamente las traducciones en ambos estudios son similares en proporción, si bien es un poco mayor la cantidad de errores del segundo. No resulta algo significativo, ya que hay 6 cuestiones más y a más preguntas, más probabilidad de fallar. Además, según se relata en el artículo, varios alumnos identifican "el doble de un número" con el cuadrado de ese número y "el triple de un número" con su cubo, algo que también afirmaban los alumnos de Fray Luis de León. Análogamente, "el siguiente de un número" aparece asociado a una variable independiente, como sucedía en *Ilustración 9*. Por lo tanto, lo verdaderamente importante es que esas asociaciones erróneas que realizan los alumnos al tomar contacto con el lenguaje simbólico suceden y, lo más destacable, que coinciden.

En cuanto a la otra variable, es verdaderamente notable su diferencia (0,025 frente a 0,238) y lo es más todavía si en vez de tomar todos los ejercicios del cuestionario, solo contamos con los cuatro apartados de vocabulario de los cuales ninguno está en blanco. Sin embargo, esto es algo que no podemos valorar en este estudio por ser algo totalmente dependiente del contexto y los participantes, de los cuales no tenemos datos.

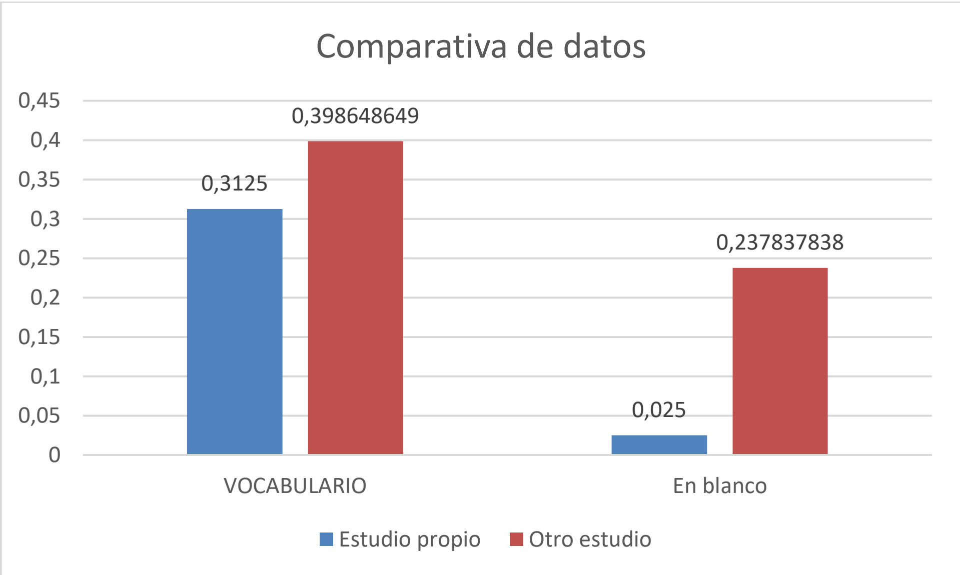

Tabla 16. Elaboración propia.

Reflexionando acerca del estudio expuesto, queda constatado que las dificultades asociadas al vocabulario matemático existen. El hecho de que la probabilidad de fallo sea prácticamente la misma en un estudio distinto con una muestra diferente hace evidente la realidad del problema. Además, su solución acostumbra a pasar por una herramienta de memorización y no de razonamiento sobre la generalización de expresiones. Esto es, los alumnos se aprenden como escribir en lenguaje simbólico por ejemplo "la suma de números consecutivos" sin entender realmente el significado de consecutivos. Además, no olvidemos que se trata de un curso posterior, de manera que el hecho de que haya más fallos que en nuestro estudio puede sostener esta última idea en el sentido de que los alumnos de 2º de ESO se habrían aprendido las traducciones de memoria y pasado el tiempo no se acuerdan.

