Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Facultad de Formación del Profesorado y Educación

Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Formación Profesional

El uso del contraejemplo en el aula de 3º de la ESO de matemáticas académicas

The application of counterexample in Year 3 mathematics classroom

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Autor: José Tolivar Pueyo

Tutor: Miguel Ángel Luengo

Fecha: 16-06-2020

Tabla de contenido

Resumen

El presente trabajo fin de Máster de la especialidad de Matemáticas lo conforman tres partes. En primer lugar, se realiza una breve reflexión sobre las prácticas llevadas a cabo en un IES asturiano; resumiendo la tarea desempeñada en dicho centro y expresando mi gratitud por el trato recibido. Seguidamente, y una vez hecha una introducción concisa, se muestra una propuesta de programación didáctica para un curso de 3º de la ESO compuesta por diez unidades didácticas. De estas diez unidades didácticas se desarrollará en profundidad únicamente una: la relativa a sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. A continuación se presentará la propuesta de innovación, mediante la cual se persigue la incorporación del contraejemplo al aula de 3º como recurso didáctico tanto para el bloque de álgebra como para el resto de bloques. Mi elección estuvo motivada por la necesidad de trabajar algunos errores que cometieron con frecuencia en sendas pruebas individuales de sistemas y resolución de ecuaciones. Como consecuencia de la situación que vive el país desde el pasado 12 de marzo, no fue posible desarrollar presencialmente dicho proyecto, llevándose únicamente a cabo una tarea individual que la profesora les hizo llegar a través del aula virtual del centro.

Abstract

The current document is a master thesis in teaching training, compulsory secondary education, post-compulsory secondary education and vocational training. The work is divided into three parts, which are the following: a brief description about my stay in an asturian secondary School, including the activities which I could take part and showing my gratefulness for the treatement I was given; a year three maths teaching program consisting of eight units, which only one will be amplified, and an innovation project.

The innovation Project aims to work with year three students some of the most common misconceptions they have about certain mathematical concepts, making use of counterexamples as a didactical tool which enables them to reason about the mentioned misconceptions. I state my decision across some linear and second degree equations tests which I had the chance to check, so as five linear equation system tests.

As a consequence of europes' and, particularly, spains' dreadful current situation since last 12 th of march, I was unable to develop the whole project. Only a short individual activity could have been put into practice thanks to the maths teacher of a year three group who offered herself to post the Activity on students' moodle.

Reflexión sobre las prácticas realizadas

El IES en el que tuve la oportunidad de desarrollar mis prácticas de máster se sitúa en el centro de la localidad asturiana de Avilés. El centro cuenta este curso con 900 alumnos, repartidos entre los cursos de ESO, Bachillerato en régimen diurno, Bachillerato en régimen nocturno y alumnado que cursa los Ciclos Formativos de Grado Superior de Integración Social y Educación Infantil. Muchos de los alumnos que comienzan 1º de Bachillerato provienen de varios centros concertados de la localidad, mientras que en el caso del alumnado que comienza 1º ESO lo hace de hasta siete colegios públicos diferentes. A modo de conclusión de esta pequeña introducción, añadir que el índice socioeconómico y cultural de las familias del instituto se encuentra dentro de la media calculada para Asturias.

A lo largo de estos dos meses de prácticas he tenido la oportunidad de asistir acompañado por mi tutora a clases de 1º de Bachillerato y 2º de Bachillerato; más concretamente, los grupos en los que ella impartía clase eran un desdoble de 1º Bachillerato de Ciencias Sociales (2 grupos en la práctica) y dos grupos de segundo de Bachillerato Científico y Tecnológico. Pese a no poder desarrollar la unidad didáctica en 1º de Bachillerato de manera presencial (tuve la oportunidad semanas después de colaborar con mi tutora subiendo material al aula virtual), tengo que decir que, a lo largo de las ocho semanas, tuve la oportunidad de intervenir en clase y de ayudar al alumnado con las tareas encomendadas.

