ANEXO IV

TRABAJO DE FIN DE GRADO EN MAESTRO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

PORTADA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

ANÁLISIS DE LAS DIFICULTADES EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN UN GRUPO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

ANALYSIS OF PROBLEM-SOLVING DIFFICULTIES IN A GROUP OF PRIMARY SCHOOL STUDENTS

AUTOR: ISABEL ALONSO-BARTOL BUSTOS
TUTOR: SANTIAGO VICENTE MARTÍN

Salamanca, día 14, junio, 2022

RESUMEN: Aprender a resolver problemas aritméticos verbales puede ser considerado como uno de los logros más relevantes en la vida de un alumno de Educación Primaria, pues permite adquirir competencias fundamentales para su desempeño cotidiano. Para adquirir esta capacidad es imprescindible enfrentarse a problemas de diferentes tipos y escoger la estrategia más adecuada para resolverlos, puesto que si se elige una estrategia inapropiada pueden surgir dificultades en esta competencia. Estas dificultades pueden tener orígenes diversos como los propios alumnos o la poca diversidad de problemas que aparecen en los libros de texto, aunque, independientemente de su origen es importante conocer los distintos modelos de intervención existentes para tratar de compensar los problemas que los alumnos pueden presentar. Además, pueden ser detectadas mediante pruebas de cribado como la que se presenta en este trabajo cuyos objetivos son, por un lado, determinar la prevalencia de las dificultades en la resolución de problemas en un aula de primaria y, por otro, analizar las categorías de problemas en las que los alumnos tienen mayores dificultades. Para ello llevaremos a cabo, en primer lugar, un análisis teórico del tema, prestando atención a los modelos de resolución de problemas, los tipos de problemas aritméticos verbales, los modelos de intervención y el papel de los libros de texto en el aprendizaje de los alumnos; y, en segundo lugar, se ha realizado una prueba de cribado a alumnos de quinto de primaria de la que detallamos la muestra de alumnos, el diseño de tareas, el procedimiento, la codificación de los datos y los resultados obtenidos. El trabajo realizado permite concluir que, en torno al 12% de los alumnos de la muestra tenían dificultades para resolver incluso problemas sencillos, y que si esa proporción la aplicamos a la población escolar entera la cantidad de niños con dificultades es muy importante.

ÍNDICE

1.- INTRODUCCIÓN 1

2.- OBJETIVOS 2

3.- LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES 2
  3.1.- Niveles de competencia matemática de los alumnos 4

4.- MODELOS DE RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES 5
  4.1.- Modelo superficial 5
  4.2.- Modelo genuino 8

5.- TIPOS DE PROBLEMAS Y SU COMPLEJIDAD 10
  5.1.- Tipología de los problemas aritméticos verbales 10
    5.1.1.- Los problemas aritméticos de estructura semántica aditiva 10
    5.1.2.- Los problemas aritméticos de estructura semántica multiplicativa 22
  5.2.- Nivel de complejidad semántico-matemática de los problemas aritméticos verbales 28

6.- MODELOS DE INTERVENCIÓN EN LAS DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES 30

7.- EL PAPEL DE LOS LIBROS DE TEXTO EN EL APRENDIZAJE DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS 33

8.- ESTUDIO 35
  8.1.- Muestra 36
  8.2.- Diseño de tareas 36
  8.3.- Procedimiento 39
  8.4.- Codificación de los datos 43
  8.5.- Resultados 44
    8.5.1.- Análisis del rendimiento de los alumnos 44
    8.5.2.- Análisis de las categorías de problemas 45

9.- CONCLUSIONES 46

10.- REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 49

11.- ANEXOS 52
  ANEXO 1. Resultados de la prueba de cribado 53

1.- INTRODUCCIÓN

En los cuatro años en los que he cursado el Grado de Educación Primaria, he podido aprender una gran cantidad de conocimientos que han hecho posible que evolucione, tanto en lo personal como en lo académico y/o profesional. Se podría decir que algunos de los aspectos que más me han llamado la atención después de mi paso por la formación universitaria han sido la resolución de problemas matemáticos y las dificultades que los alumnos puedan presentar a la hora de enfrentarse a ellos. La razón que explica mi interés por estos temas está relacionada con la repercusión que tiene la resolución de problemas en la vida de las personas, así como con la importancia de saber las causas y consecuencias que las dificultades en el aprendizaje de este conocimiento pueden tener sobre la vida de una persona si no se detectan tempranamente cuando se es todavía un niño y esas dificultades se pueden compensar.

La resolución de problemas, como acabamos de señalar, tiene mucha relevancia en la educación de los alumnos puesto que permiten el desarrollo de una gran cantidad de capacidades y competencias, como, por ejemplo, la independencia de poder resolver problemas de la vida real, el desarrollo cognitivo, el desarrollo de la lógica y el sentido común, etc. aptitudes necesarias para la vida diaria y que precisarán allá donde vayan (Martínez, 2013). La tarea de resolución de problemas siempre ha sido considerada como una de las más complejas dentro del área de matemáticas y los alumnos suelen tener muchas dificultades. Conocer este último aspecto es fundamental tanto para la educación de los alumnos como para la formación de los maestros en general y para mi formación como maestra en particular, ya que los alumnos son los que sufren las consecuencias de esas dificultades, cuyo origen no vamos a analizar ahora, pero son los maestros los que deben poner solución a esos problemas y poner en marcha todos aquellos recursos disponibles para poderles ayudar a disiparlas y/o compensarlas.

Por estas diferentes razones, se presenta este Trabajo de Fin de Grado con el título "Análisis de las dificultades en la resolución de problemas en un grupo de alumnos de Educación Primaria" en el que se realizará un estudio para intentar conocer si existen dificultades en la resolución de problemas en un aula de Educación Primaria y tratar de cuantificar la proporción de alumnos que presentan dificultades para resolver problemas, así como analizar las categorías de problemas en las que los alumnos tienen mayores dificultades. De esta forma, este trabajo se va a estructurar en dos partes: por un lado, un marco teórico en el que se describirán los problemas aritméticos verbales, los modelos de resolución, los tipos y los niveles de complejidad, los modelos de intervención en las dificultades y la tipología de problemas que aparecen en los libros de texto; y, por otro, una parte aplicada en la que se ha desarrollado una prueba de evaluación y de la que se explicará la muestra a la que se ha dirigido, el diseño de tareas, el procedimiento, la codificación de los datos y los resultados obtenidos en el estudio realizado.

2.- OBJETIVOS

Los **objetivos generales** que se pretenden alcanzar con la realización de este Trabajo de Fin de Grado son los dos siguientes:

- Determinar la prevalencia de las dificultades en la resolución de problemas aritméticos verbales en un aula de Educación Primaria.
- Analizar los tipos de problemas en los que los alumnos de Educación Primaria encuentran mayores dificultades.

Dentro de estos objetivos generales, se han planteado una serie de **objetivos específicos** como son:

- Describir los problemas aritméticos verbales, sus modelos de resolución, así como los tipos existentes y su complejidad.
- Diseñar una prueba de evaluación del rendimiento de los alumnos al resolver problemas aritméticos verbales.

3.- LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES

Los problemas aritméticos verbales (PAVs) son aquellos en los que se describe una situación problemática a partir de la cual surgen una o varias preguntas que se pueden responder mediante la realización de operaciones matemáticas, utilizando los datos que aparecen en la estructura semántica del problema (Van Dooren et al., 2014).

Esta definición de PAVs nos lleva a algunas de sus características más significativas. En primer lugar, son uno de los modos más efectivos para el aprendizaje de los conocimientos sobre los que se sostienen las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) y para creación de un espacio que favorece el desarrollo de capacidades de comprensión del problema (elegir correctamente las operaciones) y la de resolver dichas operaciones (cálculo). En segundo lugar, son el punto de intersección en el que se establecen las relaciones entre el lenguaje matemático y el lenguaje verbal del mundo real. En tercer lugar, son la herramienta que permite aplicar las matemáticas que aprendemos a lo largo de la vida académica de tal forma que se pueda dar sentido a la realidad y permitan resolver las situaciones problemáticas que se presentan en el mundo real. En cuarto lugar, son un elemento que posibilita organizar y aprovechar la capacidad innata que los seres humanos tenemos de resolver problemas, así como dar la oportunidad de aportar alternativas y soluciones provenientes de la vida cotidiana (Martínez, 2013).

Estas características nos permiten señalar que es de vital importancia que desde los centros educativos se inculque la necesidad, tanto para los profesores como para los alumnos, de entender el porqué de la enseñanza de las matemáticas y de enseñar la habilidad de utilizar las matemáticas en la vida cotidiana para resolver problemas del mundo real. Existen varias razones por las que es importante este tema, siendo la primera de ellas que son el primer nivel en el que una persona practica y aprende a diferenciar el uso ordinario del lenguaje matemático que se utiliza en los problemas aritméticos. La segunda es que está demostrado que los PAVs juegan un papel muy importante en el desarrollo cognitivo de las personas puesto que son el primer paso por el que pasa una persona para poder comprender la realidad matemática, modelizándola, permitiendo tratar los datos de una manera determinada, provocando que dicha realidad se pueda integrar otra vez y explicar de una forma más sencilla tal y como se desprende de los estudios de Van Dooren et al. (2006) y Martínez (2013) entre otros.

De esta manera, podemos comprender que tanto la resolución de problemas en general como la resolución de problemas aritméticos verbales en particular son destrezas que se tardan en desarrollar, siendo la segunda un medio para desarrollar la primera, aunque ambas son importantes en la vida del ser humano. Por ello, el mejor momento para el desarrollo de esta competencia de resolver problemas debe comenzar cuando los niños inician su etapa escolar puesto que están en plena evolución, de tal forma que la resolución de PAVs se conviertan en la antesala para luego resolver problemas más complejos como pueden ser los que se dan en situaciones de la vida real.

Sin embargo, no todos los problemas aritméticos verbales son iguales, es decir, podemos encontrar diferentes categorías en función de los distintos niveles de dificultad.

Como señalan Riley y Greeno (1998), existen problemas cuya estructura es tan sencilla que se pueden resolver mediante un modelado directo, es decir, con acciones directas como añadir o quitar elementos. Por el contrario, los problemas que presentan una estructura semántica más compleja, necesitan que la persona que los vaya a resolver sea capaz de crear una representación mental de la situación problemática que se describe. De esta manera, los problemas que tienen una estructura semántica más sencilla, se pueden resolver muy fácilmente, casi de forma rutinaria; mientras que los que tienen una estructura más compleja requieren un nivel de razonamiento mayor.

3.1.- Niveles de competencia matemática de los alumnos

Los alumnos de Educación Primaria, como hemos señalado anteriormente, suelen mostrar ciertas dificultades en la resolución de los diferentes tipos de PAVs. Una forma sencilla de saber cuál es la situación en nuestro país es a partir de los resultados nacionales en las pruebas específicas como el Informe TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study), y que, además, nos servirán como punto de referencia en la valoración de los resultados del estudio que se ha realizado en este Trabajo de Fin de Grado. El informe TIMSS es una prueba de evaluación internacional específica de matemáticas y ciencias, realizada cada cuatro años, que permite conocer los conocimientos matemáticos y científicos que tienen los alumnos de cada país que participa, así como comparar el rendimiento de los alumnos en función del país en el que estudian. Los niveles de rendimiento de los alumnos en la competencia matemática establecidos por el Informe TIMSS de 2019 se miden en puntos y son los cinco siguientes:

- **Nivel avanzado (625 o más puntos**): los alumnos que se encuentran en este nivel resuelven todo tipo de problemas desde números naturales a fracciones o áreas y perímetros, así como problemas de varios pasos; aplicando los conocimientos adquiridos en diferentes situaciones complejas siendo capaces de explicar su razonamiento.
- **Nivel alto (de 550 a 624 puntos):** los estudiantes resuelven una gran variedad de tipos de problemas.
- **Nivel intermedio (de 475 a 549 puntos):** los estudiantes resuelven los problemas sencillos a partir de sus conocimientos básicos como, sumas y restas, etc.

- **Nivel bajo (de 400 a 474 puntos**): resuelven operaciones numéricas de un solo paso.
- **Nivel muy bajo (por debajo de 400 puntos):** no son capaces de resolver las actividades del nivel bajo debido a que no tienen adquiridas las competencias necesarias.

Teniendo en cuenta estos niveles, en la última edición del Informe TIMSS los alumnos españoles han alcanzado las siguientes puntuaciones: el 4% se encuentra en el nivel avanzado; el 23% se sitúa en el nivel alto; el 38% se encuentra en el intermedio; el 26% en el nivel bajo y, por último, el 9% en el nivel muy bajo. De esta forma, podemos concluir que la mayoría de los alumnos se encuentran en el nivel intermedio, es decir, son capaces de resolver problemas sencillos a partir de sus conocimientos matemáticos básicos, pero tienen dificultades con los problemas de cierto nivel de complejidad. A continuación, se va a tratar de explicar el origen de las dificultades que los alumnos presentan en la resolución de problemas, provocando que el rendimiento en este ámbito de las matemáticas no sea el esperado.

4.- MODELOS DE RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES

El principal objetivo del aprendizaje de la resolución de problemas, como ya hemos mencionado anteriormente, es desarrollar la capacidad de aplicar las matemáticas pudiendo dar sentido a los acontecimientos y ser capaces de resolver situaciones problemáticas del mundo real. Para ello, es necesario tener en cuenta los diferentes modelos existentes de resolución de PAVs como el propuesto por Verschaffel et al. (2000), partiendo de la base de que existen otros modelos que también nos permitirían alcanzar el objetivo principal planteado. De esta forma, podemos distinguir dos modelos diferentes: superficial y genuino.

