NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 113, marzo de 2023, páginas 81-93

Tareas con GeoGebra en el aula universitaria. Matematización horizontal y vertical

Betina Williner
Adriana Favieri
(Universidad Nacional de La Matanza. Argentina)

Fecha de recepción: 7 de diciembre de 2022
Fecha de aceptación: 1 de febrero de 2023

Resumen

Este artículo forma parte de una investigación que analiza, por un lado, qué tipo de tareas diseñar con GeoGebra para lograr que el alumno lo utilice sin depender de la guía del profesor. Por el otro, estudia diferentes niveles de matematizaciones que evidencian los estudiantes en las tareas diseñadas con el objetivo de establecer tipologías. Presentamos una tarea implementada, su diseño y los resultados obtenidos. A su vez completamos el estudio con las valoraciones subjetivas de los estudiantes sobre el uso del software. Estos análisis nos permitieron constatar que la mayoría de los alumnos realiza una matematización con el software mejor que con lápiz y papel y tienen inconvenientes en lograr una justificación analítica de lo que conjeturan. A su vez valoran positivamente poder observar en el software diferentes situaciones antes de justificarlas o resolverlas.

Palabras clave GeoGebra, Tareas, Matematización, Valoración, Cálculo

Abstract

This article is part of a research that analyzes, on the one hand, what kind of tasks to design with GeoGebra so that the student can use it independently without depending on the teacher's guide. On the other hand, for the purpose of establishing student typologies, examine different levels of mathematizations that students display in the tasks. We present an implemented task, its design and the results obtained. Moreover, we conducted a subjective assessment of the students' perceptions of GeoGebra's use. These analyses allowed us to verify that most teams perform better mathematizations with the software than with pencil and paper and have difficulty justifying their conclusions analytically. Observing situations in the software before justifying or solving them is highly valued by the students.

Keywords GeoGebra, Tasks, Mathematization, Assessment, Calculus

1. Introducción

Hace varios años la incorporación de tecnología en el aula fue uno de los cuestionamientos imperantes en la Educación Matemática. Hoy no dudamos de que es esencial en el proceso de enseñanza aprendizaje. Múltiples estudios dieron y dan cuenta de las ventajas que produce su inclusión cuando se implementa con objetivos claros y una planificación adecuada. En esta oportunidad nos centramos en el uso específico del software GeoGebra (GG) en el aula universitaria, más precisamente en las tareas que se pueden implementar y en las acciones que efectúa el alumno cuando las resuelve.

MUNDO GEOGEBRA
Coordinador: Carlos Ueno

Respecto a las tareas, Barahona et al. (2015) realizaron un estudio de carácter cuantitativo para establecer si existe relación entre el uso (o no) de GG con el rendimiento académico de los estudiantes de ingeniería en industrias pecuarias. Se desarrollaron contenidos académicos formativos con y sin el apoyo del software. Los autores muestran dos actividades propuestas: la primera tiene como objetivo que el alumno comprenda la definición de máximo relativo y la segunda trata sobre la aplicación de la integral definida en el momento de inercia. En ambos casos el recurso está realizado por los docentes. El alumno tiene que mover algún deslizador o cambiar la función y dar respuesta a los interrogantes pedidos. Los resultados de la investigación evidenciaron que el apoyo del software GG mejoró los niveles de aprendizaje de los estudiantes.

Por otro lado, García Cuéllar et al. (2018) reportan parte de una investigación que tuvo como objetivo analizar la génesis instrumental de la noción de razón de cambio instantánea mediada por GG en estudiantes de administración de los primeros años de una universidad de Perú. Para esto diseñaron dos actividades en Applet en GG basados en deslizadores. En la primera el estudiante tiene que manipular un deslizador que acerca un punto B de una curva a un punto A fijo. Se observa la recta secante, los puntos y la pendiente de ésta. En lápiz y papel tiene que ir completando una tabla con los valores de la pendiente y contestar preguntas sobre la tendencia de dicho cociente incremental. En la segunda actividad se muestra una función que modela la utilidad de una empresa en el tiempo y un punto de esta curva con su recta tangente y pendiente que se mueve a través de un deslizador. Se hacen preguntas sobre el aumento o disminución de la utilidad de la empresa.

González et al. (2018) realizaron actividades para favorecer la comprensión de la función derivada tomando en cuenta aspectos de la teoría de registros de representación semiótica, con el apoyo del software GG. Los autores exponen dos actividades. La primera consiste en estudiar el volumen de agua que hay en un tanque que se está llenando a velocidad constante y a su vez vaciando también con velocidad constante. Mediante acciones guiadas para realizar en GG (“defina la función”, “marque puntos de la gráfica para que quede visualizada la variación media”, “use el comando pendiente de la recta”) la actividad tiene como objetivo que los estudiantes perciban la tasa de variación de la función volumen respecto al tiempo transcurrido y la relacionen con la pendiente de la recta planteada. La segunda actividad trata sobre el movimiento de una moto modelado mediante una función homográfica. A través de acciones similares a la primera actividad indican al alumno graficar en GG la variación media en un intervalo determinado a través de un punto fijo y uno variable. También utilizan el comando pendiente para relacionar este concepto con el anterior y acercan el punto variable al fijo para estudiar el comportamiento. Tiene como propósito que los estudiantes construyan la recta tangente a la gráfica de la función en el punto fijo seleccionado y la identifiquen como la tasa de variación instantánea.