El hecho de que mi tutora de prácticas no impartiera docencia en ningún grupo de ESO dificultaba el poder desarrollar una unidad didáctica en algún grupo de ESO y, por consiguiente, completar el cuadernillo de prácticas. No obstante, es aquí donde cabe señalar la generosidad del Departamento de Matemáticas de este centro, cuyos miembros se ofrecieron amablemente en todo momento a que asistiéramos mi compañero y yo a alguno de los grupos con los que tenían clase.

Los grupos que tuve la oportunidad de conocer e incluso pude colaborar fueron: dos terceros, un cuarto de Matemáticas Académicas, un cuarto de Matemáticas Aplicadas y un segundo. Fue precisamente en uno de los terceros (3ºB) en el que desarrollé parte de mi unidad didáctica, si bien, y muy a pesar, no fue posible poner en práctica la innovación educativa que tenía pensada y que se incluye en esta memoria, como consecuencia del COVID-19.

Debo decir que el hecho de que este grupo no fuera numeroso (14 alumnos) facilitó la resolución de dudas y me permitió detenerme en las sesiones teóricas para repetir aquellos conceptos que, o bien no recordaban (representar rectas dada su ecuación) o bien eran relativamente novedosos para ellos (clasificación de sistemas de ecuaciones en función de la posición relativa de las rectas). Su comportamiento hacia mí fue ejemplar en todo momento y, pese a que dos de las sesiones tuvieron lugar un lunes a primera hora, se mostraron participativos respondiendo a varias de las cuestiones planteadas. Asimismo, es de agradecer que intentaran (3 personas la entregaron y otras lo intentaron) una tarea que les sugerí y cuyo nivel era un poco más elevado que la media de las actividades que habían hecho hasta el momento.

Una de las experiencias más enriquecedoras de estas prácticas la tuve con un alumno de altas capacidades de 2º de Bachillerato. La motivación de este alumno por las matemáticas era tal que en su tiempo libre se dedicaba a estudiar conceptos asociados a la Teoría de la Probabilidad y al estudio de la Geometría Diferencial. En una ocasión, se acercó a mi mesa para preguntarme si la parametrización de una curva cicloide de radio uno que había hecho era correcta. Estar a la altura de esa inquietud permanente por las matemáticas fue un reto bastante complicado que, en ocasiones, exigió repasar algunas asignaturas del Grado de Matemáticas.

El haber podido ayudar en alguna ocasión a alumnos especialmente desmotivados con la asignatura también me ha resultado singularmente satisfactorio. De hecho, son algunos de estos alumnos los que más agradecimiento mostraron siempre que me acercaba a sus mesas a resolver las dudas de los ejercicios que mi tutora les había pedido.

El haber tenido la oportunidad de asistir a clases de varios niveles de ESO y Bachillerato me ha aportado una visión global sobre aquellas partes de la asignatura que les resultan por lo general más dificultosas y me ha permitido reflexionar sobre la manera en la que abordaría dichas dificultades en un futuro que, espero, no sea demasiado lejano.

Por otro lado, encontré especialmente fructífera mi asistencia a claustros, consejos escolares, juntas de evaluación o reuniones de tutores con jefatura de estudios y orientador, pues todas ellas han contribuido a que pueda hacerme una idea sobre el funcionamiento de un centro. Asimismo, también me pareció una experiencia interesante el haber asistido al aula de convivencia con mi tutora y otras dos profesoras del departamento para trabajar con aquellos alumnos cuyo comportamiento en su clase ordinaria durante esa hora había sido inadecuado.

En lo que respecta al resto de profesionales del centro, debo decir que su trato ha sido excelente desde el primer día. Tanto coordinadora del centro, personal no docente, Departamento de Orientación y Jefatura de Estudios me prestaron ayuda de diversa índole; desde indicarme la localización de estancias concretas los primeros días hasta aportarme todo tipo de información que pudiera necesitar para completar el cuaderno de prácticas. En este sentido, merece mención especial el orientador del centro, a quien solicité en más de una ocasión ayuda para completar los apartados correspondientes al Programa de Acción Tutorial, la relación de las familias con el centro y el Programa de Atención a la Diversidad.