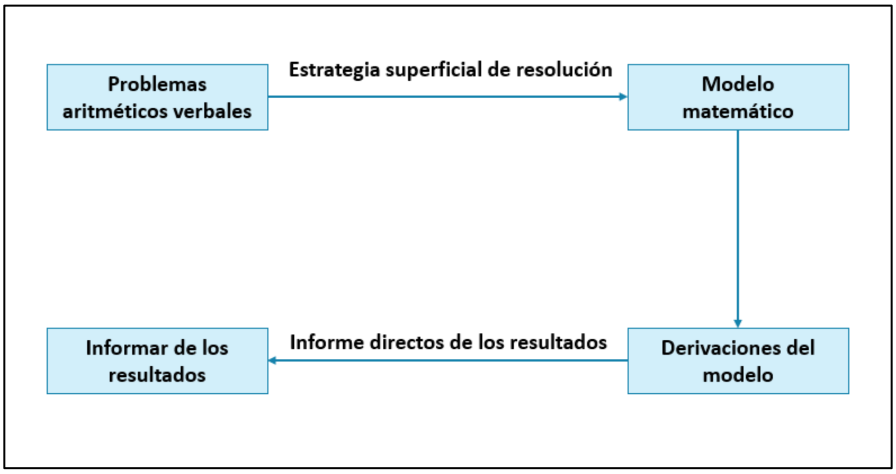
4.1.- Modelo superficial

El modelo superficial es aquel con el que se resuelve un problema de matemáticas casi sin razonar, prestando atención a una serie de elementos concretos o simplemente reparando en la **palabra clave**. Esta estrategia de la palabra clave consiste en relacionar una determinada palabra (gana, pierde, etc.) o expresión (más que, menos que, veces más, etc.) con la operación aritmética que permite resolver el problema. Esta estrategia suele funcionar correctamente para algunos problemas, pero existen determinadas ocasiones en las que no funciona. Por ejemplo, en el siguiente problema: "*Mario tiene 10 canicas. En una partida en el parque, gana 3 canicas. ¿Cuántas canicas tiene ahora Mario?"* La palabra clave sería "gana" que, en este caso, indica que obtiene más canicas por lo tanto la operación para resolver el problema sería una suma y, en esta ocasión, esta estrategia funciona correctamente, es decir, la palabra clave indica claramente que la operación que resuelve el problema es una suma. Sin embargo, en el siguiente problema: "*Mario tiene algunas canicas. En una partida en el parque, gana 3 canicas y ahora tiene 15 canicas. ¿Cuántas canicas tenía Mario al principio?*" En este ejemplo, la palabra clave es "gana", indicando que tiene más canicas y que, por lo tanto, habría que realizar una suma, pero, en este caso, el problema se resuelve con una resta de tal forma que, en esta ocasión, la estrategia de la palabra clave no sirve. De esta manera, podemos decir que los problemas en los que la estrategia de la palabra clave funciona se denominan problemas **congruentes o consistentes**, mientras que aquellos problemas en los que la palabra clave no funciona se denominan **incongruentes o inconsistentes**.

Además, con este modelo la solución se da de forma inmediata sin necesidad de hacer referencia a la situación problemática original y se puede comprobar que el resultado dado es factible y razonable, por ejemplo, que un padre sea más mayor que su hija y no al contrario.

Figura 1

Modelo superficial



Fuente. Verschaffel et al., 2000, p13

En la **figura 1**, podemos observar las diferentes fases que conforman el proceso de modelización, pero visto desde una perspectiva superficial. De esta forma, al presentar un PAV a un alumno, este pasa a construir directamente un **modelo matemático** utilizando una estrategia superficial de resolución. Después de haber creado ese modelo matemático superficial, pasa a realizar las **derivaciones** correspondientes para resolver la situación planteada, es decir, se llevan a cabo las operaciones aritméticas correspondientes y, finalmente, **informar de los resultados** obtenidos. Un ejemplo de lo que puede ocurrir al utilizar este modelo es que la solución que se dé al problema no sea adecuada o no tenga sentido puesto que, en este método, se informa de los resultados sin pararse un momento a reflexionar en si esa solución es viable. Otra situación que se puede dar es que no se llegue a la solución correcta debido a que se ignoran aspectos que influyen en la situación problemática.

Este modelo superficial se utiliza con frecuencia en los centros educativos a la hora de enseñar la resolución de problemas de tal forma que los alumnos que aprenden con él no son del todo capaces de desarrollar la capacidad de resolver un problema utilizando la modelización matemática (Van Dooren et al., 2006).

Se pensaba que la adquisición de este modelo por parte de los alumnos ocurría de forma implícita y gradualmente, pero realmente este modelo se desarrolla debido a dos razones principalmente. La primera de ellas es la forma en la que los profesores interactúan y enseñan los problemas por la cultura escolar en la que profesores y alumnos se encuentran sumergidos como señalan Vicente et al. (2013). La segunda se refiere a las normas socio-matemáticas que indican cómo los alumnos deben pensar y comunicar las respuestas. De hecho, se sabe que este modelo es tan utilizado porque al usarlo hay una alta probabilidad de que un alumno pueda resolver correctamente el problema que tiene delante. Este hecho se debe a que los alumnos aplican este modelo de forma intuitiva y a que los PAVs que aparecen en los libros de texto son bastante simples, provocando que el modelo superficial funcione en la gran mayoría de las ocasiones como señalan Vicente y Manchado (2018) y Tárraga-Mínguez et al. (2022).

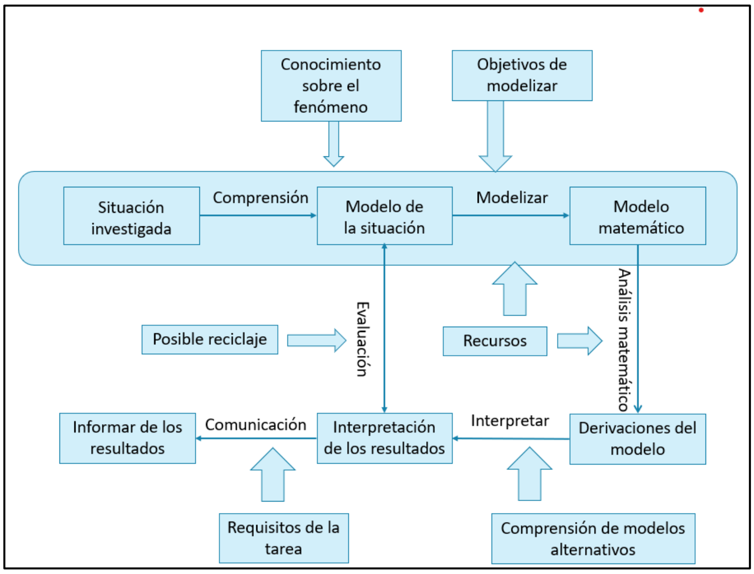
Independientemente de si los problemas contienen información relevante o irrelevante, hay ocasiones en las que el modelo superficial no es eficaz y habría que buscar otro modelo con el que poder resolver el problema. Un ejemplo pueden ser algunas pruebas internacionales como PISA o TIMSS, en las que existen problemas simples, aquellos que pueden resolver alumnos con un nivel intermedio, y complejos, aquellos que solo pueden resolverlos los alumnos con un nivel alto o avanzado, que contienen toda la información necesaria para resolver el problema, pero en los que el método superficial es insuficiente y es necesario emplear el modelo genuino que permite ir un paso más allá.

4.2.- Modelo genuino

El modelo genuino es aquel en el que se da un proceso en el que están presentes todas las fases del ciclo de modelización matemática representado en la **figura 2** y que analizaremos con mayor detalle más adelante.

Figura 2.

Modelo genuino del ciclo de modelización



Fuente. Verschaffel et al., 2000, p. 168

La primera fase del ciclo de modelización consiste principalmente en comprender la situación que se está examinando. En ella, se debe decidir cuáles son los elementos importantes y relevantes, así como aquellos que no lo son, para poder resolver la situación presentada. Además, es conveniente tener ciertos conocimientos adquiridos relacionados con el problema con el que se está trabajando y activarlos de tal forma que se pueda relacionar la información que proporciona el problema con los conocimientos que se tienen. Así mismo, en esta primera fase, es fundamental tener en cuenta que el conocimiento que se debe tener para resolver el problema no puede ser un conocimiento cerrado, sino que se debe ser capaz de buscar otras fuentes de información como preguntar a otras personas o realizando experimentos.

La segunda fase es en la que se construye un modelo matemático con los elementos y relaciones fundamentales del problema. En esta fase se matematiza, es decir, se traduce la información del problema al lenguaje matemático y, para ello, es necesario aplicar los conocimientos matemáticos, fórmulas y técnicas que se conocen. Sin embargo, una dificultad que puede aparecer en esta segunda fase es la disponibilidad de recursos como, por ejemplo, el conocimiento de fórmulas y técnicas matemáticas, la existencia de recursos como mapas, gráficos, etc., o la disponibilidad de recursos digitales como softwares, calculadoras, etc.

Después de haber analizado las relaciones y elementos importantes del problema, la tercera fase consiste en interpretar los resultados numéricos obtenidos de la matematización y relacionarlos con la situación problemática original. Esta fase es muy importante porque el resultado numérico obtenido necesita ser evaluado y comprobar si es razonable o no, es decir, se debe reflexionar sobre si el resultado es acorde a la situación que se ha planteado y si el modelo utilizado ha funcionado, o no.

La cuarta y última fase del modelo genuino consiste en comunicar el resultado que se ha interpretado en la fase anterior de tal forma que sea comprendido y relacionado con los objetivos que se tenían en el primer momento de enfrentarse a la situación problemática.

Las diferentes fases que conforman este modelo genuino nos llevan a la conclusión de que dicho modelo permite resolver cualquier tipo de PAV, mientras que el modelo superficial solo permite resolver aquellos PAVs que son de complejidad baja, es decir, aquellos que son muy sencillos y donde la situación problemática presentada no requiere tener una buena capacidad de comprensión. Además, es importante destacar como el modelo superficial solo tiene en cuenta elementos superficiales del problemas, como la palabra clave, o de la propia situación en la que se resuelve el problema (como el tema que se está estudiando) para resolver el problema, al contrario que el modelo genuino que tiene en cuenta una gran cantidad de elementos diferentes como, por ejemplo, comprender la situación que se plantea, dar una interpretación de los resultados obtenidos y reflexionar sobre si tienen sentido o no, etc.

5.- TIPOS DE PROBLEMAS Y SU COMPLEJIDAD

El análisis de los distintos tipos de problemas y su nivel de complejidad lo realizaremos siguiendo el trabajo de Martínez (2013) "Resolución de problemas y método ABN". Dentro de ellos, nos centraremos únicamente en los problemas aritméticos básicos que presentan una única situación, estableciendo una distinción entre los problemas aritméticos de estructura aditiva y de estructura multiplicativa.

5.1.- Tipología de los problemas aritméticos verbales

5.1.1.- Los problemas aritméticos de estructura semántica aditiva

Los PAVs de estructura aditiva son aquellos en los que la situación problemática que presentan se puede resolver mediante una adición y/o sustracción. Dentro de estos problemas podemos distinguir cinco tipos diferentes: de cambio, combinación, comparación, igualación y reparto igualatorio.

I. Cambio

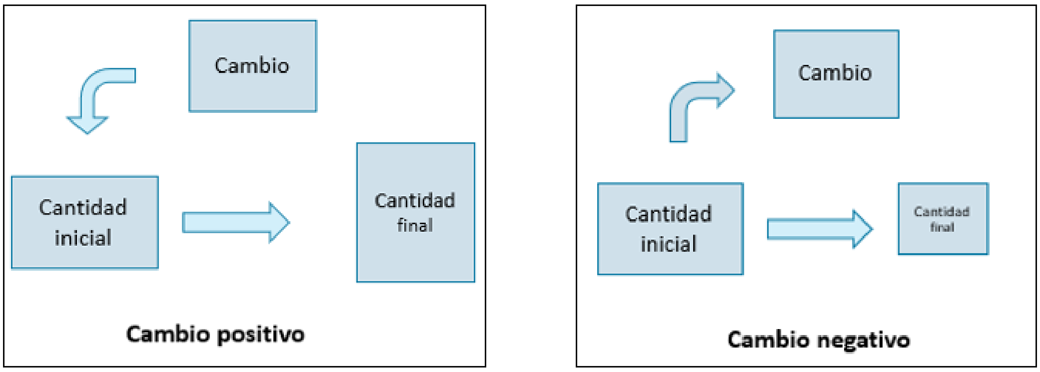
Los problemas de **cambio** son aquellos en los que una cantidad sufre un incremento o un decremento. Por ello, se trata de una categoría dinámica puesto que siempre al resolver el problema se puede observar cómo dicha cantidad se ha visto modificada por la situación planteada. Un ejemplo de problema aritmético de cambio sería el siguiente: "*Mario tiene 10 canicas. En una partida en el parque, gana 3 canicas más. ¿Cuántas canicas tiene ahora Mario?"*

Los elementos que conforman los problemas de cambio son principalmente los cuatro siguientes:

- **Cantidad inicial**.
- **Cambio** que le sucede a la cantidad inicial.
- **Sentido** del cambio que será el que provoque que la cantidad inicial sufra un incremento o un decremento.
- **Cantidad final** es la consecuencia del cambio que se da en la situación problemática.

Figura 3.

Categoría de cambio



Fuente. Orrantia (2019)

Dentro de la categoría de cambio, podemos distinguir seis subtipos diferentes de problemas. En los problemas de **cambio 1 y cambio 2**, los datos que se presentan en el problema son la cantidad inicial y el cambio, siendo la cantidad final la incógnita.

i. **Cambio 1:** “*Teresa tiene 5 euros. En una partida gana 3 euros. ¿Cuántos euros tiene Teresa?*” En este ejemplo, podemos ver, por un lado, como los datos hacen referencia a la cantidad inicial (5 €) y al cambio (3 €), es decir, la cantidad que va a transformar la cantidad inicial y, por otro lado, como la pregunta hace alusión a la cantidad final, es decir, la cantidad de euros que tiene Teresa después de la transformación o cambio.

ii. **Cambio 2: “***Teresa tiene 8 euros. En una partida pierde 3 euros. ¿Cuántos euros tiene ahora Teresa?”* En este caso, observamos, por un lado, como los datos hacen referencia a la cantidad inicial (8 €) y al cambio (3 €), es decir, la cantidad que va a transformar la cantidad inicial y, por otro lado, como la pregunta hace alusión a la cantidad final, es decir, la cantidad de euros que tiene Teresa después de la transformación o cambio.

En los problemas de **cambio 3 y cambio 4**, conocemos la cantidad inicial y la final, mientras que, en este caso, el cambio es la incógnita.

i. **Cambio 3**: “*Teresa tiene 5 euros. En una partida gana algunos euros. Ahora Teresa tiene 8 euros. ¿Cuántos euros ha ganado Teresa?*” En esta ocasión, los datos que tenemos hacen referencia a la cantidad inicial (5€) y a la cantidad final

(8€) que tiene la protagonista del problema después de haber sufrido el cambio, cantidad que es la incógnita y por la que se pregunta en el problema.

ii. **Cambio 4:** "*Teresa tiene 8 euros. En una partida pierde algunos euros. Ahora Teresa tiene 5 euros. ¿Cuántos euros ha perdido Teresa?*" En este ejemplo, los datos hacen referencia a la cantidad inicial (8€) y a la cantidad final (5€) y el cambio es la cantidad por la que se pregunta.