Podríamos seguir describiendo diferentes actividades o tareas encontradas en numerosos artículos. Lo que observamos de todos estos estudios es que el alumno usa algún applet diseñado por el docente o contesta preguntas en donde se le indica qué acciones hacer con el programa.

Dadas las potencialidades que tiene GG nos preguntamos si, luego de que el estudiante realiza tareas con las características descriptas anteriormente, es capaz de efectuar otro tipo de manipulación con el software. Los recursos mencionados son muy valiosos y se obtienen buenos resultados de aprendizaje cuando se utilizan. Nuestra inquietud es ¿qué tipo de tareas diseñar para que el alumno gradualmente incorpore el software a su actividad matemática sin necesidad de realizar los pasos que le indica el profesor? Procuramos que el estudiante ante un problema, ejercicio o concepto teórico, por sí mismo (sin una guía del profesor) realice acciones con GG que le permitan resolver ese ejercicio o poder comprender mejor ese concepto. Esto es, que integre el uso del GG a su actividad matemática como lo hace con la calculadora. Es un gran desafío, ya que por un lado tenemos que introducir al alumno en el uso de GG a través de recursos diseñados para que lo comience a incorporar como herramienta de trabajo y luego tratar, de cierta manera, que ese uso se haga cotidiano y que vaya más allá de graficar.

Somos docentes de Análisis Matemático I de carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza, Argentina. Con este planteamiento comenzamos una investigación en la que diseñamos tareas que clasificamos acorde al grado de interacción del alumno con el software.

A su vez, a la hora de analizar las acciones llevadas a cabo por los estudiantes, utilizamos las tipologías que establece Costa (2011) que especificamos en el marco teórico.

Presentamos en este artículo parte de la primera etapa de la investigación: una descripción de una de las tareas diseñadas con el uso de GG y los resultados obtenidos.

2. Marco Teórico

GG es uno de los softwares de Geometría Dinámica más difundido en las últimas dos décadas como herramienta auxiliar para la enseñanza de la matemática, con la ventaja de ser de código abierto y adaptable a todos los niveles educativos (Campos Nava y Torres Rodríguez, 2018). Incluye geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo con la posibilidad de incorporar actividades dinámicas. Su interfaz es de fácil uso y cuenta con poderosas herramientas. Ofrece a los docentes la oportunidad de crear materiales de aprendizaje interactivos como páginas web o applets, por lo que se convierte en una herramienta de autoría.

GG no es solamente un software libre, se ha convertido en una comunidad con millones de usuarios en casi todos los países del mundo en la que comparten sus recursos y experiencias en apoyo a la educación en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas. Esto contribuye a la innovación en la enseñanza y aprendizaje en casi todas las latitudes (GeoGebra, 2020).

Además, GG brinda una serie de aplicaciones para usar en el celular que son gratuitas y disponibles para iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook y Linux, lo que asegura la utilización en diversos dispositivos.

Existen varios estudios que incorporan el uso de GG en las clases de matemática, algunos citados en la introducción del presente artículo. Entre ellos: Barahona et al (2015); Campillo, et al. (2021); Fiallo y Parada (2014); García Cuéllar et al. (2018); Garelik y Montenegro (2015); Pabón et al. (2015); Ruiz et al. (2018); Saucedo et al. (2014). Si bien estos trabajos se diferencian en varios aspectos (marco teórico, objetivos, metodología, etc.), podemos sintetizar algunas conclusiones en común. Uno de ellos es la motivación y participación que se logra tanto en el alumno como en el docente cuando usa este tipo de recursos. A su vez la utilización de este tipo de software agrega la posibilidad de trabajar en distintos registros de representación al mismo tiempo, construir gráficos y representaciones con un carácter dinámico permitiendo, de esta manera, una mejor visualización de las situaciones propuestas.

En cuanto al diseño de tareas, varios de los autores citados coinciden en que existe una fase de exploración en la que predomina la habilidad visual y manipulativa y el alumno puede realizar conjeturas. Luego se pasa a una fase de formalización o institucionalización de los contenidos y acá es primordial la presencia del docente. A su vez Muñoz Escolano (2016) sintetiza las conclusiones del Seminario sobre enseñar matemática con GG que organizó el Centro Internacional de Encuentros Matemáticos (CIEM) en 2015. Entre ellas se recomienda que las tareas tengan dos momentos: un primer momento exploratorio para favorecer la comprensión de la tarea y la aplicación eficaz de la técnica; y un momento posterior que consista en la resolución con lápiz y papel para favorecer la consolidación de lo realizado y los procesos de instrumentalización.