La estancia en el centro de prácticas ha supuesto para mí una experiencia vital muy satisfactoria y fructífera. Cuando me inscribí en el máster tenía bastante claro que quería dedicar mi vida profesional a la docencia; la satisfacción que he sentido cada vez que he podido ayudar a un alumno y la sensación tan positiva que tuve tras haber dado mis primeras clases han ratificado la decisión que tomé allá por el mes de mayo. Quiero aprovechar estas líneas para agradecer a cada uno de ellos el trato dispensado; siempre guardaré un grato recuerdo hacia el centro.

Reflexión sobre la formación recibida

La asignatura *Procesos y Contextos Educativos* está dividida en cuatro bloques. En el primer bloque se realiza una revisión histórica de la educación en España, analizando las novedades que cada una de las leyes, desde la Ley Moyano hasta la LOMCE, fueron introduciendo. Asimismo, se introduce el marco jurídico del Sistema Educativo y se repasan algunas de las cuestiones referentes a los documentos de centro ya vistas en la asignatura *Diseño y Desarrollo Curricular.* Lo aprendido en este bloque fue muy importante a la hora de revisar la PGA o el PEC del centro.

El segundo bloque de la asignatura me aportó conocimientos sobre la variedad de conflictos que pueden surgir en un aula de Educación Secundaria Obligatoria o Bachillerato y sus motivos, el funcionamiento de una mediación y el papel que juega cada uno de los implicados y aquellos aspectos que el docente debe cuidar en el discurso oral como las muletillas, hablar entre dientes o los discursos excesivamente largos.

En el tercer bloque, relativo a la tutoría y orientación educativa en Educación secundaria, tuve la oportunidad de aprender los principios que vertebran la acción tutorial y la orientación educativa. A través de actividades de carácter práctico y teórico descubrí la importancia que adquieren recursos y procedimientos de recogida de información como las entrevistas y la necesidad de mantener una actitud empática para con las familias y el alumnado.

El cuarto bloque me hizo ver que en un aula conviven alumnos con necesidades muy diferentes y que es fundamental que nos adaptemos a ellas, buscando soluciones que permitan a todos alcanzar sus objetivos educativos. Debo añadir que también me sirvió para conocer la gran variedad de medidas de carácter ordinario y de carácter singular que se contemplan para ayudar al conjunto del alumnado.

En la asignatura *Aprendizaje y Desarrollo de la Personalidad* adquirí conocimientos sobre las principales Teorías del Aprendizaje (Constructivismo, Cognitivismo y Conductismo), la Psicología del Desarrollo y Enseñanza, el desarrollo cognitivo de los alumnos de los doce a los dieciocho años y sobre el desarrollo socio-afectivo y de la personalidad en la adolescencia. En ese último tema analizamos las características y las terribles consecuencias que conllevaba el acoso escolar, prestando especial atención al ciberacoso. La asignatura me aportó el soporte teórico que necesitaba para comprender la raíz y los comportamientos típicos de aquellos adolescentes que padecen trastornos de la conducta alimentaria como la anorexia o la bulimia.

La asignatura *Complementos de la Formación disciplinar: Matemáticas* está dividida en tres bloques: Estadística y Probabilidad, Cálculo y Álgebra y Geometría. En esta asignatura fui instruido en el uso de aplicaciones como EDpuzzle y OBS Studio para la creación de contenido didáctico y me sirvió para conocer applets, vídeos con demostraciones gráficas y enlaces de gran utilidad para impartir las partes de Estadística y Probabilidad y Geometría en ESO y Bachillerato. Asimismo, la oportunidad de exponer en las tres partes de la asignatura una parte del temario de ESO y Bachillerato supuso una experiencia interesante a la vez que beneficiosa de cara a comenzar las prácticas. Repasar contenidos de varias partes de la asignatura de ESO y Bachillerato también me resultó valioso. De forma simultánea con la asignatura *Diseño y Desarrollo del Currículum*, me inició en el manejo del currículo de Bachillerato y ESO de mi especialidad y en conceptos como competencias o criterios de evaluación.