En los problemas de **cambio 5 y cambio 6**, los datos que conocemos son el cambio y la cantidad final, convirtiendo a la cantidad inicial en la incógnita de estos dos últimos subtipos.

i. **Cambio 5**: "*Teresa tiene algunos euros. En una partida gana 3 euros. Ahora Teresa tiene 8 euros. ¿Cuántos euros tenía Teresa al principio?*" En este ejemplo, se puede observar que los datos se refieren al cambio (3€) y a la cantidad final (8€) que tiene la protagonista y la pregunta, es decir, la cantidad que hay que hallar es la cantidad inicial.

ii. **Cambio 6:** "*Teresa tiene algunos euros. En una partida pierde 3 euros. Ahora Teresa tiene 5 euros. ¿Cuántos euros tenía Teresa al principio?*" En este caso, podemos ver, por un lado, como los datos hacen referencia a la cantidad inicial (8€) y al cambio (3 €), es decir, la cantidad que va a transformar la cantidad inicial y, por otro lado, como la pregunta hace alusión a la cantidad final, es decir, la cantidad de euros que tiene Teresa después de la transformación o cambio.

Por último, es importante destacar que los problemas de subtipo 1,3 y 5 siempre tiene sentido positivo (ganar, añadir, etc.) mientras que los problemas de subtipo 2,4 y 6 siempre tiene sentido negativo (perder, quitar, etc.).

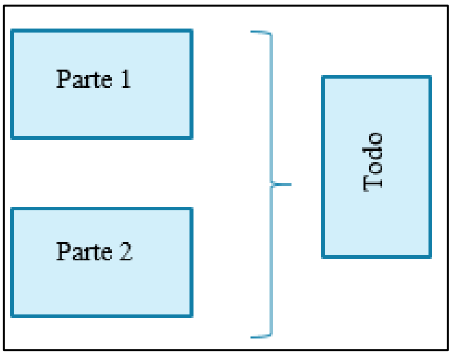
II. Combinación

Los problemas de combinación son los más sencillos dentro de los PAVs de estructura aditiva. En ellos, las situaciones problemáticas que se presentan se refieren a la combinación de dos o más partes para formar un todo. Se trata de una categoría estática, puesto que los datos del problema no sufren ninguna modificación, y de problemas binarios, ya que sólo son necesarias dos cantidades. Un ejemplo: "*En una granja hay vacas y caballos. Si hay 35 vacas y 20 caballos, ¿cuántos animales hay en total?"*

En este tipo de problemas, los principales elementos que lo forman son un **conjunto** y las **partes** que forman dicho conjunto que pueden ser de la misma o distinta naturaleza.

Figura 4.

Categoría de Combinación



Fuente. Orrantia (2019)

Así mismo, los problemas de la categoría de combinación se clasifican en dos subcategorías. Por un lado, tenemos de **combinación de tipo 1** en la que conocemos las partes y debemos averiguar el total del conjunto. Por otro lado, la de **combinación de tipo 2**, los datos que conocemos son el conjunto y una de las partes, siendo la incógnita la otra parte del todo.

i. **Combinación 1**: "*En una granja hay vacas y caballos. Si hay 35 vacas y 45 caballos. ¿Cuántos animales hay en total?*" En este ejemplo, podemos ver que los datos hacen referencia a las dos partes que forman un conjunto, en este caso, la parte 1 (35 vacas) y la parte 2 (45 caballos), siendo el total o conjunto la incógnita que se debe calcular.

ii. **Combinación 2**: "*En una granja hay un total de 80 animales. Si hay 35 vacas y el resto son caballos, ¿cuántos caballos hay en la granja?*" En este ejemplo, podemos observar que los datos hacen alusión a una de las partes, parte 1, (35 vacas) y al conjunto o total (80 animales), por lo que la incógnita que se debe hallar es la parte 2 del conjunto.

III. Comparación

Los problemas correspondientes a la categoría de comparación son aquellos en los que las cantidades que aparecen en los datos de los problemas se comparan una con otra.

Se trata de problemas binarios porque requieren la presencia de dos cantidades distintas, aspecto que los diferencia de los problemas de cambio en los que solo se necesita una cantidad que es la que sufre la modificación. Así mismo, es importante destacar que los problemas de comparación son estáticos puesto que las cantidades que aparecen en la situación problemática no sufren en ningún momento ninguna modificación. Un ejemplo: *"Marina tiene 8 estuches. Andrea tiene 5 estuches. ¿Cuántos estuches más tiene Marina que Andrea?"*

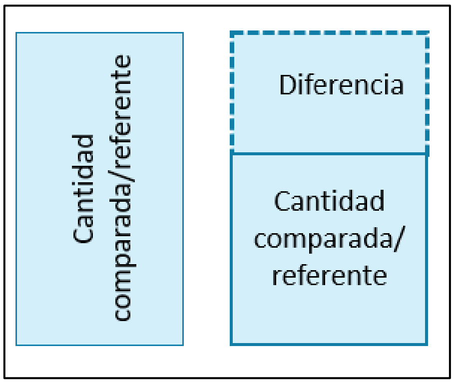
Los elementos que forman los problemas de esta categoría son los cuatro siguientes:

- **Cantidad que se compara** es aquella de la que depende la situación.
- **Cantidad de referencia** es aquella cantidad que se toma como modelo de comparación.
- **Diferencia** se puede definir como la desigualdad de la cantidad comparada respecto a la de referencia.
- **Sentido de la diferencia** que puede ser positivo o negativo en función de si se pregunta por cuántas más o cuántas menos.

No obstante, hay que tener en cuenta que la cantidad comparada y la referente pueden ser tanto la cantidad mayor como la menor.

Figura 5

Categoría de comparación



Fuente. Vicente (2020)

Al igual que en el resto de los problemas de estructura aditiva, los problemas de comparación los podemos agrupar en seis subtipos diferentes. En los problemas de

comparación tipo 1 y comparación tipo 2, conocemos la cantidad comparada y la de referencia, siendo la diferencia la incógnita que tenemos que averiguar.

i. **Comparación 1**: "*Carmen tiene 15 pelotas y Laura tiene 10. ¿Cuántas pelotas más tiene Carmen que Laura?*" En este ejemplo, podemos ver que los datos que tenemos son la cantidad comparada (15 pelotas) y la de referencia (10 pelotas) y lo que tenemos que hallar es la diferencia.
ii. **Comparación 2**: "*Carmen tiene 15 pelotas y Laura tiene 10. ¿Cuántas pelotas menos tiene Laura que Carmen?*" En este ejemplo, al igual que en el anterior, los datos que tenemos reflejan la cantidad comparada (15 pelotas) y la cantidad de referencia (10 pelota) y lo que se debe hallar es la diferencia entre ambas cantidades.

En los problemas de **comparación tipo 3 y comparación tipo 4**, conocemos la cantidad de referencia y la diferencia, mientras que la cantidad comparada es la incógnita que tenemos que resolver.

i. **Comparación 3**: "*Laura tiene 10 pelotas. Carmen tiene 5 pelotas más que Laura. ¿Cuántas pelotas tiene Carmen?*" En este ejemplo, podemos observar que los datos que tenemos aluden a la cantidad de referencia (10 pelotas) y a la diferencia (5 pelotas más) y lo que tenemos que hallar es la cantidad comparada, es decir, las pelotas que tiene Carmen.
ii. **Comparación 4**: "*Carmen tiene 15 pelotas. Laura tiene 5 pelotas menos que Carmen. ¿Cuántas pelotas tiene Laura?*" En este ejemplo, podemos observar que los datos hacen referencia a la cantidad de referencia (15) y a la diferencia (5 pelotas menos) por lo tanto la incógnita es la cantidad comparada, es decir, las pelotas que tiene Laura.

En los problemas de **comparación tipo 5 y comparación tipo 6**, sabemos cuál es la cantidad comparada y la diferencia, mientras que la cantidad de referencia es el dato que debemos averiguar.

i. **Comparación 5**: "*Carmen tiene 15 pelotas. Tiene 5 pelotas más que Laura. ¿Cuántas pelotas tiene Laura?*" En este ejemplo, podemos ver que los datos hacen referencia a la cantidad comparada (15 pelotas) y a la diferencia (5 pelotas más que), siendo la cantidad de referencia, es decir, las pelotas de Laura, la incógnita.

ii. **Comparación 6**: "*Laura tiene 10 pelotas. Tiene 5 pelotas menos que Carmen. ¿Cuántas pelotas tiene Carmen?*" En este ejemplo, podemos ver que los datos aluden a la cantidad comparada (10 pelotas) y a la diferencia (5 pelotas menos que) siendo la cantidad de referencia la que debemos hallar.

En definitiva, los problemas de tipo 1,3,5 siempre son de sentido positivo ("más que"), mientras que los problemas de tipo 2,4 y 6 son de sentido negativo ("menos que").

IV. Igualación

Generalmente, los problemas de la categoría de igualación se suelen confundir con los problemas de comparación puesto que tienen bastantes características comunes. Sin embargo, esto no quiere decir que ambos tipos de problemas sean iguales o incluso que requieran el mismo tipo de procesos mentales para resolverlos. La diferencia existente entre ambos radica en que los problemas de comparación establecen la diferencia entre las cantidades del problema, mientras que en los de igualación se pide la cantidad que hay que añadir o quitar para que las dos cantidades queden iguales. Es importante destacar que los problemas de igualación, previamente, requieren una situación de comparación para luego pasar a una situación en la que una de las cantidades sufre una transformación.

De esta forma, podemos decir que los problemas de igualación se basan en la idea de añadir o quitar a una cantidad del problema para hacerla igual que la otra. Este tipo de problemas tienen ciertas semejanzas, por un lado, con los de comparación, puesto que son binarios al ser necesario que en el problema haya dos cantidades diferentes; y, por otro lado, con los problemas de cambio, al ser problemas dinámicos, ya que es imprescindible que en el problema haya una cantidad que sufra una modificación. Un ejemplo de problema de igualación sería: *"Mario tiene 10 pelotas. Si le dieran 3 más tendría las mismas que Álvaro. ¿Cuántas pelotas tiene Álvaro?"*

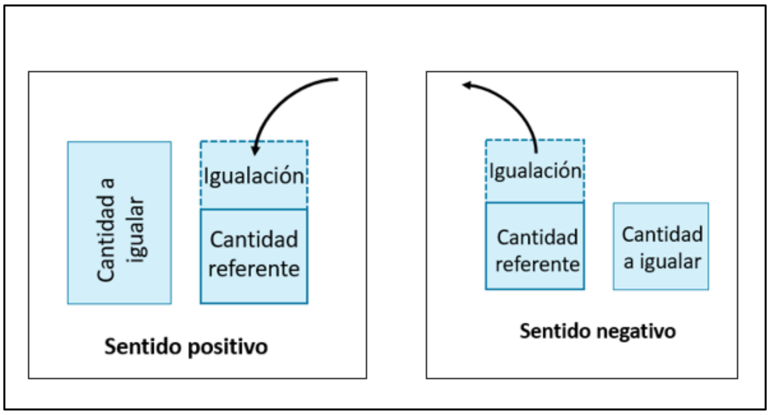
Los elementos que componen los problemas de la categoría de igualación son los siguientes:

- C**antidad a igualar** es la que varía en función de la igualación.
- **Cantidad de referencia** es la que se toma como punto de partida y no sufre ninguna modificación.
- **Igualación** es la cantidad que hay que agregar o extraer.

- **Sentido de la igualación** que puede ser positivo o negativo.

Figura 6.

Categoría de igualación



Fuente. Vicente (2020)

Al igual que en el resto de las categorías de estructura aditiva, dentro de los problemas de igualación podemos encontrar seis subtipos diferentes de problemas. Los problemas de **igualación tipo 1 y tipo 2** tienen como datos la cantidad a igualar y la de referencia, convirtiendo la igualación en la incógnita de la situación.

i. **Igualación 1**: "*Pedro tiene 20 cromos. Manuel tiene 12 cromos. ¿Cuántos cromos más le deben dar a Manuel para tener los mismos que Pedro?*" En este ejemplo, podemos ver que los datos aluden a la cantidad a igualar (20 cromos) y a la de referencia (12 cromos), siendo la cantidad que debemos hallar la igualación.
ii. **Igualación 2**: "*Pedro tiene 20 cromos. Manuel tiene 12 cromos. ¿Cuántos cromos menos le tienen que quitar a Pedro para tener los mismos que Manuel?*" En este caso, podemos observar que los datos hacen referencia a la cantidad a igualar (20 cromos) y a la cantidad de referencia (12 cromos), siendo la cantidad que debemos hallar, la igualación.

En los problemas de **igualación tipo 3 y tipo 4**, conocemos la cantidad de referencia y la igualación, mientras que la cantidad a igualar es la incógnita.

i. **Igualación 3**: "*Pedro tiene 20 cromos. Si a Manuel le dieran 8 cromos más tendría el mismo número de cromos que Pedro. ¿Cuántos cromos tiene Manuel?*" En este ejemplo, podemos ver que los datos hacen alusión a la referencia (12 cromos) y a la igualación (8 cromos más), por lo que la incógnita que se debe hallar es la cantidad a igualar.

ii. **Igualación 4**: "*Manuel tiene 12 cromos. Si Pedro tuviera 8 cromos menos, tendría los mismos que Manuel. ¿Cuántos cromos tiene Pedro?*" En este caso, podemos observar que los datos reflejan la cantidad de referencia (12 cromos) y la igualación (8 cromos menos), por lo que la cantidad a igualar es lo que se debe hallar.

En los de **igualación tipo 5 y tipo 6**, se conoce la cantidad a igualar y la igualación, siendo la cantidad de referencia la cantidad que tenemos que hallar.

i. **Igualación 5**: "*Manuel tiene 12 cromos. Si ganara 8 cromos más tendría los mismos que Pedro. ¿Cuántos cromos tiene Pedro?*" En este ejemplo, podemos ver que los datos del problema aluden a la cantidad a igualar (12 cromos) y a la igualación (8 cromos más) por lo que la cantidad de referencia es la cantidad que se debe hallar.

ii. **Igualación 6**: "*Pedro tiene 20 cromos. Si perdiera 8 cromos tendría los mismos que Manuel. ¿Cuántos cromos tiene Manuel?*" En este caso, podemos observar que los datos del problema aluden a la cantidad a igualar (20 cromos) y a la igualación (8 cromos menos), siendo la incógnita la cantidad de referencia.