Costa (2011) pudo establecer tipologías sobre las acciones de los alumnos cuando trabajan con tareas con GG. El autor diseñó y puso a prueba una secuencia de siete actividades de Geometría Analítica para inducir a los alumnos a la "matematización" con acciones en lápiz y papel y en el entorno del software GG. Se define como matematización horizontal a la acción en la cual los estudiantes utilizan herramientas matemáticas que los ayudan a organizar y resolver un problema en el contexto de una situación realista. Implica transitar desde las situaciones en contextos hasta la simbología matemática. Esta matematización la divide según surja de la manipulación con el software GG (a la que denotamos MHG) o en entorno de lápiz y papel (cuyas siglas establecimos MHE). La matematización vertical (MV) es aquella en la cual los alumnos descubren conexiones entre conceptos y estrategias y aplican estos descubrimientos. Implica procesos de abstracción y generalización.

El estudio fue cuantitativo y cualitativo. Del análisis del desarrollo de estas actividades y la respuesta a cuestionarios por parte de los 19 alumnos que intervinieron en la experiencia, se pudieron establecer las siguientes tipologías o categorías:

- Matematizadores completos: pueden contemplar las situaciones en sus aspectos matemáticos concretos y también pueden generalizar. Resuelven mediante GG las situaciones concretas que plantean las actividades y expresan correctamente por escrito los cálculos que conducen hacia las soluciones. A partir de situaciones concretas que resolvieron o estudiaron con ayuda del software, escriben expresiones algebraicas generales.
- Matematizadores horizontales: resuelven mediante GG y lo expresan por escrito, ambas cosas con altas consecuciones, pero obtienen un logro mucho más discreto en la generalización. Se mueven con comodidad dentro de situaciones concretas, pero les cuesta el movimiento vertical hacia las generalizaciones.
- Matematizadores tecnológicos: resuelven con alta consecución mediante GG, pero presentan un rendimiento significativamente más bajo cuando expresan por escrito, algebraicamente, los resultados. Y todavía tienen mayores dificultades para generalizar. Se mueven con comodidad en un entorno visual y manipulativo, pero no muestran igual desenvoltura por escrito.
- Matematizadores débiles: obtienen resultados bajos o discretos en todos los tipos de matematización. Ni siquiera en un entorno visual, manipulativo e interactivo matematizan con cierta desenvoltura.

3. Metodología

En la primera etapa de la investigación elaboramos tareas matemáticas con GG teniendo en cuenta el marco teórico. A su vez consideramos el propósito inicial de la investigación: tratar de lograr paulatinamente mayor independencia del alumno sobre el uso del software. En cada tarea establecimos:

- Objetivos. Decidimos si la tarea se usaría para introducir conceptos, presentar comandos o ejemplos de diversas situaciones, inferir relaciones entre objetos matemáticos, descubrir propiedades, entre otros.
- Interacción del alumno con GG. Esta interacción puede ser nula cuando, por ejemplo, el profesor utiliza la computadora y comparte con los alumnos lo que hace, hasta interacción con o sin guía del docente. El estudio de este aspecto nos brinda niveles de MHG.

- Acciones en lápiz y papel o pizarrón. Luego del momento exploratorio con el software es preciso realizar la justificación y fundamentación analítica ya sea en entorno de lápiz y papel o en el pizarrón. El estudio de este aspecto nos brinda niveles de MHE o MV.

Como resultado de esta etapa pudimos diseñar tipos de tareas con un orden creciente de interacción del alumno con el software y las fuimos implementando paulatinamente en la programación de la materia. Algunas implicaron solo acciones del docente usando su computadora y televisor disponible en el aula, con lo cual la interacción del alumno con el software es nula. Otras se basaron en acciones guiadas o algún applet tal como las descriptas en la introducción del presente artículo. Por último, elaboramos tareas en las que no indicamos los pasos a seguir con GG.

En la segunda etapa implementamos estos tipos de tareas en una de las comisiones de la asignatura y las analizamos. Presentamos en este artículo un ejemplo del último tipo de tarea explicitado y los resultados obtenidos.

3.1. Tarea sobre asíntotas a una curva. Enunciado y justificación

Luego de estudiar las unidades de funciones y límites brindamos a los alumnos la siguiente tarea que debían completar a través de un formulario Google Drive. Cabe destacar que en el aula habíamos realizado tareas sin interacción y con interacción guiada. Los estudiantes conocían herramientas como deslizador y comandos como Asíntota.

El enunciado de la tarea fue:

Estudiar las asíntotas de $f(x) = \frac{x^3}{x^2-a} + 1$ siendo $a \in R$, si $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$

Pregunta 1: ¿Qué harían en GG para entender el problema y tratar de resolverlo? (No hay que resolverlo, sólo explicar qué harían)

Actividad 1: Explorar en GG y subir una imagen de la función y sus asíntotas para a = 4, a = 0 y a = - 4. Contar los comandos que usaron y lo que hicieron en GG.

Actividad 2: En lápiz y papel indicar las conclusiones a las que arribaron y su justificación. Subir tres archivos con lo realizado en forma prolija y legible: uno para el caso a > 0, otro para el caso a = 0 y otro para a < 0.