En la asignatura *Diseño y Desarrollo del Currículum* supuso mi primera toma de contacto con el término currículo y con los diferentes elementos que lo componen, así como de los principales documentos de centro: PGA, PEC, Memoria, etc. De igual modo, aprendí que un currículo debe ser flexible y adaptarse a las necesidades del alumnado y que existen muchas metodologías como el aprendizaje por proyectos o la gamificación que se pueden poner en práctica en el aula, logrando así despertar el interés de buena parte del alumnado.

La asignatura *Sociedad, Familia y Educación* está dividida en dos bloques: un primer bloque que versa sobre género, igualdad y derechos humanos y otro segundo sobre familia y educación. El primer bloque resalta la necesidad de acabar con los estereotipos de género y etnia, aún demasiado presentes en nuestra sociedad, y educar a los estudiantes en la tolerancia y en el respeto. Del mismo modo se realiza una revisión de la historia de los Derechos Humanos, incidiendo en la educación en Derechos Humanos en España; en este bloque también se analiza la relación histórica entre género y escuela, pasando por la teoría de la socialización de los roles sexuales y por nuevos enfoques teóricos como el postestructuralismo feminista.

En el segundo bloque se explican las tres teorías clásicas de la socialización familiar y se analiza la función de las AMPA en los centros escolares. En esta parte de la asignatura descubrí que existían seis áreas de cooperación (Epstein) entre los centros docentes y las familias y entendí la importancia de que la relación familias-centro sea positiva y fomente un ambiente de cooperación.

A través de la asignatura *Tecnologías de la Información y la comunicación* he logrado entender la conveniencia de usar las nuevas tecnologías en el aula, sobretodo como herramienta de refuerzo para aquellos alumnos cuyo rendimiento sea más bajo. En plena era digital es necesario que los futuros docentes seamos conocedores de las nuevas tecnologías y sepamos emplearlas para beneficio nuestro y de nuestro alumnado. Esta asignatura me ha hecho reflexionar sobre mis necesidades como futuro profesor y sobre el uso que los adolescentes de hoy en día hacen de las redes sociales, siendo en algunos casos peligroso y dando lugar a situaciones indeseables como casos de ciberacoso.

En la asignatura *Innovación Docente e Iniciación a la Investigación Educativa* se introduce al alumnado a los conceptos de innovación e investigación educativa, explicando el procedimiento que se debe seguir a la hora de elaborar una propuesta de innovación o un proyecto de investigación. Asimismo, se llevan a cabo una serie de actividades destinadas a que el alumnado se familiarice con la estructura que debe seguir una innovación educativa y que me han ayudado a elaborar el proyecto que se incluye en el presente trabajo.

La asignatura *Lengua Inglesa para el Aula Bilingüe* me ha permitido conocer algunas de las áreas del CLIL (Content and Language Integrated Learning (Aprendizaje Integrado en Contenidos y Lenguas Extranjeras) que el docente debe manejar. Entre todas, se presta especial atención a la parte relativa a *Subject Literacies*, es decir: los términos que un profesor debe dominar sobre su disciplina. En esta asignatura se acentúa la importancia en la buena pronunciación, especialmente con los términos propios de cada especialidad, así como la necesidad de que el alumnado conozca una lista de términos fundamentales para el control y manejo del aula Las actividades de pronunciación, así como la elaboración y posterior exposición de un glosario y una clase expositiva me han aportado un mayor manejo de la lengua inglesa aplicada a las matemáticas y unas pautas para trabajar mi pronunciación que me serán de gran ayuda en caso de tener la posibilidad de trabajar en un centro bilingüe.

La asignatura *Aprendizaje y Enseñanza: Matemáticas* está dividida en tres bloques bien diferenciados: programación, evaluación y metodología. En la primera parte de la asignatura aprendí a elaborar una unidad didáctica, lo cual me resultó muy útil para la redacción de este documento. Seguidamente, en el bloque de evaluación, se establecían una serie de pautas a seguir a la hora de calificar un examen y de preparar pruebas tanto objetivas como abiertas. Finalmente, en la parte de metodología adquirí una visión global sobre las metodologías más utilizadas para impartir una clase de matemáticas al mismo tiempo que descubrí la forma de explicar un proceso algorítmico. En líneas generales, me ha aportado un conjunto de técnicas y conocimientos necesarios para preparar una clase de matemáticas en un curso de ESO o Bachillerato.