En definitiva, al igual que en el resto de tipos de problemas es importante destacar que, para distinguir el tipo 1 del 2, el 3 del 4 y el 5 del 6, debemos fijarnos en el sentido de la igualación, siendo el sentido positivo (más) en los subtipos 1,3 y 5; mientras que en los 2,4 y 6 el sentido es negativo (menos).

V. Reparto igualatorio

Antes de analizar los PAVs de reparto igualatorio es importante tener en cuenta que son una categoría nueva propuesta por los creadores del Método ABN (Método Abierto Basado en Números) puesto que su forma de realizar los algoritmos de la suma y resta permite la creación de esta nueva categoría. La principal razón por la que se encuentran dentro de la estructura semántica aditiva es debido a que se derivan de los problemas de igualación. Sin embargo, en los de reparto igualatorio subyace una estructura algebraica que provoca que se encuentren a caballo entre los PAVs aditivos y los de estructura algebraica. Por ello, en este trabajo, se ha decidido clasificarlos dentro de los aditivos puesto que, en ningún momento, se hablará de los problemas de estructura algebraica.

La categoría de reparto igualatorio es una novedad puesto que nunca se habían tenido en cuenta pues, a pesar de tener características propias, se pueden entrever algunas características de los problemas de igualación. En los problemas de reparto igualatorio, es necesario que exista una relación entre las dos cantidades que sufren un cambio y la finalidad no es encontrar la diferencia, sino anularla. Así mismo, es importante destacar que, a pesar de que existen subtipos que se resuelven con una operación, hay algunos en los que es necesario realizar dos operaciones si se sigue el método tradicional puesto que, si se utiliza el método ABN, sólo es necesaria una operación. En los siguientes ejemplos, podemos ver las similitudes y diferencias entre la categoría de reparto igualatorio e igualación:

a) **Igualación**: "*Mario tiene 12 cromos. Álvaro tiene 8 cromos. ¿Cuántos cromos más le tienen que dar a Álvaro para tener los mismos que Mario?*"
b) **Reparto igualatorio**: *"Mario tiene 12 cromos y Álvaro solo tiene 8 cromos. ¿Cuántos cromos le tiene que dar Mario a Álvaro para que los dos se queden con el mismo número de cromos?"*

En estos dos problemas, podemos ver que son necesarias dos cantidades 12 cromos y 8 cromos y que ambas sufren un cambio. Sin embargo, en el **problema de igualación**, el objetivo es conocer la diferencia de cromos que hay entre los dos protagonistas teniendo en cuenta que hay una cantidad fija (12) y otra (8) que, en este caso, tiene que aumentar, para llegar a igualar a la cantidad fija; mientras que en **reparto igualatorio** la finalidad es tratar de anular la diferencia que hay entre las dos cantidades de cromos y el cambio que se produce, sucede en las dos cantidades.

Los elementos que conforman los problemas de la categoría de reparto igualatorio son los siguientes:

- **Cantidad mayor** es la que va a disminuir.
- **Cantidad menor** es la que va a aumentar.

- **Cantidad igualadora** es de la que se extrae de la cantidad mayor de tal forma que los dos protagonistas del problema tengan la misma cantidad.
- **Cantidad igualada** es la cantidad que tienen los dos protagonistas del problema después de haber sufrido la igualación.

Al igual que el resto de las categorías de estructura aditiva, los problemas de reparto igualatorio están compuestos por seis subtipos de problemas diferentes.

a) **Reparto igualatorio 1**: los datos que conocemos en este problema son la cantidad mayor y la menor, siendo la cantidad igualadora la que tenemos que averiguar. Es importante destacar que, en este subtipo, no se hace referencia a la cantidad igualada. Por ejemplo: "*Andrea tiene 212 cromos, y Guillermo 136 cromos. ¿Cuántos cromos le tendría que dar Andrea a Guillermo para que ambos tuvieran el mismo número?*" En este ejemplo, podemos ver que los datos hacen referencia a la cantidad mayor (212 cromos) y la cantidad menor (136 cromos) y la pregunta hace referencia a la cantidad igualadora que es la que se debe hallar.

b) **Reparto igualatorio 2**: en este subtipo conocemos la cantidad mayor y la cantidad menor, mientras que la incógnita es la cantidad igualada. En este caso, no se hace referencia a la cantidad igualadora. Por ejemplo: "*Andrea tiene 212 cromos, y Guillermo tiene 136 cromos. Andrea le da cromos a su amigo hasta que ambos tienen el mismo número. ¿Con cuántos cromos se quedan los dos?*" En esta ocasión, los datos se refieren a la cantidad mayor (212), así como a la cantidad menor (136). La pregunta hace referencia a la cantidad igualada.

A simple vista, puede parecer que estos dos primeros subtipos son idénticos o bastante similares. Sin embargo, existe una pequeña diferencia entre ellos: en el subtipo 1, el elemento de la cantidad igualatoria es la cantidad desconocida y la cantidad igualada no se menciona en ningún momento; mientras que en el subtipo 2, la cantidad igualatoria no está presente al contrario que en el 1 y, además, la cantidad igualada es por la que se pregunta en el problema.

c) **Reparto igualatorio 3**: en este caso, los datos que sabemos son la cantidad mayor y la igualatoria, la incógnita es la cantidad menor y no se hace referencia a la cantidad igualada. Por ejemplo: "*Andrea tiene 212 cromos, y Guillermo tiene menos. Andrea le da 38 cromos a su amigo y los dos tienen el mismo número de* *cromos. ¿Cuántos cromos tenía Guillermo?*" En este ejemplo, observamos que los datos hacen alusión a la cantidad mayor (212) y a la cantidad igualatoria (38) y la pregunta se refiere a la cantidad menor.

d) Reparto igualatorio 4: la cantidad mayor y la igualada son las cantidades que sabemos, mientras que desconocemos la cantidad menor y, al igual que en reparto igualatorio 2, no se menciona la cantidad igualatoria. Por ejemplo: "*Andrea tiene 212 cromos, y Guillermo tiene menos. Andrea le da cromos a su amigo hasta que los dos se quedan con 174 cromos. ¿Cuántos cromos tenía Guillermo?*" En este ejemplo, los datos que conocemos son la cantidad mayor (212) y la cantidad igualada (174) es decir, el número de cromos con el que se quedan los dos protagonistas de manera que la pregunta hace referencia a la cantidad menor.

Al igual que los dos primeros subtipos, estos dos siguientes también son muy similares, pero con una pequeña diferencia. En los subtipos 3 y 4, se pregunta por la cantidad menor, estando la diferencia en la cantidad que no se menciona: en el subtipo 3, la cantidad igualada y en el subtipo 4, la cantidad igualatoria.

e) Reparto igualatorio 5: los datos que tenemos son la cantidad menor y la igualadora, mientras que la cantidad mayor no la conocemos. Es importante destacar que no se menciona la cantidad igualada al igual que en el tipo 3. Por ejemplo: "*Guillermo tiene 136 cromos. Andrea le da 38, y ahora Guillermo y Andrea se quedan con el mismo número de cromos. ¿Cuántos cromos tenía Andrea antes de repartirlos con su amiga?*" En este ejemplo, podemos ver que los datos son la cantidad menor (136) y la cantidad igualadora (38) de tal forma que la pregunta se refiere a la cantidad mayor.

f) Reparto igualatorio 6: en este subtipo, conocemos la cantidad menor y la igualada, mientras que la mayor no la conocemos y no se menciona la cantidad igualadora. Por ejemplo: "*Guillermo tiene 136 cromos. Andrea tiene más que él, pero le da unos pocos hasta que ambos se quedan con 174 cromos. ¿Cuántos cromos le da Andrea a su amigo?*" En esta ocasión, podemos ver que los datos hacen referencia a la cantidad menor (136) y a la cantidad igualada (174), siendo la incógnita la cantidad mayor a la que se alude en la pregunta.

Al igual que el resto de los subtipos, estos dos últimos son similares entre ellos, pero no tanto como en los anteriores. En ambos subtipos, la cantidad desconocida es la cantidad mayor, pero, en el subtipo 5, no se hace referencia a la cantidad igualada, mientras que en el subtipo 6 sí que se hace referencia a ella y es la cantidad igualatoria la que no se menciona.

5.1.2.- Los problemas aritméticos de estructura semántica multiplicativa

Los problemas aritméticos verbales de estructura semántica multiplicativa son aquellos en los que se presentan situaciones de multiplicar o dividir, frente a las situaciones de adición o sustracción existentes en los de estructura aditiva. Por otra parte, y a diferencia de los problemas aditivos donde la naturaleza de las cantidades es isomorfas, es decir no se modifican, en los problemas de estructura semántica multiplicativa la naturaleza de las cantidades puede ser isomorfas o no. Por un lado, un **ejemplo de naturaleza de cantidades isomorfas**: "*En una cafetería se reciclan 65 botellas de plástico al día. ¿Cuántas botellas de plástico se reciclarán en 9 días?*" En este ejemplo, se hace referencia a la misma magnitud en las tres cantidades del problema, ya que cada una de las magnitudes de las cantidades no varía. Por otro lado, un **ejemplo de naturaleza de cantidades no isomorfas**: "*En un patio de butacas de un teatro, hay 45 filas y 30 columnas. ¿Cuántas personas entran en el patio de butacas del teatro?*" En este ejemplo, al contrario que en el anterior, podemos ver como las cantidades no son de la misma naturaleza: la primera cantidad (filas) y la segunda (columnas) no tienen la misma naturaleza.

Dentro de este tipo de problemas, para distinguir los que presentan situaciones de multiplicación frente a los de división debemos tener en cuenta las propiedades de las cantidades y cómo es su naturaleza, es decir, si es simétrica o asimétrica. Es importante destacar que la simetría o asimetría en un problema está relacionada con el sentido con el que se utiliza la propiedad conmutativa de la multiplicación en las situaciones problemáticas (Martínez, 2013). Por un lado, un **ejemplo de simetría** se da cuando se exponen dos magnitudes distintas de cuya combinación sale otra distinta como, por ejemplo, al calcular el área, tienes cantidades en medidas de longitud (cm) y el resultado se expone en medidas de superficie (cm^2). Por otro lado, un **ejemplo de asimetría** sería averiguar cuántas manos tienen 9 niños, si un niño tiene 2; en este caso, la propiedad conmutativa solamente se aplica para modificar el orden de aparición de los datos, pero no intercambiarlos (Martínez, 2013).

Los problemas de multiplicación suelen estar caracterizados por la presencia de una cantidad que actúa como multiplicador, mientras que los de división se definen por la simetría o asimetría que tienen las cantidades del problema. Así mismo, es importante hacer una distinción entre los distintos tipos de situaciones que se dan cuando la operación para resolver un problema es una división, ya que en algunas ocasiones nos permiten distinguir el tipo de problema del que estamos hablando. Martínez (2013) señala la existencia de dos tipos, por un lado, la **división partitiva** en la que se realiza un reparto directo y donde tanto el divisor como el dividendo son de diferente naturaleza y el cociente es de la misma que el dividendo. Por otro lado, la **división cuotitativa** en la que el dividendo y el divisor son de la misma naturaleza y el cociente es de distinta. Al contrario que en el caso anterior, se hace un reparto indirecto, es decir, se agrupan los elementos.

Dentro de los problemas aritméticos de estructura multiplicativa, encontramos los siguientes tipos: isomorfismo de medidas, escalares y de producto cartesiano.

I. Isomorfismo de medidas

Este tipo de problemas son los que representan la forma más sencilla de los problemas de estructura multiplicativa, teniendo muchas similitudes con los problemas de cambio y de combinación, aspecto que hace que muchos alumnos confundan estos tipos de problemas. Los isomorfismos de medida son aquellos en los que el multiplicador es el que articula las partes para poder formar un todo, cumpliendo, a su vez, otras dos funciones al actuar como iterador y como proporción entre la cantidad inicial y la final. Un ejemplo: *"En un bar se reciclan 25 botellas de agua al cabo de un día, ¿cuántas botellas de agua se reciclarán al cabo de una semana?"*

Esta primera categoría de estructura multiplicativa recoge dentro de sus problemas diferentes estructuras como la estructura de parte-todo, de replicación natural, de prácticas humanas de reparto o asignación periódica, de iteración, de cambio multiplicativo y/o de proporción simple (Martínez, 2013).

Es importante tener en cuenta que como bien indica el nombre de esta categoría, las cantidades del problema son isomorfas y se pueden realizar las mismas operaciones. Además, son unidades naturales que, en definitiva, son las que permiten que el resultado de la operación que resuelve el problema sea de la misma naturaleza que la del primer factor.

Los principales elementos que forman parte de estos problemas son los tres siguientes.

- **Multiplicando** es el primer factor y es el que se desarrolla en la proporción que indique el multiplicador.
- **Multiplicador** es el segundo factor del problema y es el que indica las veces que se debe repetir cada unidad que forma el multiplicando.
- **Resultado** es el desarrollo del multiplicando según la medida indicada por el multiplicador.

Al igual que ocurre con el resto de problemas, ya sea de estructura aditiva o multiplicativa, existen diferentes subtipos. En el caso de los de isomorfismo de medidas, existen tres subtipos distintos.

a) **Isomorfismo de medidas 1**: los datos son el multiplicando (primer factor) y el multiplicador (segundo factor) y la incógnita que tenemos que averiguar es el resultado final. Este tipo de isomorfismo se resuelve con una multiplicación. Por ejemplo: "*Un restaurante recicla 65 botellas en un día. ¿Cuántas botellas reciclará al cabo de una semana?*" En este ejemplo, observamos que los datos son el multiplicando (65) y el multiplicador (una semana que son 7 días). La pregunta del problema hace referencia al resultado total, es decir, las botellas recicladas en una semana.

b) **Isomorfismo de medidas 2**: los datos son el resultado y el multiplicador y lo que debemos averiguar es el multiplicando. Este tipo se resuelve con una división de partición o de reparto, en este caso, un reparto directo. Por ejemplo: "*Un restaurante recicla 455 botellas al cabo de una semana. Cada día recicla el mismo número de botellas. ¿Cuántas botellas recicla al cabo de un día?*" En esta ocasión, los datos del problema se refieren al resultado (455 botellas) y al multiplicador (7 días), siendo el multiplicando la incógnita y la cantidad por la que se cuestiona en la pregunta.

c) **Isomorfismo de medidas 3**: los datos son el resultado y el multiplicando y el multiplicador es el elemento por el que se pregunta. Este tipo se resuelve con una división cuotitativa puesto que hay que hacer grupos, es decir, reparto indirecto. Por ejemplo: "*Un restaurante ha reciclado 455 botellas en varios días. Cada día ha reciclado 65 botellas. ¿Cuántos días ha reciclado botellas?*" En este problema, los datos hacen referencia al resultado (455) y el multiplicando (65), siendo la incógnita y la cantidad por la que se pregunta el multiplicador.