Pregunta 2: ¿Tuvieron dificultades para la justificación analítica? Explicar cuáles.

Pregunta 3: ¿Les parece más sencillo de resolver si primero usan GG? Justificar la respuesta.

Figura 1. Consigna de la tarea brindada a los alumnos

Para el diseño tuvimos en cuenta las recomendaciones expuestas en el marco teórico:

1. Fase de información y exploración libre: al inicio de la actividad (pregunta 1) planteamos el problema para que el estudiante piense qué acciones haría con el software para comprender la situación. En esta fase los alumnos tenían que contestar sobre los comandos y acciones que podían realizar con GG para resolver el problema. En esta etapa analizamos la MHG.

2. Fase de exploración dirigida: la orientación está guiada en esta tarea por casos particulares del problema planteado (actividad 1) para que el estudiante, usando las diferentes herramientas del software, vaya encontrando respuestas al problema y plantee conjeturas respecto a las ecuaciones de las asíntotas a la función dada para los tres casos. En esta etapa estudiamos la MHG y la MHE.
3. Fase de explicitación: solicitamos la justificación formal (actividad 2), en entorno de lápiz y papel, de los resultados visualizados en las diferentes representaciones que ofrece el software: gráfica, algebraica y hoja de cálculo. En esta etapa analizamos la MV.

Agregamos dos preguntas para conocer la opinión de los estudiantes sobre el uso de GG en esta tarea.

4. Análisis de la tarea

Una vez entregada la consigna los estudiantes tuvieron una semana para resolverla. Fue realizada por 20 equipos de tres o cuatro integrantes cada uno.

Dividimos el análisis de los resultados en tres partes: en la primera estudiamos las respuestas y producciones en GG (MHG), en la segunda la justificación en lápiz y papel (MHE o MV) y, finalmente en la tercera, la valoración del software realizada por los alumnos.

A su vez, en todos los casos, realizamos una descripción general y luego mostramos ejemplos de diferentes tipos de respuestas.

4.1. Producciones en GG

Pregunta 1: ¿Qué harían para entender el problema y tratar de resolverlo? (no hay que resolverlo, sólo decir qué harían).

La mayoría de los grupos mencionaron el uso de un deslizador. Fueron 12 los equipos que indicaron definirlo y dos los que explicaron que cuando entraron la función con el parámetro en GG, en forma automática, establece un deslizador. En ambos casos manifestaron que de esta forma pudieron deducir qué pasaba para los distintos valores de “a” sobre las características de la función y sus asíntotas. Tres de los grupos expuso, en esta pregunta, las conclusiones respecto a las asíntotas que fueron observando (en dos casos justificaron con alguna explicación sobre el límite de variable infinita). En estos casos ya se produce un proceso de MV. Cinco fueron los grupos que contestaron que reemplazarían “a” por los tres valores pedidos. Un equipo no contestó esta pregunta.

Si bien las respuestas corresponden a una MHG, reflejan un uso diferente del programa: un nivel, que podríamos llamar inicial, en el que los estudiantes graficaron una función por cada caso y, aparentemente, con un solo valor de “a” para cada posibilidad, extrajeron las conclusiones. Otro nivel más avanzado donde escribieron en GG la función con el parámetro y se dieron cuenta de que el programa ya les definía automáticamente el deslizador. Es muy probable que no hayan tenido la intención inicial de trabajar con deslizador, pero el software se lo propuso. En un nivel más avanzado en el cual no sólo definieron el deslizador previo a la entrada de la función, sino que escribieron qué conclusiones pudieron sacar (aunque en este punto no se pedían) para cada caso.

Brindamos ejemplos de las tres categorías mencionadas anteriormente:

Graficaríamos 3 veces F(x) y cambiaríamos el valor de A en cada una, luego observamos las asíntotas de cada función. En la primera A sería mayor que 0.

Para entender el problema en GeoGebra primero introducimos la función tal cual se nos presenta, luego al darle a la tecla de Enter el propio sistema nos agrega un desplazador correspondiente a "a", el cual podemos ir desplazando para ver como varía la función a medida que vamos cambiando el valor de "a" y de esta manera poder analizar como que esta misma cuando "a" es menor a cero, cuando es igual y cuando es mayor.

Para entender el problema con GeoGebra y tratar de resolverlo empezaríamos creando un deslizador llamado ''a'' con un mínimo = -5 y un máximo = 5. Luego, plantearíamos la función dada con dicho "a" en el denominador, de modo que, al variar "a" con el deslizador podamos apreciar el comportamiento de la gráfica cuando a<0, a=0 y a>0 y así darnos una idea de qué tipo de asíntotas tiene en función del valor de "a".

Actividad 1: Subir una imagen de lo obtenido para a = 4, a = 0, a = -4. Contar los comandos que usaron y lo que hicieron en GeoGebra.