Es interesante y, en mi opinión, sobre todo práctico el procedimiento llevado a cabo en Amador et al. (2015) ya que no solo se tienen en cuenta los errores, sino que estudian los caminos, es decir, los pasos a seguir, sus conexiones y los errores asociados a cada secuencia, para así llegar a la desaparición total de ese error mediante las subtareas necesarias para su corrección.

Primero de bachillerato

Ruano, Socas y Palarea (2008) presentaron un estudio con alumnos de educación secundaria analizando las dificultades que estos tenían con la sustitución formal, la generalización y la modelización, tres procesos propios del álgebra. A partir de las respuestas, clasificaron los errores según sus posibles orígenes en base a Socas (1997). La metodología empleada fue la siguiente: tomaron una muestra de 60 estudiantes de 4º de ESO y 1º de bachillerato tecnológico y les hicieron responder a un cuestionario con 15 preguntas y 43 ítems sobre los tres procesos más característicos del lenguaje algebraico. Utilizaron varios procedimientos para el análisis de información, de manera que tuvieron en cuenta el tipo de error, el curso del alumno, el ítem fallado y el número total de errores de cada tipo. Los resultados obtenidos son variados, aunque, si bien algunos se repiten, los errores dependen de los contenidos y el procedimiento de cada pregunta.

El análisis realizado en este trabajo solo muestra los resultados de dos preguntas, una de sustitución formal y otra de modelización. Además, como en sus esquemas de análisis se muestran los datos relacionados con cada curso, podemos extraer únicamente los referidos a 1º de bachillerato, pues son los estudiantes con los que cuenta este trabajo. En definitiva, los datos mostrados a continuación son los resultados de las respuestas de 11 alumnos a 2 preguntas:

	Obstáculo	**Ausencia de sentido**			**Actitudes afectivas y emocionales**
		Aritmética	**Procedimiento**	**Lenguaje y signos**	
Pregunta 1	1	0	2	-	-
Pregunta 2	-	5	-	3	2

Tabla 17.

Con esto, y con el objetivo de comparar ambos estudios, se sigue el procedimiento empleado en este trabajo para realizar la comparativa a través de la frecuencia de cada tipo de error. Hay que tener en cuenta que, análogamente a como pasaba en el sistema de análisis empleado para los cuestionarios de este trabajo, no todos los tipos de errores participan en todos los ítems, de manera que los casos posibles varían. Con todo, los resultados son los siguientes:

	Obstáculo	Ausencia de sentido			Actitudes afectivas y emocionales
		Aritmética	Procedimiento	Lenguaje y signos	
Estudio propio	0,13636363	0,11363636	0,18181818	0,33333333	0,125
Otro estudio	0,03030303	0,15151515	0,09090909	0,27272727	0,18181818

Tabla 18.

La justificación de las diferencias que se presentan seguramente está en el tipo de cuestionario presentado. En el estudio de 2008 se escoge un ejercicio de sustitución formal y otro de modelización, mientras que en el cuestionario presentado en este trabajo los apartados miden la capacidad de los alumnos de manejar expresiones algebraicas aptas a su nivel de conocimientos. Esto es, la clasificación y el análisis empleado son los mismos pero los datos son distintos.

Si bien es cierto que el mayor problema se encuentra en el lenguaje y los signos algebraicos en ambos estudios sin mucha diferencia, los demás resultados difieren en varios aspectos. Lo más destacable es la diferencia que se da en los errores de procedimiento y especialmente en los obstáculos. Para Ruano et al. (2008), los alumnos de primero de bachillerato apenas presentan obstáculos en álgebra, mientras que para mí es un aspecto relativamente preocupante. En cuanto al procedimiento, los autores solo contemplan el caso de que en $5(2b) + 3$ empleen la propiedad distributiva como si fuera una suma, mientras que en los ejercicios de este trabajo se tienen en cuenta fórmulas como la ecuación de segundo grado, identidades notables u operaciones con fracciones, de manera que a más opciones más probabilidad de fallo. Siguiendo con los errores de ausencia de sentido, los errores con origen en aritmética tienen una frecuencia similar en ambos estudios, aunque solo coincide un alumno que confunde multiplicación con potencia como ocurre en nuestro ejercicio 1.3. Las actitudes afectivas y emocionales tampoco coinciden en su totalidad, pues los autores hablan de “modelo incompleto" en el que los alumnos dejan el proceso sin finalizar y no han tenido en cuenta los alumnos que dejaron en blanco el ejercicio. Asimismo, sus ejercicios no están diseñados para que existan fallos de cálculo, por lo que tampoco es algo que tengan presente. El estudio del lenguaje algebraico, aunque coincida, también resulta algo incompleto en el estudio de los autores señalados pues se centran en las variables y el vocabulario y, aunque este último no se estudiara en nuestro cuestionario, el análisis es más preciso distinguiendo variables, símbolos, expresiones y estructura de las expresiones.