II. Escalares

Los problemas de escala, escalares o también denominados de comparación multiplicativa son aquellos que se asemejan a los de comparación de estructura aditiva. Estos problemas son aquellos en los que se fija la diferencia existente entre dos cantidades, pero siempre teniendo en cuenta que estamos hablando de situaciones de estructura multiplicativa. Además, se pueden dividir en dos tipos en función de la transformación que provoque la escala, por ejemplo, de una cantidad menor a una mayor o al contrario de una cantidad mayor a una menor. Un ejemplo de problema de escala sería: "*Marina tiene 18 € y Andrea tiene 5 veces más euros que ella. ¿Cuántos euros tiene Andrea?"*

En el caso de estos problemas, las cantidades no tienen ningún tipo de relación entre ellas; de hecho, la diferencia no es más que la proporción o escala existente entre ambas cantidades.

Estos problemas están formados únicamente por dos cantidades, aunque se pueden establecer cuatro elementos diferentes:

- **Cantidad comparada** es aquella que va a ser contrastada con la otra cantidad de tal forma que se pueda conocer en cuánto se diferencian.
- **Cantidad referente** es aquella que nos sirve de contraste con la cantidad mencionada anteriormente.
- **Escala** o **razón** es la cantidad que marca la diferencia existente entre ambas cantidades y, además, es el elemento que permite hallar una cantidad a través de la otra.
- **Sentido** que puede ser creciente cuando se pasa de una cantidad menor a una mayor o decreciente cuando se pasa de una cantidad mayor a una menor.

En este caso, también podemos establecer diferentes subtipos de problemas de escala. Sin embargo, para establecerlos es necesario tener en cuenta el sentido de escala de tal manera que debemos hablar, por un lado, de los subtipos de escala creciente y, por otro lado, de los subtipos de escala decreciente. Dentro de los de **escala creciente**, podemos encontrar tres subtipos diferentes:

- **Escala creciente 1**: se desconoce la cantidad comparada, mientras que la cantidad de referencia y la escala son las cantidades que conocemos. Por ejemplo: "*Lucía tiene 8 cromos. Eva tiene 6 veces más que Lucía. ¿Cuántos cromos tiene Eva?*" En este problema, se conoce la cantidad de referencia (8) y la escala (6 veces más), siendo la cantidad comparada por la que se pregunta.
- **Escala creciente 2**: la cantidad comparada y la escala son las cantidades que se conocen, mientras que la cantidad de referencia es la que se desconoce. Por ejemplo: "*Eva tiene 48 cromos. Tiene 6 veces más cromos que Lucía. ¿Cuántos cromos tiene Lucía?*" En este ejemplo, se conoce la cantidad comparada (48) y la escala (6 veces más) de tal forma que la cantidad de referencia es la incógnita que se debe hallar.
- **Escala creciente 3**: se conocen las dos cantidades que se comparan y la que se desconoce es la escala. Por ejemplo: "*Eva tiene 48 cromos. Lucía tiene 8 cromos. ¿Cuántas veces más cromos tiene Eva que Lucía?*" En esta ocasión, se sabe la cantidad comparada (48) y la cantidad de referencia (8), siendo la escala la cantidad por la que se pregunta.

Dentro de los de **escala decreciente**, podemos encontrar otros tres subtipos distintos que son los siguientes:

- **Escala decreciente 1**: se conocen la cantidad comparada y la escala y la que se desconoce es la cantidad de referencia. Se trata de un problema de multiplicar. Por ejemplo: "*Lucía tiene 8 cromos. Tiene 6 veces menos cromos que Eva. ¿Cuántos cromos tiene Eva?*" En este caso, se sabe la cantidad comparada (8) y la escala (6 veces menos), siendo la cantidad de referencia la incógnita que se debe hallar.
- **Escala decreciente 2**: se conocen la cantidad de referencia y la escala, mientras que la cantidad desconocida es la cantidad comparada. Se trata de un problema de

división partitiva. Por ejemplo: "*Eva tiene 48 cromos. Lucía tiene 6 veces menos cromos que Eva. ¿Cuántos cromos tiene Lucía?*" En esta ocasión, se conoce la cantidad de referencia (48) y la escala (6 veces menos), provocando que la cantidad comparada sea la desconocida y por la que se pregunta en el problema.

- **Escala decreciente 3:** se conocen las dos cantidades que se comparan tanto la mayor como la menor, mientras que la cantidad por la que se pregunta es la escala. Se trata de un problema de división cuotitativa. Por ejemplo: "*Eva tiene 48 cromos. Lucía tiene 8 cromos. ¿Cuántas veces menos cromos tiene Lucía que Eva?*" En este caso, se sabe la cantidad comparada (48) y la cantidad de referencia (8), siendo la escala la cantidad por la que se pregunta en el problema, es decir, la incógnita.

Es importante destacar que, a pesar de que en los problemas de escala decreciente tipo 1 y tipo 2 se hace referencia a situaciones similares, existe una diferencia en la operación que debemos realizar para resolver el problema, pues en el tipo 1 debemos hacer una multiplicación mientras que en el tipo 2 hay que hacer una división.

III. Producto cartesiano

Los problemas de producto cartesiano están caracterizados "por una operación (mxn) cuyos componentes son todo el conjunto de número de pares ordenados distintos que se forman cuando el primer elemento pertenece a la cantidad m y el segundo pertenece a la cantidad n, y por la existencia de una simetría en la función que realizan los números del problema" (Martínez, 2013, p. 182). Es decir, son los problemas de multiplicaciones geométricas y/o combinatorios y dentro de ellos se pueden establecer diferentes situaciones de producto cartesiano: problemas con objetos ideales y solución real, de búsqueda de área, con objetos que pueden ser iterados y, por último, con objetos que no pueden ser iterados.

Los principales elementos por los que están formados estos problemas son los tres siguientes:

- **Primer factor** es el que define el orden en el que se van a realizar las combinaciones.
- **Segundo factor** es la cantidad que va a contribuir los componentes para poder formar las parejas o combinaciones.

- **Producto cartesiano** es el total de combinaciones que surgen de las relaciones entre los componentes del primer factor con los del segundo.

A partir de estos tres elementos, podemos clasificar los problemas de producto cartesiano en 3 subtipos diferentes.

- **Producto cartesiano 1**: se conocen el primer y segundo factor, teniendo que averiguar el número de combinaciones posibles que se pueden hacer. Se resuelve con una multiplicación. Por ejemplo: "*En un restaurante se puede formar el menú eligiendo entre 5 primeros platos y 7 segundos platos. ¿Cuántos menús diferentes se pueden formar?*" En este ejemplo, los datos que aparecen en el problema se refieren al primer (5) y al segundo (7) factor, teniendo que averiguar el número total de combinaciones que se pueden hacer.
- **Producto cartesiano 2:** se conoce el producto cartesiano y uno de los factores, teniendo que hallar el otro. Se resuelve con una división. Por ejemplo: "*En un restaurante se pueden formar 35 menús diferentes eligiendo entre primeros platos y segundos platos. Si hay 5 primeros platos, ¿cuántos segundos platos hay?*" En este ejemplo, los datos conocidos con el número de combinaciones o producto cartesiano (35) y el primer factor (5) de manera que la pregunta cuestiona sobre el segundo factor.
- **Producto cartesiano 3**: se conoce sólo el producto cartesiano y hay que hallar los dos factores. Se resuelve con una raíz cuadrada. Por ejemplo: "*Un patio cuadrado tiene 900 baldosas. ¿Cuántas baldosas tiene cada lado del cuadrado?*". En este caso, el único dato que conocemos es el producto cartesiano (900) y lo que hay que hallar son los dos factores que combinados dan el producto cartesiano.

5.2.- Nivel de complejidad semántico-matemática de los problemas aritméticos verbales

El análisis teórico realizado de los diferentes tipos de PAVs es imprescindible completarlo con un estudio de los distintos niveles de complejidad semántico-matemático para lo que es fundamental tener en cuenta la clasificación mencionada anteriormente entre aditiva y multiplicativa.

Los PAVs que tienen **estructura semántica aditiva** los podemos clasificar en los siguientes niveles de complejidad. En el nivel de **complejidad baja** podemos incluir los problemas de combinación tipo 1, cambio, comparación e igualación tipo 1 y tipo 2, puesto que son aquellos que para su resolución no es necesario crear una representación mental, es decir, no es necesario integrar y conectar la información de problema con lo que ya sabes para poder resolverlo. Por ejemplo, en el siguiente problema de cambio 1: *Teresa tiene 5 euros. En una partida gana 3 euros. ¿Cuántos euros tiene Teresa?*" En este problema, automáticamente, el alumno encuentra la palabra "ganar" y resuelve el problema sumando. En el nivel de **complejidad media**, podemos englobar a los problemas de combinación tipo 2, de cambio, comparación tipo 3 y 4, e igualación de tipo 5 y tipo 6, ya que en ellos es imprescindible construir una representación mental en la que hay que entender las relaciones entre los conjuntos de las cantidades para poder llegar a la solución del problema. Por ejemplo, en el siguiente problema de cambio 3: "*Teresa tiene 5 euros. En una partida gana algunos euros. Ahora Teresa tiene 8 euros. ¿Cuántos euros ha ganado Teresa?".* Al ver en el enunciado la palabra "*gana*" automáticamente se pensaría que hay que hacer una suma. Sin embargo, no es así y el modelado directo en estos casos no funciona. En este caso, se debe reflexionar sobre la relación que hay entre las cantidades y pensar que para hallar los que ha ganado en el problema, tiene que contar desde 5 hasta 8, y que el resultado es, precisamente, la cantidad que ha contado. Por último, los problemas de **complejidad alta** son los de cambio, comparación tipo 5 y tipo 6, e igualación 3 y 4 porque para poder resolverlos es fundamental crear una representación mental en la que el alumno utilice su conocimiento conceptual parte-todo. Por ejemplo, en el siguiente problema de cambio 6: "*Teresa tiene algunos euros. En una partida pierde 3 euros. Ahora Teresa tiene 5 euros. ¿Cuántos euros tenía Teresa al principio?".* En esta ocasión, al ver la palabra "pierde" se pensaría inmediatamente que hay que restar, pero no es así. En este problema, hay que pararse a pensar las relaciones que hay entre las cantidades y, además, pensar que Teresa no puede tener menos dinero del que tiene ahora que es lo que ocurriría si restamos. En relación a los problemas de reparto igualatorio, cabe destacar que se podrían considerar de complejidad alta puesto que, al resolverlos con el método tradicional, se deben realizar dos o más operaciones sucesivas, es decir, se necesita el resultado de una operación para hacer la siguiente.

Los PAVs de **estructura semántica multiplicativa** no son tan sencillos de organizar como el grupo anterior. Por ello, dentro de cada uno de los tipos señalados, estableceremos su grado de complejidad. Los **problemas de isomorfismo de medidas** se pueden englobar en el nivel de complejidad baja. Los **problemas escalares** se pueden clasificar dentro del nivel de complejidad media siempre y cuando sean consistentes, es decir, la palabra clave (veces más o veces menos) coincida con la operación necesaria para resolver el problema, multiplicación o división respectivamente. Por último, los **problemas escalares inconsistentes**, es decir, cuando la palabra clave no coincide con la operación, y los de **producto cartesiano** los podemos clasificar dentro del nivel de complejidad alta (Vicente y Manchado, 2018).

Finalmente, es muy importante tener en cuenta cada una de las estructuras y características organizativas que tienen los diferentes tipos de problemas mencionados anteriormente para saber cómo se debe diseñar una intervención y poder ajustarla a las necesidades que presenten cada uno de los alumnos.

6.- MODELOS DE INTERVENCIÓN EN LAS DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES

El objetivo de este Trabajo de Fin de Grado, como hemos señalado anteriormente, es analizar las dificultades en la resolución de los diferentes tipos de problemas que hemos descrito en el apartado anterior. Para ello, me parece interesante describir los diferentes modelos de intervención existentes entre los que un maestro puede elegir para ayudar a compensar o paliar esas dificultades. Entre los modelos que más destacan se encuentran los dos siguientes: "Modelo de espera al fracaso ("*Wait to Fail Model*" en inglés) y el "Modelo de Respuesta a la Intervención", *Response to Intervention Model* (RtI).

El "**Modelo de espera al fracaso**" es el método tradicional que se ha utilizado durante una buena parte de la historia internacional de la educación, es decir, es un modelo que se ha empleado durante mucho tiempo en prácticamente en todos los sistemas educativos del mundo. Este modelo consiste en la utilización del criterio de discrepancia entre el Cociente Intelectual (CI) y el rendimiento escolar. Este criterio fue introducido por Barman (1965) que proponía "*una discrepancia educativa severa entre el potencial intelectual estimado y el nivel de rendimiento actual en relación con las dificultades básicas en el proceso de aprendizaje*" (p. 220). De esta forma, se espera a que los alumnos con dificultades tengan un desfase curricular de dos años para poderles dar la atención y los recursos que necesitan para mejorar su situación académica. Al utilizar este modelo, se puede acabar creando una situación de indefensión aprendida y una pérdida de la motivación al aprendizaje, aspecto bastante negativo, que indica que la ayuda que el alumno con dificultades necesita llega bastante tarde.