En cuanto a los comandos utilizados más mencionados fueron deslizador y Asíntota. Luego hay variantes de cómo los usaron. Fueron ocho los equipos que manualmente insertaron las funciones con los tres valores de “a” para subir cada imagen y el comando asíntota para graficarlas y hallar sus ecuaciones. Fueron ocho los equipos que explicaron que movieron el deslizador en los valores pedidos para observar lo que pasaba en cada uno de esos casos y subir las imágenes solicitadas usando el comando Asíntota.

Un equipo insertó manualmente cada caso y supuestamente calculó las ecuaciones de las asíntotas ya que no se evidencia comando alguno en las producciones.

Fueron tres los equipos que subieron cada imagen mostrando sólo la función para cada valor del parámetro sin las asíntotas correspondientes.

Mostramos tres imágenes que diferentes equipos dieron como respuesta a esta actividad. En la primera (figura 2) el equipo sólo mostró la gráfica de la función y de su asíntota oblicua para el valor de a = -4, sin tener en cuenta el desplazamiento vertical causado por la constante +1 final que aparece en la expresión y sin ninguna aclaración sobre los comandos usados.

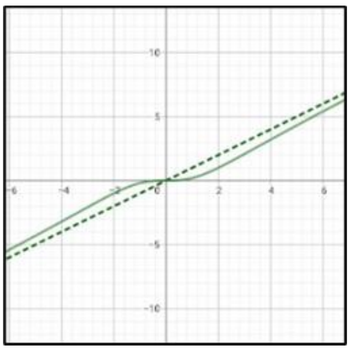

Figura 2. Producción de uno de los equipos (Caso a<0)

En la figura 3 mostramos la producción de un equipo que indicó la expresión analítica de la función, la ecuación de su asíntota oblicua en formato texto y dejaron el deslizador en evidencia:

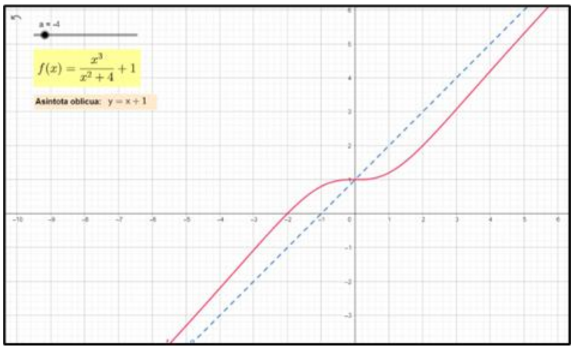

Figura 3. Producción de uno de los equipos (Caso a<0)

En la próxima imagen (figura 4) observamos el deslizador (posicionado en el valor pedido), la expresión analítica genérica y luego para ese valor y el comando asíntota. No hay texto en el gráfico.

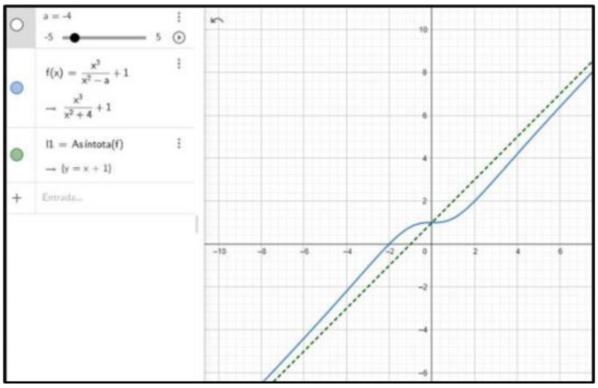

Figura 4. Producción de uno de los equipos (caso a<0)

Ejemplos de respuestas:

En GeoGebra graficamos cada condición por separado y no utilizamos comandos específicos, ya que no sabíamos cómo utilizarlos de manera idónea. Empezamos graficando la función para a = 4 y le sacamos, tanto su asíntota vertical como la oblicua (con sus respectivas fórmulas de limite infinito), para a = 0 observamos que es igual a la asíntota oblicua, por lo tanto, se superpone a la misma, mientras que en a = -4 la graficamos y observamos su comportamiento.

En este caso utilizamos el comando "Asíntota", para que nos indique la ecuación y posición de la misma. También hicimos uso del 'deslizador', para ver los valores que tomaba "a", y como cambiaba la función según estos.

Como resumen de estos dos puntos en los que los estudiantes trabajaron con el entorno visual de GG, pudimos establecer diferentes niveles de MHG. A saber:

- Un nivel inicial en que observamos en las imágenes el gráfico de las tres funciones (una para cada valor del parámetro) sin las asíntotas ni sus ecuaciones.
- Otro nivel en el que en las imágenes observamos el gráfico de cada una de las tres funciones (sin deslizador) y las ecuaciones de sus asíntotas sin utilizar el comando correspondiente.
- Uno más avanzado en el que en las imágenes vemos el gráfico de las tres funciones (no se ve el deslizador ni el grupo indica que lo usó) y sus asíntotas con el comando correspondiente.
- En el último pudimos advertir definido el deslizador, la función con su parámetro, el comando Asíntota y el valor del deslizador detenido en los tres casos pedidos.