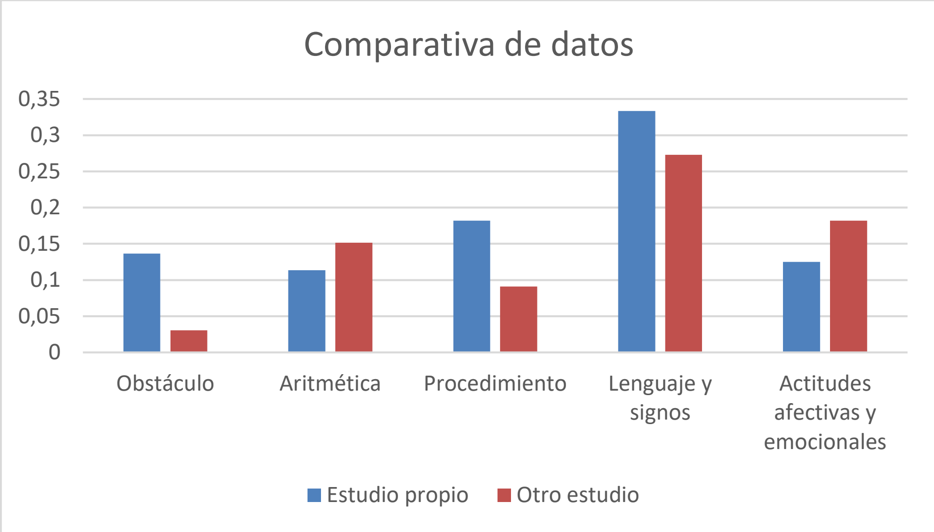

Tabla 19. Elaboración propia.

La conclusión extraída es que el estudio expuesto en Ruano et al. (2008) es más concreto por centrarse en procesos de sustitución formal, generalización y modelización, de manera que refleja de una forma bastante acertada los problemas que los alumnos pueden tener con estos procesos. Esto es, que un alumno se haya equivocado al aplicar la fórmula de la ecuación de segundo grado no implica que lo vaya a hacer siempre, pudo ser algo circunstancial, mientras que la forma de enfrentarse a un ejercicio es más probable que sea algo reiterativo. Sin embargo, el análisis expuesto en este trabajo sí que nos ofrece matices más precisos sobre el lenguaje algebraico, siendo el contenido que más dificultades genera en los alumnos. Por lo tanto, la discusión de estos estudios no debería ser algo comparativo, sino que sería mucho más interesante complementar uno con el otro para llegar a conclusiones más acertadas y de mayor utilidad.

Conclusiones

A lo largo de este trabajo se han identificado algunas de las dificultades y errores algebraicos más frecuentes en el aprendizaje de la asignatura de matemáticas en ESO y Bachillerato. Para ello, se ha recurrido al análisis de tres fuentes que alimentan la investigación: una búsqueda bibliográfica de la que se expone una síntesis y su posterior crítica, una investigación de campo que recoge la frecuencia de errores algebraicos de una muestra de alumnos de primero de secundaria y primero de bachillerato para su posterior comparación y la discusión con otros estudios de carácter similar.