Sin embargo, décadas más tarde, en algunos estudios (Fletcher et al., 1994; Siegel, 1989; Stanovich y Siegel, 1994) comenzaron a plantearse la validez del criterio de discrepancia entre el CI y el rendimiento. Finalmente, fue en estudios posteriores como el de Jiménez et al. (2008) en el que se comprobó que el CI no influía directamente en las diferencias que había entre un grupo de alumnos con dificultades y un grupo de alumnos sin ellas, lo que ha permitido que se pueda evolucionar y plantearse la utilidad de modelos basados en la respuesta a la intervención.

El "**Modelo de Respuesta a la Intervención (RtI)**" es la principal alternativa al modelo tradicional. Se basa en la evaluación temprana de un grupo de alumnos mediante un cribado para detectar posibles dificultades en los próximos aprendizajes y proporcionarles la ayuda necesaria a través de un programa de intervención individualizado, siempre basado en la investigación científica. En definitiva, es un modelo que realiza la evaluación y la intervención de forma simultánea a través de un método de prevención multinivel con el que se puede tanto identificar a las personas en riesgo de tener dificultades como intervenir en ellas de forma rápida, adaptándose a las características y necesidades del alumno. Este modelo tiene dos propósitos, por un lado, sirve de modelo de prevención temprana y, por otro lado, como modelo de identificación. El primer propósito tiene la finalidad de trabajar con el alumno que, en un principio, presenta dificultades y ver si responde o no a la intervención; mientras que el segundo se centra en detectar al grupo de alumnos que no responde a la intervención. Los cuatro componentes que forman el modelo son: sistema multinivel, proceso de cribado, control del progreso de aprendizaje y toma de decisiones que veremos a continuación.

El primer componente es el sistema multinivel. Esto significa que el modelo está formado, a su vez, por tres niveles distintos. En el nivel 1, la intervención se realiza en el aula ordinaria y las instrucciones que se proporcionan a los alumnos deben ser destinadas a dar respuesta a un grupo formado por alumnos muy diferentes. Los estudiantes que se queden por debajo de lo esperado en relación con el rendimiento del resto de alumnos deberán pasar al nivel 2. Este segundo nivel consiste en intervenir intensiva y sistemáticamente, ya sea en el aula ordinaria o en una externa, en grupos más pequeños y más frecuentemente. En este nivel, se persiguen dos objetivos que son evaluar, como mínimo una vez al mes, la respuesta a la intervención de los alumnos; y prevenir futuras dificultades. De esta forma, los alumnos que respondan adecuadamente a la intervención dejarán el nivel 2 y aquellos cuya respuesta no se adecúe a lo esperado, pasarán al nivel 3. En el nivel 3, el número de alumnos con el que se interviene se reduce (3 alumnos como máximo), mientras que la frecuencia y el tiempo de intervención aumentan. En este nivel, la evaluación de la respuesta se debe realizar una vez a la semana. Así mismo es importante destacar que, en este primer elemento, las modalidades de agrupamiento (cuánto más pequeño sea el grupo, mayor rendimiento cabe esperar), el tipo y el tiempo de instrucción, y la evaluación que se hace, son características que tienen cierta influencia en el éxito de este modelo de intervención.

El segundo componente es el proceso de cribado universal y se puede considerar uno de los pilares del RtI, puesto que si se realiza una identificación temprana de los alumnos que tienen dificultades para alcanzar los objetivos, se pueden reducir las probabilidades de tener dificultades en el futuro. Este elemento se debe poner en marcha durante la etapa de Educación Infantil o en el primer curso de Educación Primaria. Por ello, es el primer paso dentro del modelo.

El tercer componente del modelo es el control y supervisión del proceso de aprendizaje y se da cuando los alumnos en riesgo ya han sido identificados y se encuentran en el nivel 2 del sistema multinivel de tal forma que su proceso de aprendizaje será controlado mediante un sistema de evaluación dinámico. El principal inconveniente que hallamos en este componente es la dificultad para encontrar tests estandarizados que se puedan pasar varias veces al año.

El cuarto componente es la toma de decisiones basada en datos y se trata de uno de los elementos más complicados del modelo RtI. Una de las decisiones más complejas que se tienen que tomar es el rol que va a adquirir cada profesional del centro educativo en los distintos componentes del modelo. Sin embargo, las decisiones no recaen solo en el colegio, sino que es imprescindible que haya una asistencia técnica de supervisores para ayudar en este proceso.

Por último, es necesario mencionar algunas de las ventajas que presenta el RtI frente al Modelo de espera al fracaso puesto que influyen bastante en el rendimiento y éxito que tenga el alumno. Una de ellas es que el modelo RtI permite que un alumno no sea etiquetado directamente en el programa de Atención Temprana del Desarrollo Infantil (ATDI) hasta que se demuestre una falta de respuesta a la intervención. Otra de las ventajas es que el modelo RtI permite realizar una atención temprana y una **dotación** de recursos con más antelación que el otro modelo, **proporcionando** al niño las ayudas que necesita y así poder evitar una desmotivación frente al aprendizaje, en el mejor de los casos.

Finalmente, podemos concluir que el **Modelo de Respuesta a la Intervención** es un modelo de prevención cuya finalidad es prevenir e intervenir de forma temprana en las dificultades de aprendizaje. No obstante, para ello hay que saber en qué aspectos se debe fijar un maestro para saber cuál es el curso que debe seguir un alumno y así poder detectar posibles dificultades. Una de las características principales de este modelo es utilizar una prueba de cribado, en la que se podría encuadrar la que se presenta en este Trabajo de Fin de Grado, aunque solo sea apta para los cursos superiores de Educación Primaria pues hay problemas de complejidad alta no idóneos para los cursos inferiores. Para realizar esta prueba hay que tener en cuenta diferentes aspectos como, por ejemplo, que no todos los tipos de problemas son iguales. Sin embargo, no solo es importante conocer el rendimiento de los alumnos, sino también algunas de las herramientas que influyen directamente en él, como son los libros de texto.

7.- EL PAPEL DE LOS LIBROS DE TEXTO EN EL APRENDIZAJE DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Actualmente, los libros de textos son la principal herramienta que los maestros utilizan para enseñar la asignatura de matemáticas y, en concreto, para practicar la resolución de problemas matemáticos con los alumnos; de tal manera que analizar el tipo de PAVs que aparecen en los libros de texto parece tener una gran relevancia para los objetivos que se persiguen en este Trabajo de Fin de Grado. Esto se debe a que, como veremos más adelante, en los libros de texto solo aparecen determinados tipos de problemas, es decir, no se trabajan todas las categorías existentes, provocando que puedan aparecer dificultades.

Los libros de texto han ido adquiriendo una gran importancia en la enseñanza de las matemáticas en las diferentes etapas educativas de nuestro país, pues aquellos problemas que aparecen en ellos son con los que aprenden los alumnos. La principal razón es que se han convertido en el recurso fundamental que la gran mayoría de los maestros utilizan, ya que con ellos explican los contenidos y trabajan las actividades que se proponen en este recurso como señalan los estudios de Hiebert et al. (2003) y Mullis et al. (2008), entre otros. Además, se trata de un material en el que se recopilan todos los conocimientos matemáticos que se deben enseñar en un determinado curso, incluyendo diferentes estrategias metodológicas que puedan ayudar a la práctica educativa del docente. Las razones expuestas nos pueden llevar a la conclusión de que quizás el libro de texto es un recurso que principalmente ahorra tiempo a los maestros a la hora de preparar clases, pero también le da coherencia al currículo y permite estructurar las clases de matemáticas. Por ello, tiene la importancia que tiene en la enseñanza de las matemáticas.

A partir del estudio realizado por Vicente y Manchado (2018), se ha comprobado que, en dos de las editoriales de libros de texto más utilizadas en España, el 35,4 % de los problemas son de estructura aditiva, el 43,95% son de estructura multiplicativa y el resto son mixtos. En otro estudio similar, como por ejemplo el de Tárraga-Mínguez y Tarín-Ibáñez (2022), en el que se analizan seis de las editoriales utilizadas en nuestro país, aparecen resultados similares, el 49,7% son problemas simples, el 12,8% son problemas complejos, el 31,5% son problemas de estructura multiplicativa y el 2,44% son problemas que presentan un desafío adicional.

En relación con los **problemas de estructura aditiva**, debemos señalar, en primer lugar, que son los problemas de combinación los que tienen una mayor presencia, representando más de la mitad (57,53%), seguidos de los de cambio (25,28%) y los de comparación (16,2%), mientras que los de igualación son los que menos aparecen (0,89%). Dentro de esta estructura resulta muy llamativa la gran cantidad de problemas de combinación y la poca presencia de problemas de igualación, pues son igual de importantes que el resto de los de estructura aditiva. En segundo lugar, también debemos destacar que la mayor parte de los problemas presentan un nivel de complejidad semántico-matemática baja (73,6%), seguidos de los de complejidad media (25,37%), frente a los de complejidad alta que tan solo representan el 1,03%. Parecía lógico pensar que debería existir un reparto más equitativo, manteniendo en todo momento una progresividad.

En cuanto a los **problemas de estructura multiplicativa**, el grado de complejidad bajo es ampliamente mayoritario (81,09%), destacando los de isomorfismo de medidas, seguidos de los de complejidad media (13,92%) y alta (5%) en los que destacan los problemas de producto cartesiano. Por otro lado, si consideramos cómo se distribuyen según los cursos de la etapa de Educación Primaria y el grado de complejidad, el resultado tampoco parece muy adecuado. Los problemas de complejidad baja están presentes en todos los niveles de la etapa, mientras que los de complejidad media aparecen fundamentalmente en quinto y sexto, pero no lo hacen prácticamente de segundo a cuarto; y los de complejidad alta solo aparecen en quinto y sexto. Sería conveniente que los de complejidad media aparecieran con mayor frecuencia y los de alta tuvieran más presencia de la que ya tienen.

En definitiva, podemos concluir que los libros de texto son la herramienta fundamental con la que los alumnos aprenden a resolver problemas. Sin embargo, hemos podido comprobar con los datos expuestos en este mismo apartado que, a pesar de la importancia que tiene, son recursos muy desequilibrados, es decir, hay una serie de PAVs que se trabajan en exceso y muchos otros que apenas se plantean.

En resumen, el análisis realizado en el marco teórico nos muestra la existencia de diferentes tipos de problemas que requieren estrategias distintas para su resolución; y que la utilización de estrategias inadecuadas puede provocar dificultades en el aprendizaje de la resolución de problemas que se pueden detectar mediante pruebas de cribado precoz. Estas dificultades se pueden deber tanto a los propios alumnos como a la poca variedad de problemas que se trabajan en los libros de texto. Por esta razón, en este trabajo se va a realizar una prueba de cribado en la que se va a determinar qué proporción de alumnos de un aula de Educación Primaria tiene dificultades para resolver problemas.

8.- ESTUDIO

Los objetivos de este estudio, como hemos mencionado anteriormente, son conocer la prevalencia de las dificultades en la resolución de problemas en un grupo de alumnos de Educación Primaria. Así mismo, los datos obtenidos nos permitirán obtener información acerca de las categorías de problemas en las que los alumnos tienen mayores dificultades. Para ello, la parte aplicada del TFG ha consistido en la realización de un estudio a un grupo de alumnos de la etapa de Educación Primaria sobre la resolución de problemas, mediante el diseño y la aplicación de una prueba con diferentes tipos de problemas para que los alumnos de la muestra los resuelvan.

Para ello, describiremos la parte aplicada del trabajo en la que, en primer lugar, hablaremos de la muestra a la que va dirigida el estudio; en segundo lugar, definiremos el diseño de las tareas que se van a presentar a los alumnos; en tercer lugar, explicaremos la codificación de los datos; en cuarto lugar, determinaremos el procedimiento que se va a seguir en la realización de la prueba; y, por último, analizaremos los resultados obtenidos de la intervención.

8.1.- Muestra

La muestra utilizada para llevar a cabo este estudio ha sido un grupo de alumnos de quinto de Educación Primaria. El grupo está formado por 17 alumnos de quinto curso de los cuales 8 son niñas y 9 son niños. Ahora bien, uno de los alumnos presenta un desfase curricular y, de momento, no sabe resolver los algoritmos de la multiplicación ni de la división y, por consiguiente, tampoco sabe resolver problemas cuya estructura se soluciona con dichos algoritmos. De esta forma, este alumno tuvo que ser excluido de la muestra por lo que la muestra final está formada por 16 alumnos.

8.2.- Diseño de tareas

La prueba de evaluación diseñada está formada por un total de 13 problemas aritméticos distintos que han sido elegidos y diseñados en función de las categorías de problemas de estructura aditiva (suma y resta) y multiplicativa (multiplicación y división) mencionadas en el apartado 5. Para diseñarla, lo primero fue determinar que debía haber como mínimo un problema de cada categoría de las mencionadas en los apartados anteriores; y, a continuación, decidir los diferentes problemas que iba a contener la prueba en función de los niveles de complejidad establecidos por Vicente y Manchado (2018). Por esta razón, en el estudio se incluyen problemas de complejidad baja para conocer si los niveles básicos de resolución de problemas están adquiridos, pero también se ha considerado oportuno incorporar de complejidad alta para saber si tenían algún tipo de dificultad o no, así como problemas de complejidad media para establecer una progresividad.

De esta manera, los problemas que conforman la prueba diseñada quedaron distribuidos de la siguiente forma: 2 problemas de cambio, 1 de combinación, 2 de comparación, 2 de igualación, 1 de reparto igualatorio, 2 de isomorfismo de medidas, 2 escalares y 1 de producto cartesiano. En la **tabla 1**, se recogen las diferentes categorías seleccionadas, el subtipo de problema de cada categoría y las razones por las que se ha incorporado ese subtipo de problema, siempre basándonos en el nivel de complejidad semántico-matemático y en el algoritmo que resuelve el problema.

Tabla 1

Problemas de la prueba: categoría, subtipo y razones

CATEGORÍA	SUBTIPO	RAZONES	
CAMBIO	1	Complejidad baja	Suma
	5	Complejidad alta	Resta
COMBINACIÓN	2	Complejidad media	Resta
COMPARACIÓN	3	Complejidad media	Suma
	5	Complejidad alta	Resta
IGUALACIÓN	1	Complejidad baja	Resta
	5	Complejidad media	Suma
REPARTO IGUALATORIO	4	Complejidad alta	Resta y Resta
ISOMORFISMO DE MEDIDAS	1	Complejidad baja	Multiplicación
	3	Complejidad media	División
ESCALA CRECIENTE	2	Complejidad alta	División
ESCALA DECRECIENTE	2	Complejidad media	División
PRODUCTO CARTESIANO	1	Complejidad alta	Multiplicación

Así mismo, es importante señalar que para el diseño de los distintos problemas se tuvo en cuenta que los números fueran enteros y pequeños, por debajo de la centena, para que, si los alumnos se equivocan al resolver el problema, el error no se debiera a un fallo en la realización del algoritmo, en la medida de lo posible. Esta decisión se tomó porque lo que interesaba era saber si el alumno elegía bien la operación y no tanto su habilidad para el cálculo.