4.2. Producciones en lápiz y papel

Este análisis corresponde a la actividad 2:

Actividad 2: en lápiz y papel indicar las conclusiones a las que arribaron y su justificación. Subir tres archivos con lo realizado en forma prolija y legible: uno para el caso a > 0, otro para el caso a = 0 y otro para a < 0.

Fueron cinco los equipos que no realizaron ninguna de las tres justificaciones analíticas bien, ni siquiera para valores particulares del parámetro “a”. Fueron tres los grupos que brindaron las ecuaciones de las asíntotas verticales y oblicua para a = 4 justificándolas a través del límite correspondiente, respondieron que en el caso de a = 0 coincidía la función con su asíntota oblicua (salvo para x = 0) y también dedujeron la asíntota oblicua para a = -4. Ejemplo de esto es la producción se encuentra en la figura que sigue:

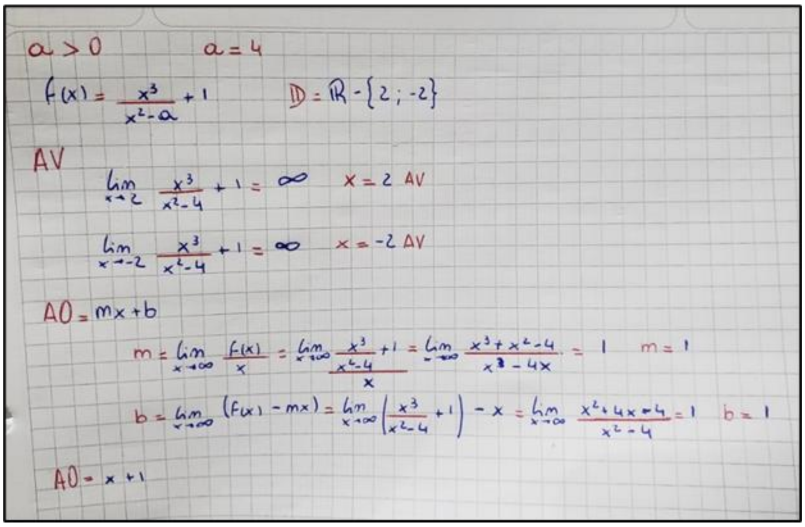

Figura 5. Justificación analítica de uno de los equipos

Fueron cuatro los equipos que justificaron en forma correcta y genérica dos de los casos pedidos: o positivo y cero o negativo y cero. Fueron ocho los grupos que realizaron una deducción genérica bien en los tres casos. Mostramos una de esas producciones en la figura 6 (observamos algunos errores de menor importancia como, por ejemplo, las ecuaciones de las asíntotas verticales).

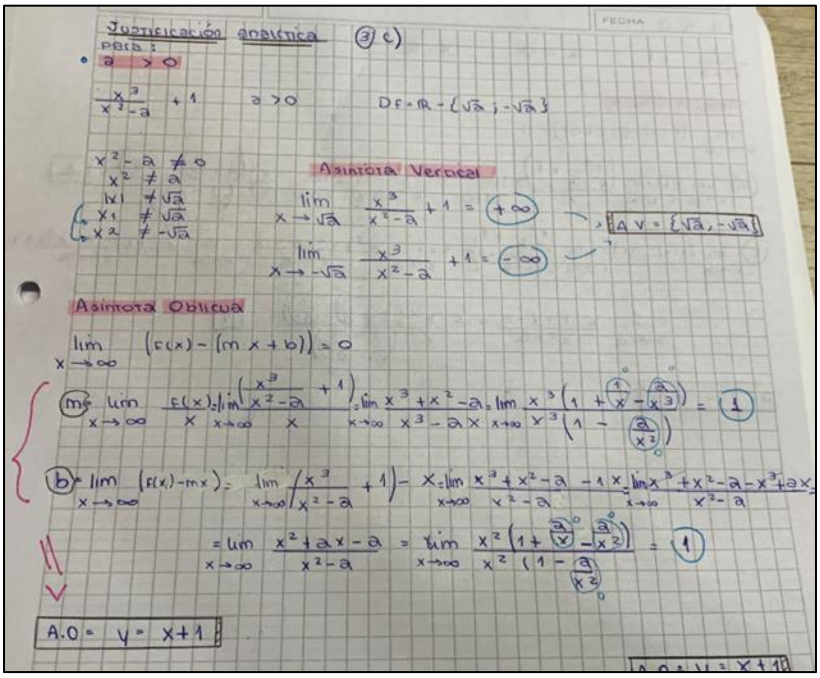

Figura 6. Justificación analítica de uno de los equipos

Entonces, en cuanto a las justificaciones analíticas sobre las ecuaciones de las asíntotas que tiene cada uno de los casos definidos por el parámetro (a>0, a=0, a<0), pudimos establecer niveles de MHE y de MV:

- No realizan MHE ni MV: el grupo no hace bien ninguna de las justificaciones solicitadas.
- Una MHE en la que el grupo justifica bien para el valor del parámetro concreto a = 4 o a = -4 o justifica bien para los tres valores concretos: a = 4, a = -4 y a = 0.
- Una MV no completa, en donde se justifica en forma genérica el resultado obtenido, pero no todos los casos del parámetro. Esto es sólo para el parámetro positivo o sólo para el negativo.
- Una MV completa en la que el grupo justifica en forma genérica y bien todas las ecuaciones de las asíntotas.