La investigación bibliográfica me ha permitido realizar una clasificación lo más completa posible en la que, gracias a las investigaciones de todos los autores mencionados en la bibliografía, se valoran cantidad de situaciones que pueden surgir cuando un alumno se enfrenta a una tarea algebraica. Me ha servido para organizar aquellos errores que han ido surgiendo de forma casual en mi camino como docente y como estudiante, de manera que he podido ponerles nombre, categorizarlos y establecer conexiones entre ellos. Ahora entiendo que todos los definidos como “fallos tontos” que tantas veces se escuchan en las aulas no son fruto del azar, sino que tienen una justificación teórica que los sustenta. Esto ha sido por lo tanto una reafirmación acerca de la importancia que tiene esta investigación.

Con la lectura de las publicaciones de otros autores también he podido verificar la responsabilidad que tienen los procesos de enseñanza instaurados, tanto que siempre se culpa al alumno de fallar y se le castiga con bajas calificaciones cuando la única dificultad totalmente intrínseca al estudiante es la asociada a su desarrollo cognitivo, pues las asociadas a sus emociones tienen su procedencia en factores externos.

Los cuestionarios y los resultados obtenidos me han servido para confirmar la premisa inicial de la investigación, aun entendiendo que el dominio de aplicación es reducido. Sin embargo, ha resultado ser un buen instrumento para el diagnóstico de errores y para su posterior tratamiento y superación. Además, con los resultados obtenidos hemos podido concluir que la incidencia de los errores no depende tanto del tipo de contenido como de la naturaleza de los procesos implicados en la tarea. Así, podemos constatar, por ejemplo, errores con origen en la aritmética tanto en una suma de fracciones como en una potencia. Es necesario por tanto conocer cuál es el origen de los errores para poder evitarlos. Además, ya puesto de manifiesto que todos ellos tienen raíces más profundas que los fallos memorísticos o por falta de atención, se hace evidente que la enseñanza necesaria para remediarlos tiene que operar a nivel más profundo. En esta línea, la comparativa con otros estudios ha reafirmado la validez del planteamiento y los resultados obtenidos, así como sus autores ratifican el hecho de que hay una gran responsabilidad en los procesos de enseñanza.

A la luz de todo lo expuesto se considera que el grado de consecución de los objetivos planteados es satisfactorio pues gracias a la investigación bibliográfica hemos podido identificar, categorizar y analizar los errores algebraicos y los cuestionarios nos han permitido calcular su frecuencia. Así, considero que este trabajo ha contribuido a poner en valor el aprendizaje apoyado en los errores y no ignorándolos, cumpliendo así con el objetivo final del proyecto.

Futuras líneas de investigación

Pese a haber cumplido el objetivo, es posible plantear algunas líneas de investigación futuras que completen y mejoren las conclusiones alcanzadas en este trabajo. Una opción sería ampliar la muestra con el fin de dar un mayor valor científico a los resultados obtenidos. En este caso contamos únicamente con 31 alumnos y, aunque hayamos contrastado la información obtenida con otros estudios, ampliar el número de alumnos nos ofrecería un resultado mucho más realista.

Por otro lado, tras haber demostrado la importancia que tienen los errores, reducir el análisis al bloque de álgebra es insuficiente, por lo que sería conveniente ampliarlo a otras áreas de las matemáticas con el mismo objetivo y metodología que se ha expuesto en este trabajo.

Finalmente y como ya se ha mencionado en varios apartados, a partir del conocimiento de las causas y en base a las clasificaciones ya estamos en disposición de buscar técnicas de enseñanza que eviten los errores.

Dificultades en el proceso

En la realización de este trabajo surgió una dificultad determinante para sacar adelante el proyecto. Definir el origen de cada caso particular en base a la clasificación teórica no ha sido para nada tarea fácil. Como se indica en el estado del arte, el mismo error puede tener distintos orígenes condicionados a agentes externos. Además, muchos de los posibles fallos no aparecen mencionados en la bibliografía encontrada, sino que establecer la tipología de los errores a partir de las definiciones y las similitudes entre los ejemplos era competencia de este trabajo. Esto implica otra dificultad y es la que supuso el diseño de los cuestionarios, junto con la intención de incluir el estudio de muchos tipos de errores en pocos ejercicios. Además, en su corrección surgieron nuevos errores que aumentaron esta dificultad en la medida que hubo nuevamente que interpretar y clasificar esas respuestas.