Una vez determinadas las diferentes categorías y sus correspondientes subtipos, pasamos a elaborar los diferentes PAVs de la prueba que hemos aplicado y que se recogen en la **tabla 2**

Tabla 2

Problemas diseñados

CATEGORÍA	PROBLEMA DISEÑADO
CAMBIO 1	En un autobús viajan 35 hombres. En una de las paradas se suben 20 niños. ¿Cuántas personas en total viajan en el autobús?
CAMBIO 5	Daniel fue al parque con algunas canicas. En una partida, gana 15 canicas. Finalmente, Daniel tiene 30 canicas. ¿Cuántas canicas tenía Daniel al principio?
COMBINACIÓN 2	En un frutero hay 25 frutas entre peras y manzanas. Si en el frutero hay 12 peras, ¿cuántas manzanas hay en el frutero?
COMPARACIÓN 3	Marina tiene 10 pelotas. Andrea tiene 5 pelotas más que Marina. ¿Cuántas pelotas tiene Andrea?
COMPARACIÓN 5	Consuelo tiene 45 años. Tiene 32 años más que su hijo Juanjo. ¿Cuántos años tiene Juanjo?
IGUALACIÓN 1	Claudia tiene 10 bolígrafos y Lucía 15. ¿Cuántos bolígrafos más necesita Claudia para tener el mismo número que Lucía?
IGUALACIÓN 5	Álvaro tiene 12 coches. Si le dieran 5 más, tendría los mismos que su hermano Mario. ¿Cuántos coches tiene Mario?
REPARTO IGUALATORIO 4	María tiene 28 cromos. Samuel tiene menos. María le da cromos a Samuel hasta que los dos se quedan con 25 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Samuel?
ISOMORFISMO DE MEDIDAS 1	En un bar se consumen 20 botellas de agua en un día. ¿Cuántas botellas de agua se consumirán al cabo de una semana?
ISOMORFISMO DE MEDIDAS 3	Un colegio quiere llevar a 400 alumnos de excursión. En un autobús entran 20 personas. ¿Cuántos autobuses necesitan?
ESCALA CRECIENTE 2	Manuela tiene 15 rotuladores. Tiene 5 veces más que Óscar. ¿Cuántos rotuladores tiene Óscar?
ESCALA DECRECIENTE 2	Miguel tiene 160 € y Víctor tiene 8 veces menos que Miguel. ¿Cuántos euros tiene Víctor?
PRODUCTO CARTESIANO 1	Un restaurante ofrece en su carta diferentes menús, formados por primeros y segundos platos. Si hay 5 primeros platos y 4 segundos platos, ¿cuántos menús se pueden formar?

8.3.- Procedimiento

El procedimiento que se ha seguido para poder llevar a cabo el estudio ha sido el siguiente. En primer lugar, se diseñó la prueba de evaluación incorporando las diferentes categorías y subtipos de problemas existentes, tanto de estructura aditiva como multiplicativa.

En segundo lugar, se realizó la aplicación de la prueba. La idea original era realizar la prueba en dos sesiones diferentes, pero por cuestiones ajenas al estudio, tuvimos que realizarla en tres. Por esta razón, tuvimos que dividir los trece problemas de los que consta la prueba en 3 grupos diferentes, de tal forma que en la primera sesión se realizarían cuatro problemas, en la segunda se harían cinco y en la última se resolverían los cuatro restantes. A la hora de repartir los trece problemas entre las tres sesiones, nos basamos en el criterio del nivel de complejidad de cada problema de tal manera que las tres sesiones fueran lo más equilibradas posibles. Es decir, en cada uno de los días tenía que haber PAVs de complejidad baja, de complejidad media y de complejidad alta.

A partir de la norma anterior, los problemas de las pruebas de cada día quedaron distribuidos de la siguiente manera. En la **sesión 1**, se realizarían cuatro problemas (**Véase Tabla 3. Distribución problemas en la sesión 1)**: el primero sería de cambio 1, el segundo de isomorfismo de medidas 1, el tercero de combinación 2 y el cuarto y último de reparto igualatorio 4. La razón principal por la que se decidió colocar los problemas en este orden es porque cambio 1 e isomorfismo de medias 1 son de complejidad baja, combinación 2 es de complejidad media y reparto igualatorio 4 es de complejidad alta de tal forma que se siguió fielmente el criterio que se había establecido al empezar a distribuir los problemas para cada sesión. Otra razón por la que se ordenaron así los problemas fue por el algoritmo que resolvía el problema de tal forma que se iban intercalando las operaciones de manera que nunca quedaran dos problemas consecutivos que se resolviesen con el mismo algoritmo. Así mismo, se decidieron estos problemas sin tanta complejidad debido a que se trataba de la primera sesión y, así, darles tiempo para que se adaptasen a la situación.

Tabla 3

Distribución problemas en la sesión 1

SESIÓN 1			
Categoría	**Complejidad**	**Algoritmo**	**Problema**
Cambio 1	Baja	Suma	En un autobús viajan 35 hombres. En una de las paradas se suben 20 niños. ¿Cuántas personas en total viajan en el autobús?
Isomorfismo de medidas 1	Baja	Multiplicación	En un bar se consumen 20 botellas de agua en un día. ¿Cuántas botellas de agua se consumirán al cabo de una semana?
Combinación 2	Media	Resta	En un frutero hay 25 frutas entre peras y manzanas. Si en el frutero hay 12 peras, ¿cuántas manzanas hay en el frutero?
Reparto igualatorio 4	Alta	Resta y resta	María tiene 28 cromos. Samuel tiene menos. María le da cromos a Samuel hasta que los dos se quedan con 25 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Samuel?

En la **sesión 2**, se incorporarían cinco problemas (**Véase Tabla 4. Distribución problemas en la sesión 2)**. El primer problema fue isomorfismo de medidas 3, el segundo fue igualación 5, el tercero fue escala decreciente 2, el cuarto fue cambio 5 y el último fue producto cartesiano. En esta segunda sesión, solo utilizamos problemas de complejidad media (isomorfismo de medidas 3 y escala decreciente 2) y de complejidad alta (igualación 5, cambio 5 y producto cartesiano). La principal razón que explica esta decisión es un problema de distribución, ya que, si los colocábamos de otra manera, habría un día que se quedaría bastante descompensado respecto a las otras dos sesiones. Al igual que en la sesión anterior, se colocaron así los problemas para evitar que dos problemas consecutivos se resolvieran con el mismo algoritmo.

Tabla 4

Distribución problemas en la sesión 2

SESIÓN 2			
Categoría	**Complejidad**	**Algoritmo**	**Problema**
Isomorfismo de medidas 3	Media	División	Un colegio quiere llevar a 400 alumnos de excursión. En un autobús entran 20 personas. ¿Cuántos autobuses necesitan?
Igualación 5	Alta	Suma	Álvaro tiene 12 coches. Si le dieran 5 más, tendría los mismos que su hermano Mario. ¿Cuántos coches tiene Mario?
Escala decreciente 2	Media	División	Miguel tiene 160 € y Víctor tiene 8 veces menos que Miguel. ¿Cuántos euros tiene Víctor?
Cambio 5	Alta	Resta	Daniel fue al parque con algunas canicas. En una partida, gana 15 canicas. Finalmente, Daniel tiene 30 canicas. ¿Cuántas canicas tenía Daniel al principio?
Producto cartesiano 1	Alta	Multiplicación	Un restaurante ofrece en su carta diferentes menús, formados por primeros y segundos platos. Si hay 5 primeros platos y 4 segundos platos, ¿cuántos menús se pueden formar?

En la **sesión 3**, se incluirían cuatro problemas (**Véase Tabla 5. Distribución problemas en la sesión 3**). El primero fue igualación 1, el segundo fue comparación 3, el tercero fue escala creciente 2 y el último fue comparación 5. La razón de ordenar de esta manera los problemas se debe a que igualación 1 es de complejidad baja, comparación 2 es de complejidad media y; escala creciente 2, y comparación 5 son de complejidad alta. Al igual que en las dos sesiones anteriores tuvimos cuidado de que dos problemas seguidos no se resolvieran con el mismo algoritmo.

Tabla 5

Distribución problemas en la sesión 3

SESIÓN 3			
Categoría	**Complejidad**	**Algoritmo**	**Problema**
Igualación 1	Baja	Resta	Claudia tiene 10 bolígrafos y Lucía 15. ¿Cuántos bolígrafos más necesita Claudia para tener el mismo número que Lucía?
Comparación 3	Media	Suma	Marina tiene 10 pelotas. Andrea tiene 5 pelotas más que Marina. ¿Cuántas pelotas tiene Andrea?
Escala creciente 2	Alta	División	Manuela tiene 15 rotuladores. Tiene 5 veces más que Óscar. ¿Cuántos rotuladores tiene Óscar?
Comparación 5	Alta	Resta	Consuelo tiene 45 años. Tiene 32 años más que su hijo Juanjo. ¿Cuántos años tiene Juanjo

Un aspecto que me parece interesante destacar es que, como hemos mencionado anteriormente, había un alumno con un desfase curricular y no sabía multiplicar ni dividir. Como las pruebas se iban a realizar dentro del aula ordinaria en la que se encontraba este alumno, se le adaptaron las tres pruebas a su nivel de tal manera que, en ningún momento, se sintiera desplazado. La adaptación realizada solo consistió en modificar los problemas de estructura multiplicativa, cambiándolos a problemas de estructura aditiva; mientras que los problemas de estructura aditiva originales no se modificaron permitiendo que, en esos casos, tuviera los mismos problemas que el resto de sus compañeros.

En tercer lugar, una vez diseñadas las sesiones y decidido qué problemas tendrían que resolver los alumnos cada día, pasamos a la intervención. Durante el desarrollo de cada una de las sesiones de la intervención, las instrucciones dadas a los alumnos no fueron muchas, pero sí claras y concisas:

1. "En la sesión, vamos a trabajar con una serie de problemas (primera y última sesión, cuatro problemas; y la segunda sesión, cinco)".
2. "Leed con atención y comprendiendo todos los problemas".
3. "El orden en el que hagáis los problemas es irrelevante".
4. "Indicad: datos, operación y solución".

5. “Revisad atentamente lo que habéis hecho”.

Así mismo, señalar que el tiempo máximo que se les dejó fueron 40 minutos en cada sesión y que las dudas se resolverían en función del tipo de cuestión que tuviesen, por ejemplo, si la dificultad estaba relaciona con que no comprenden bien el problema o no entienden algo de la estructura semántica, no se les ayudaba.

Finalmente, teniendo en cuenta los resultados que obtuvieron los alumnos en la última edición del Informe TIMSS, mencionados en el apartado 3.1, y si se aplican a la muestra, obtendríamos que 4 alumnos se encontrarían en el nivel avanzado y el alto, 6 alumnos se situarían en el nivel intermedio y, por último, 6 alumnos se hallarían en el nivel bajo. De esta manera, podemos señalar que los cuatro alumnos que se encuentran en el nivel avanzado y alto son capaces de resolver todos los problemas, los seis que se encuentran en el nivel intermedio resuelven todos los fáciles y algunos de complejidad media, y los seis que se sitúan en el nivel bajo fallan al resolver como mínimo un problema de complejidad baja.

8.4.- Codificación de los datos

El análisis de los resultados obtenidos en la prueba de evaluación desarrollada, ha hecho necesario establecer una serie de criterios. En primer lugar, para poder conocer la prevalencia de las dificultades en la resolución de problemas, se debe definir el concepto de “dificultad” para lo que en este estudio se tendrá en cuenta el curso en el que están escolarizados. Se considerará que tiene dificultades para resolver problemas aquel alumno que no es capaz de resolver correctamente al menos un problema de complejidad semántico-matemático baja.

En segundo lugar, es necesario destacar que, para evaluar la prueba diseñada, se ha establecido una escala del 0 al 3 en la que se tuvieron en cuenta dos aspectos diferentes: la comprensión, es decir, si el algoritmo para resolver el problema estaba bien elegido, y la resolución, es decir, si el algoritmo estaba bien resuelto. Por lo tanto, una buena elección de operación se tomará como indicio de una buena comprensión, especialmente en los problemas de complejidad media y alta. Se establecieron los siguientes ítems:

Tabla 6

Puntuaciones

PUNTUACIÓN	EXPLICACIÓN	
3	Buena comprensión	Algoritmo bien realizado
2	Buena comprensión	Algoritmo mal realizado
1	Buena comprensión	Algoritmos incompletos
0	Mala comprensión	

8.5.- Resultados

8.5.1.- Análisis del rendimiento de los alumnos

Los resultados mostrados en la **Tabla 1 y Tabla 2 (Véase ANEXO 1. Resultados de la prueba de cribado)** se resumen en lo siguiente: en primer lugar, el 31,25% (5 alumnos) resolvieron bien todos los problemas, o solo fallaron uno. En segundo lugar, el 50% (8 alumnos) resolvió bien al menos la mitad de los problemas presentados. Por último, el 18,75% (3 alumnos) fallaron seis o más problemas. Estos resultados parecen algo superiores a los obtenidos por los alumnos españoles en el Informe TIMSS (2019), pues en los tres niveles consideraros, la muestra consigue mejores resultados.

Figura 15

Resultados

Por otro lado, atendiendo a la complejidad de los problemas comprobamos que, solo un 12,5% resuelve todos los problemas de complejidad alta; un 50% realiza correctamente todos los de complejidad media; y un 18,75% falla al resolver al menos uno de complejidad baja. Este último porcentaje está directamente relacionado con el porcentaje de alumnos que fallan seis o más problemas (18,75%) puesto que al equivocarse en tantos problemas se entiende que el nivel en resolución de problemas es muy bajo y se cometen errores también en los problemas de complejidad baja.