4.3. Preguntas de valoración del software GG

Pregunta 2: ¿Tuvieron dificultades para la justificación analítica? Explicar cuáles.

Algunos equipos (seis en total) mencionaron en forma explícita que la dificultad fue la generalización, es decir, pensar el comportamiento de la función para cualquier valor de “a” en cada uno de los rangos determinados. Otros equipos no escribieron dicha palabra, pero dieron a entender que fue ese el obstáculo con expresiones como: “no estamos familiarizados con la expresión analítica”, “las dificultades surgieron cuando a>0 y a<0” y otro “la dificultad fue para x > a porque nos confundimos con la raíz cuadrada.” Suponemos que quisieron poner el caso de a > 0, ya que las asíntotas verticales se encontraban para $x = \sqrt{a}$ $x = -\sqrt{a}$. Fueron seis los equipos que mencionaron no haber tenido problemas para la justificación.

Pregunta 3: ¿Les parece más sencillo de resolver si primero usan GG? Justificar la respuesta.

Una amplia mayoría de los equipos (19 de 20) responde que sí, que es más simple primero observar la situación en GG y luego realizar la justificación analítica. Algunos fueron más explícitos e indicaron que GG les ayudó a ver cuáles eran las asíntotas a la curva, las intersecciones con los ejes y cómo estos elementos iban cambiando a medida que cambiaba "a" y, a partir de esto, hacer la justificación correspondiente. Varios indicaron que esa visualización les permitió saber si lo que hacían analíticamente era correcto.

Mostramos dos respuestas:

No sentimos diferencia alguna, ya que de todas maneras tenes que recurrir a las ecuaciones para justificar lo que estás haciendo. La única ventaja que puede tener resolviendo primero en GeoGebra es que ya te da el valor de las asíntotas, o directamente si es que existen, por lo que si en las ecuaciones te da alguna asíntota que no aparece en GeoGebra se puede deducir que está mal hecha la ecuación.

Si, ya que la aplicación nos permite guiarnos para averiguar la ecuación de una asíntota, o para ver más claro donde corta la función a los ejes, si es que los corta, por ejemplo. Nos ayuda al mostrarnos cuales son los valores que nos deberían dar nuestros cálculos, y así sabemos de antemano si nuestras cuentas son correctas o no.

5.Resultados

Haciendo un paralelismo con lo establecido por Costa (2011) surgen, en forma emergente ya que es sólo una tarea la que analizamos, categorías similares. Cabe recordar que, en nuestro caso, los alumnos trabajaron en equipos de 3 o 4 integrantes.

- *Matematizadores completos*: Esta tipología está formada, en nuestro caso, por los equipos que evidenciaron una MHG en el último nivel y una MV completa. Queda por continuar el estudio para observar el comportamiento de los cuatro grupos que realizaron una buena MHG y que sólo pudieron generalizar uno de los casos del parámetro.
- *Matematizadores horizontales*: En nuestro caso correspondería a los grupos que realizaron una buena MHG y que justificaron analíticamente para valores concretos del parámetro.
- *Matematizadores tecnológicos*: En este caso tenemos tres equipos que realizaron una buena MHG y que no efectuaron ningún tipo de justificación analítica.
- *Matematizadores débiles*: En nuestro estudio correspondería a los dos niveles más bajos de MHG.

6. Reflexiones finales

Sobre las respuestas a la tarea mostrada y los niveles de matematización

Este tipo de tareas en las que el nivel de interacción de los alumnos con el software es alto, ya que son ellos los que tienen que decidir qué hacer para resolverlas, invitan a la manipulación con GG. Si bien no sabemos cómo se organizó cada equipo, en la mayoría de las producciones se evidenció trabajo e intentos de resolución. Algunos grupos estudiaron valores concretos de parámetros y otros en forma más general.

De acuerdo con el desempeño en GG o lápiz y papel pudimos establecer distintos niveles de matematización horizontal y de matematización vertical. La combinación de estos niveles nos permitió llegar a categorías similares a la que establece Costa (2011), salvo tres equipos que tuvieron una matematización horizontal alta en el entorno visual y media en cuanto a la matematización vertical. También observamos que la mayoría de los equipos evidencia un buen nivel de MHG, pero no así lo que implica acciones en lápiz y papel.

Coincidimos con este autor que el trabajo en un entorno GG con tareas especialmente diseñadas es adecuado para una primera fase donde domina la competencia visual y manipulativa. En cambio, la argumentación por escrito demanda competencias diferentes como puede ser la comunicativa o la de generalización de resultados. Esto requiere un trabajo posterior más convencional en el cual la intervención del profesor es fundamental.