La dificultad principal ha estado condicionada por otro de los problemas encontrados en la realización de este trabajo: la búsqueda de información. Existen muchos estudios interesantes sobre las características y las causas de los errores, pero estas resultan en ocasiones confusas, pues las investigaciones encontradas son antiguas e incluyen pocos ejemplos, de manera que dan pie a la libre interpretación de los mismos. Así, conseguir una clasificación acertada, útil y sustentada por bases teóricas está condicionado a la subjetividad del autor.

Implicaciones educativas

A nivel educativo, tiene una doble aportación. Por una parte, el profesor se beneficia de este trabajo en el sentido de que puede conocer nuevos errores que vayan a surgir en su trayectoria como docente, lo que le permitirá adelantarse a ellos estableciendo metodologías que los eviten. Además, esas metodologías serán más efectivas cuantas más relaciones se establezcan entre los errores, lo que añade una utilidad mayor a la clasificación de los mismos. En definitiva, ser conocedor de los distintos tipos de errores que en las distintas etapas educativas cometen los alumnos favorece la comprensión y el análisis de sus causas y el planteamiento de las posibles soluciones. Por otra parte, el conocimiento de sus propios errores le da al estudiante la posibilidad de evitarlos en tareas futuras y en consecuencia mejorar su rendimiento académico. En conclusión, supone una mejora para la educación.

Bibliografía

Amador, M.V., Montejo, J. y Ramírez, M. (2015). Análisis de errores y caminos de aprendizaje en la iniciación al álgebra para alumnos de 1º ESO. En Sánchez, Pedro Ángel (Ed.), *17 Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 1-20). Cartagena: Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia, SEMRM.

Arnau, D. Arevalillo-Herráez, M. y Puig, L. (2011). Características de un sistema tutorial inteligente para la resolución de problemas verbales aritmético algebraicos. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en educación Matemática XV* (pp. 257- 266). Ciudad Real: SEIEM.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit Scientifique: Contribution à une psychanalyse de la connaissance objective* (5e éd.). París: Vrin.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques el les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.

Davis, R. B. (1975). Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations. *Journal of Children's Mathematical Behavior, 1 (3),* 7-35.

Drijvers, P. y Hendrikus, M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter*. Tesis doctoral. Utrecht. Universidad de Utrecht.

Herscovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra: Research Agenda for Mathematics Education* (1ª ed., p. 60-86). Nueva York: Routledge.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde y A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures*, 271-290. Sevilla: S.A.E.M. Thales.

Lakatos, Y. (1981). Matemáticas, ciencia y epistemología. Madrid: Alianza.

Matemáticas serie avanza 1 ESO: Saber hacer (2016). Santillana Educación.

Malara, N. A. (2003). Dialectics between theory and practice: Theoretical issues and aspects of practice from an early algebra project. En N.A. Pateman et al. (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol.1, 33-48. Honolulu.

Molina, M. (2007). La integración de pensamiento algebraico en educación primaria. En M. Camacho, P. Flores P. Bolea (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XII*, 53-69. SEIEM. La Laguna.

Movshovitz-Hardar, N., Zaslavksy, O., Inbar, S. (1987). An Empirical classification model for errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(1), 3-14.

Palarea, M. y Socas, M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Suma*, *16*, 91-98.

Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: A survey. *For the Learning of Mathematics*, *1* (1), 16-20.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA*, *6*(4), 117-133.

Rico, L. (1995). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.* En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA 2* (2), 61-74.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Serrano, E., Hernández, J., Moreno, M., Barbero, J.F., Alcaide, F. (2015). *Matemáticas I. 1 bachillerato. Savia*. Grupo SM Educación.

Wagner, S. y Parker, S. (1999). Advancing algebra. En B. Moses (Ed.), Algebraic Thinking, Grades K-12, 328-340. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.