Por otra parte, anteriormente se había establecido que un sujeto tendría dificultad en el momento en el que no es capaz de resolver al menos uno de los tres problemas de complejidad semántico-matemático baja (cambio 1, igualación 1 o isomorfismo de medidas 1). El examen de los resultados obtenidos nos lleva a que 3 alumnos del grupo tienen dificultades en la resolución de problemas. Sin embargo, uno de ellos solo falla en la resolución de dos problemas, siendo precisamente uno de ellos de complejidad baja; mientras que los dos restantes resuelven mal más de seis problemas. Por lo tanto, se consideró que realmente estos dos alumnos (12,5%) del grupo son los que tienen dificultades en la resolución de problemas, tal y como hemos señalado en el apartado 8.4 al definir los criterios utilizados para valorar la existencia de dificultades, mientras que en el primer caso parece más un despiste o una mala lectura del problema, que la falta de capacidad para resolverlos.

Finalmente, sería interesante comparar la prevalencia de dificultades en esta aula con la existente en nuestro país. Sin embargo, es complicado realizar esta comparación debido a que no disponemos datos elaborados por el Ministerio de Educación y Formación Profesional sobre la prevalencia de las dificultades en matemáticas. De este modo, una forma de aproximarnos es utilizando el porcentaje de alumnos españoles con dificultades específicas de aprendizaje (DEA), que es un 3,14%; un dato bastante inferior al obtenido en este estudio. Teniendo en cuenta estos datos, podemos concluir que la proporción de alumnos con dificultades en resolución de problemas parece mucho mayor que la de alumnos con discalculia. Sin embargo, hay que tener en cuenta que en el término DEA se incluyen las dificultades en lectoescritura y en matemáticas, por lo que no sería una comparación del todo realista.

8.5.2.- Análisis de las categorías de problemas

Por otro lado, y de forma complementaria, podemos detenernos a analizar cuáles son las categorías en las que más ha fallado este grupo de alumnos. Esta manera alternativa de valorar la prueba nos muestra que, en general, los alumnos presentan más dificultades en los problemas de estructura multiplicativa que en los de estructura aditiva, lo que, en principio, se podría explicar porque están más acostumbrados a resolver problemas de estructura aditiva que de estructura multiplicativa. Sin embargo, si tenemos en cuenta los resultados del estudio realizado por Vicente y Manchado (2018) comprobamos que, normalmente, en los libros de texto existe una mayor presencia de problemas de estructura multiplicativa (43,95%) que de aditiva (35,46%), razón por la cual las dificultades con la estructura multiplicativa parecen radicar en su complejidad, puesto que son conceptualmente más difíciles y hay que tener en cuenta que no todas las operaciones son exactas; en la necesidad de comprender el significado de cada una de las cantidades que se presentan; y en las diferentes capacidades de cada uno de los alumnos. En segundo lugar, también se puede ver que las categorías en las que más han fallado han sido con los escalares, ya sean crecientes o decrecientes, y con la de producto cartesiano. Estas dificultades en el rendimiento a la hora de resolver dichos problemas sí que se puedan explicar por su nivel de aparición en los libros de texto, puesto que los de complejidad alta (producto cartesiano y escala creciente 2) solo aparecen un 5% y los de complejidad media (escala decreciente 2) un 13,92% por lo que los alumnos no están acostumbrados a enfrentarse a este tipo de problemas y, además, al ser más difíciles, es más probable que fallen más.

En definitiva, podemos concluir que la prevalencia de las dificultades en la resolución de problemas aritméticos verbales en un aula de quinto de Educación Primaria es del 12,75% y que la categoría principal en la que los alumnos muestran mayores dificultades es en la de producto cartesiano de estructura multiplicativa.

9.- CONCLUSIONES

El Trabajo de Fin de Grado me ha permitido extraer diversas conclusiones relacionadas, por un lado, con el marco teórico expuesto y, por otro, con la parte aplicada, es decir, con el estudio realizado.

En primer lugar, me parece importante remarcar la relevancia que tiene la resolución de problemas en la vida de los alumnos por tres razones fundamentalmente: permiten un mejor aprendizaje de las operaciones básicas y construir un entorno favorable para desarrollar la capacidad de comprensión del problema, así como para resolver las operaciones; son el elemento principal de conexión entre el lenguaje matemático y el verbal, posibilitando que sean el lugar en el que los alumnos practican la resolución de problemas de la vida cotidiana; y, por último, proporcionan la capacidad de aplicar las matemáticas que se aprenden durante la etapa educativa y generalizarlas al mundo real. Estos motivos nos llevan a destacar la importancia que tiene que un maestro conozca los modelos de resolución existentes y los diferentes tipos de problemas, pues podrá enseñar a sus alumnos que hay diferentes formas de afrontar un problema y que deben escoger aquella que se adapte mejor a su capacidad cognitiva; y, por otro lado, debe explicarles que no todos los problemas son iguales, sino muy diversos, y deben ser capaces de resolverlos todos ellos. También es de gran interés que el profesor conozca los diferentes modelos de intervención, por si se da el caso de que en su aula tenga alumnos con dificultades para resolver correctamente los problemas, puesto que, de esta manera, podrá prevenir esas dificultades y afrontarlas de la mejor manera posible, ayudándole de forma eficaz.

En segundo lugar, respecto al estudio realizado, hay varias cuestiones que considero interesante destacar. La primera de ellas está relacionada con las expectativas puestas en los posibles resultados pues, en un principio, pensaba que los alumnos iban a tener más dificultades en la prueba y prácticamente todos han demostrado tener un buen nivel para la edad que tienen y el curso en el que se encuentran. De acuerdo con los resultados del estudio la prevalencia de las dificultades ha sido del 12,75%, es decir, 2 alumnos de los 16 que forman el grupo estudiado presentan dificultades en la resolución de problemas aritméticos verbales, lo que supone una proporción no muy alta dentro del grupo, pero si generalizamos a todas las aulas de nuestro país, el número de alumnos con dificultades sería muy elevado. Teniendo en cuenta estos datos, se puede determinar que los resultados obtenidos son muy positivos con respecto a lo establecido en la hipótesis inicial, pues en el nivel avanzado y alto se esperaban cuatro alumnos, y en la prueba cinco alumnos se han situado en este nivel; en el nivel bajo, se esperaba que hubiese seis alumnos y en el estudio únicamente solo hay tres. Los mejores datos obtenidos en el nivel bajo se debe a que algunos de alumnos que suponíamos que iban a estar en este nivel han conseguido alcanzar el nivel intermedio, de tal forma que, si en la hipótesis se esperaba que hubiese seis alumnos, en el estudio encontramos ocho alumnos. En segundo lugar, me ha llamado la atención las dificultades que han tenido a la hora de resolver los problemas de estructura multiplicativa, siendo en esta en la que más errores han cometido, en especial, en los problemas escalares y en el producto cartesiano, aunque como hemos visto en el marco teórico, son precisamente en este tipo de problemas en los que los mayores dificultades tienen. En cambio, con la categoría de reparto igualatorio me ha ocurrido lo contrario, se esperaba que tuvieran más dificultades por ser el tipo de problema más complejo y, sin embargo, casi todos han sido capaces de resolverlos correctamente y otros se han quedado a un paso de conseguirlo. En principio, al ser un tipo de problema que no aparece en los libros de texto, deberían haber tenido más dificultades, pero quizá el hecho de utilizar cantidades sencillas y de hacer referencia a situaciones con las que están familiarizados, les han ayudado a superar la dificultad y resolverlo correctamente. A raíz de estas cuestiones, es importante mencionar la importancia que tiene contrastar las creencias propias con evidencias educativas que demuestren su veracidad o falsedad, tal y como se ha hecho en este Trabajo de Fin de Grado.

Por último, me gustaría subrayar que la realización de este Trabajo de Fin de Grado me ha resultado muy interesante pues, no solo me ha permitido profundizar en conocimientos relacionados con la resolución de los problemas matemáticos, sino que también me ha permitido poner en práctica gran parte de los conocimientos adquiridos a lo largo de mi formación universitaria. El trabajo realizado me ha dado la oportunidad de diseñar una prueba de evaluación de resolución de problemas para alumnos del penúltimo curso de Educación Primaria, ponerlo en práctica en el aula y, finalmente, establecer los criterios más adecuados para valorar los resultados de la prueba. De esta manera, considero que con la elaboración de este Trabajo de Fin de Grado se pone fin a mi etapa universitaria de forma satisfactoria.

10.- REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aguilar, M., Aragón, E., y Navarro, J.I. (2015). Las dificultades de aprendizaje de las matemáticas (DAM). Estado del arte. *Revista de Psicología y Educación, 10(2),13-42.* https://www.revistadepsicologiayeducacion.es/pdf/125.pdf

DECRETO 26/2016, de 21 de julio, por el que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León. BOCYL. Núm. 142, de 25 de julio de 2016.

Hibert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K.B., Hollingsworth,H., Jacobs, J:, … Stigler, P. (2003). *Teaching mathematics in seven countries. Results from the TIMSS 1999 video study.* Washington, DC: National Center for Education Statistics (NCES).

Jiménez, J. E., y Crespo, P. (2019). *Modelo de respuesta a la intervención: definición y principales componentes*. Ediciones Pirámide.

Martínez, J., y Sánchez, C. (2013). *Resolución de problemas y método ABN* (1ª ed). Wolters Kluwer España.

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2020). *TIMSS 2019 Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencia*. https://www.educacionyfp.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/timss/timss-2019.html

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2021). *ENSEÑANZAS NO UNIVERSITARIAS / NECESIDADES DE APOYO EDUCATIVO / CURSO 2020-2021.* http://estadisticas.mecd.gob.es/EducaJaxiPx/Datos.htm?path=/no-universitaria/alumnado/apoyo/2020-2021/otros//l0/&file=otros_09.px&type=pcaxis

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2021). *ENSEÑANZAS NO UNIVERSITARIAS / ALUMNADO MATRICULADO / CURSO 2020-2021*. http://estadisticas.mecd.gob.es/EducaJaxiPx/Datos.htm?path=/no-universitaria/alumnado/matriculado/2020-2021-rd/gen-primaria//l0/&file=primaria_01.px&type=pcaxis

Mullis, I., Martin, M., y Foy, P. (2008). *TIMSS and PIRLS international mathematics report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the fourth and eight grade*. Chesnut Hill, MA: TIMSS and PIRLS International Study Center, Boston College. http://pirls.bc.edu/timss2007/mathreport.html

Orrantia, J. (2019). *Tema 3. Dificultades en el aprendizaje de la aritmética* [Manuscrito no publicado]. Universidad de Salamanca.

Riley, M.S., y Greeno, J.G. (1998). Developmental analysis of understanding language about quantities of solving problems. *Cognition & Construction,* 5, 49-101.

Santiago Vicente, Javier Rosales, José M. Chamoso & David Múñez (2013). Análisis de la práctica educativa en clases de matemáticas españolas de Educación Primaria: una posible explicación para el nivel de competencia de los alumnos. *Cultura y Educación, 25* (4) 535-548, https://doi.org/10.1174/113564013808906799

Tárraga-Mínguez, R., y Tarín-Ibañez, J. (2022). Problemas aritméticos verbales en Educación Primaria. Un análisis de guías didácticas. *Revista de Educación, 396.* Abril-Junio 2022, pp. 235-259. https://redined.educacion.gob.es/xmlui/handle/11162/222203

Van Dooren, W., Verschaffel, L., Greer, B., y De Bock, D. (2006). Modelling for Life: Developing Adaptive Expertise in Matemathical Modelling From an Early Age. Ed. Verschaffel, L., Dochy, F., Boekaerts, M., y Vosniadou, S. *Instructional Psychology: Past, Present and Future Trends* (pp. 91- 109). Elsevier Ltd.

Verschaffel, L., Depaepe, F., y Van Dooren, W. (2014). *Word problems in mathematics education*. En S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of mathematics education (pp. 641-645). Dordreccht: Springer.

Verschaffel, L., Greer, B., y De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse: Swets & Zeitlinger Publishers.

Vicente, S. (2020). *Resolución de problemas aritméticos verbales* [Manuscrito no publicado]. Universidad de Salamanca.

Vicente, S., Manchado, E., y Verschaffel, L. (2018). Solving arithmetic word problems. An analysis of Spanish textbooks / Resolución de problemas aritméticos verbales.

Un análisis de los libros de texto españoles. *Cultura y Educación*, *30*(1), 71-104. https://doi.org/10.1080/11356405.2017.1421606

11.- ANEXOS

ANEXO 1. Resultados de la prueba de cribado 55

ANEXO 1. Resultados de la prueba de cribado

Tabla 1

Resultados de los problemas de estructura aditiva

				ESTRUCTURA ADITIVA				
Sujeto	**Cambio 1**	**Cambio 5**	**Combinación 2**	**Comparación 3**	**Comparación 5**	**Igualación 1**	**Igualación 5**	**Reparto igualatorio 4**
1	3	3	3	3	3	0	0	1
2	3	3	3	3	3	3	3	1
3	3	3	2	3	3	3	3	3
4	3	3	3	3	3	3	3	3
5	3	0	3	3	3	3	3	3
6	3	3	3	3	3	3	3	3
7	3	3	3	3	3	3	3	3
8	3	3	3	3	3	3	3	3
9	3	3	3	3	3	3	3	0
10	3	3	3	3	3	3	3	3
11	3	3	3	3	3	3	3	3
12	3	3	3	3	3	3	3	0
13	0	0	3	3	3	3	3	3
14	3	0	0	3	0	0	3	1
15	3	3	3	3	3	3	3	3
16	3	0	3	3	3	3	3	0

Tabla 2

Resultados de los problemas de estructura multiplicativa

		ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA			
Sujeto	**Isomorfismo de medidas 1**	**Isomorfismo de medidas 3**	**Escala creciente 2**	**Escala decreciente 2**	**Producto cartesiano 1**
1	0	3	0	0	0
2	**3**	**3**	**3**	**3**	0
3	**3**	**3**	**3**	**3**	0
4	**3**	**3**	**0**	**3**	0
5	**3**	**3**	**3**	**3**	0
6	**3**	**3**	**3**	**3**	3
7	**3**	**3**	**3**	**0**	0
8	**3**	**3**	**0**	**0**	0
9	**3**	**0**	**0**	**0**	0
10	**3**	**3**	**3**	**3**	0
11	**3**	**3**	**3**	**3**	0
12	**3**	**3**	**3**	**0**	0
13	**3**	**3**	**3**	**3**	3
14	**0**	**2**	**0**	**0**	0
15	**3**	**2**	**0**	**3**	0
16	**3**	**0**	**0**	**0**	0