Sobre las valoraciones de los alumnos

La gran mayoría de los alumnos valora positivamente haber podido “ver” en el software los cambios de asíntotas de la función a medida que variaba el parámetro para interpretar la situación planteada. En muchas respuestas encontramos que el peso que se le da al resultado con el GG es mayor al de la justificación analítica. Es decir, los estudiantes indicaron que lo que veían en la pantalla les sirvió para saber si lo que estaban haciendo analíticamente estaba bien. Es nuestro desafío crear situaciones en donde se ponga en conflicto esta postura.

Sobre acciones para lograr un uso cotidiano del software por parte del alumno

La tarea mostrada no indicaba cómo manipular el software ni qué comandos usar. Estimamos que el trabajo intensivo en el aula con tareas sin interacción y con interacción guiada produjo que la mayoría de los equipos pudiera resolver la tarea con el GG sin inconvenientes. Las mayores dificultades se observaron a la hora de la justificación en lápiz y papel.

Continuamos con la investigación emprendida para indagar sobre el tipo de tareas a ser utilizadas para que el alumno pueda incorporar el uso del software a su actividad matemática sin que el docente le indique qué pautas debe seguir.

Bibliografía

Barahona, F., Barrera, O., Vaca, B e Hidalgo, B. (2015). GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. Revista Tecnológica ESPOL (RTE), 28 (5), 121-132. http://www.rte.espol.edu.ec/index.php/tecnologica/article/view/429

Campillo, A., Cafferata, S. Srour, Y. y Kostov, G. (2021). GeoGebra como herramienta en la resolución de problemas de optimización. Memorias IV día GeoGebra Argentina y IX GeoGebra Iberoamericano. YouTube. https://youtu.be/7zXhPEqYS2o

Campos Nava, M. y Torres Rodríguez, A. A. (2018). Diseño de Tareas de Aprendizaje Matemático con GeoGebra: Mecanismos Articulados. Pädi. Boletín Científico del Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería, 10, 80-85. https://doi.org/10.29057/icbi.v5i10.2939

Costa, J. (2011). Plataforma de matematización en un entorno GeoGebra dentro de un planteamiento didáctico «desde abajo hacia arriba». Enseñanza de las Ciencias, 29 (1), 101–114. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.527

Fiallo, J. y Parada, S. (2014). Curso de precálculo apoyado en el uso de GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. Revista Científica, 20, 56-71. https://doi.org/10.14483/23448350.7689

Garelik y Montenegro (2015). Un problema de movimiento parabólico en Cálculo con uso de GeoGebra. VI Congreso Virtual Iberoamericano de Calidad en Educación Virtual y a Distancia.

GeoGebra. (2020). ¿Qué es GeoGebra? https://www.geogebra.org/about

García Cuéllar, D., Martínez Miraval, M y Flores Salazar, J. (2018). Genesis instrumental de la razón de cambio instantánea mediada por GeoGebra. En L. Serna y D. Páges (eds), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31 (2) (pp. 1876-1883).

González, C., Vigo, K., Saravia, N. y Advíncula, E. (2018). Una secuencia didáctica para la comprensión del Concepto de derivada mediada por el software GeoGebra. En L. Serna y D. Páges (eds), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31 (2) (pp. 1352-1358).

Muñoz Escolano, J. (2016) Crónica del encuentro: Enseñar matemáticas con GeoGebra: retos, roles, resultados. Muñoz Escolano, J. (2016) https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/s81-secretos_geogebra.pdf

Pabón, J., Nieto, Z., Gómez C. (2015). Modelación matemática y GEOGEBRA en el desarrollo de competencias en jóvenes investigadores. Revista Logos, Ciencia y Tecnología, 7 (1), 64-70. https://doi.org/10.22335/rlct.v7i1.257

Ruiz, L., Del Rivero, S. y Valenzuela, H. (2018). GeoGebra: auto regulador del aprendizaje en conocimientos previos en cálculo diferencial. Revista Entorno Académico, 20, 15-22.

Saucedo, R., Godoy, J., Fraire, R. y Herrera, H. (2014). Enseñanza de las integrales aplicadas con GeoGebra. El Cálculo y su Enseñanza 5 (5), CINVESTAT, 125-138.

Betina Williner. Licenciada en Matemática Aplicada, Magister y Doctora en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Experimentales (orientación Matemática). Profesora Titular en la Universidad Nacional de La Matanza en carreras de ingeniería; profesora titular en la Universidad de Morón y profesora adjunta en la Universidad Tecnológica Nacional. Docente – investigadora en Educación Matemática con dedicación especial en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo.
Email: bwilliner@unlam.edu.ar

Adriana Favieri. Profesora de Matemática y Astronomía, Licenciada en Administración de la Educación Superior y Magister en Docencia Universitaria. Profesora Adjunta en la Universidad Nacional de La Matanza en carreras de ingeniería y profesora asociada en la Universidad Tecnológica Nacional. Docente – investigadora en Educación Matemática con dedicación especial en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo.
Email: afavieri@unlam.edu.ar