Propuesta de Programación didáctica

Contexto

La programación didáctica que se presenta a continuación se elabora para un curso de 3º de la ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. Una de las unidades, en concreto la unidad didáctica 6 relativa a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, fue llevada a cabo en el centro de prácticas con un grupo de 3º de la ESO.

Situado en una zona céntrica de la villa de Avilés, entre dos de los parques más relevantes de la villa, el centro cuenta con unas instalaciones amplias, disponiendo de: 37 aulas, 17 laboratorios, una sala de usos múltiples, un gimnasio y 15 departamentos didácticos entre otros muchos emplazamientos. No obstante, las instalaciones del centro se muestran insuficientes para acoger a los 900 alumnos matriculados, quienes están repartidos en los tres regímenes de estudios que oferta: diurno, vespertino y nocturno.

Entre los estudios que se ofertan en el IES podemos encontrar los siguientes: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato en régimen diurno y nocturno, tanto de Humanidades y Ciencias Sociales como de Ciencias, y dos Ciclos Formativos de Grado Superior: Integración Social (turno diurno) y Educación Infantil (turno diurno y vespertino). De los 900 alumnos mencionados anteriormente, 372 cursan ESO, 203 Bachillerato en régimen diurno y 134 Ciclos Formativos de Grado Superior.

En lo que respecta al nivel socioeconómico y cultural de las familias del instituto, y según los estudios realizados por la Consejería de Educación, se situaría dentro de la media del Principado de Asturias. El centro cuenta con una gran diversidad étnica y cultural.

El grupo en el que ha sido desarrollada la unidad didáctica se corresponde con 3ºB y cuenta con 24 alumnos, de los cuales 7 cursan Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas y 17 Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. Concretamente, fue con estos 17 estudiantes con los que se llevó a cabo la unidad didáctica, de los cuales ninguno es de Necesidades Educativas Especiales ni de incorporación tardía y sólo una alumna es absentista.

Marco legal

La presente programación didáctica está sujeta a un marco legal que condiciona su elaboración y que se ofrece a continuación:

La Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación en el capítulo III referido a la Educación Secundaria Obligatoria señala que en esta etapa adquirirá especial relevancia la atención a la orientación educativa y profesional del alumnado, así como la atención a la diversidad, entendiendo diversidad como el conjunto del alumnado.

La Ley Orgánica 8/2013 de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE) también forma parte de este marco legal. En su preámbulo se hace especial hincapié en la necesidad de potenciar las destrezas y habilidades de cada uno de los alumnos, acompañándoles a lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje y velando, conjuntamente con los familiares, por la toma de decisiones más acertada posible para su futuro.

Ha de tenerse presente en todo momento el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato conforme a la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa. Asimismo, el modelo de programación didáctica que se ofrece en este trabajo ha sido elaborado bajo el Decreto 43/2015, de 10 de junio, por el que se regula la ordenación y se establece el currículo de la educación Secundaria obligatoria en el Principado de Asturias. En este Decreto se desgranan los cinco bloques, uno de ellos transversal, de los que está compuesta la asignatura de Matemáticas, tanto en su vertiente de Enseñanzas Académicas como en Enseñanzas Aplicadas; de la misma manera, se resume el papel importante que juegan las matemáticas en el día a día, siendo imprescindibles para entender informaciones como las aportadas en medios de comunicación en forma de tablas o gráficos de barras.

La Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, contenidos y criterios de evaluación de la Educación Primaria, Educación Secundaria obligatoria y el Bachillerato recalca el valor de que desde las distintas asignaturas se promueva el desarrollo de cada una de las 7 competencias clave, algo en lo que desde la Unión Europea se lleva insistiendo con el fin de que cada individuo alcance un desarrollo personal pleno.

Objetivos generales de la etapa

Si bien en el caso particular de la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Enseñanzas Académicas se estimula en el alumnado la investigación, el pensamiento científico y el desarrollo de una metodología acorde con el método científico, no hay que perder de vista otros objetivos, de carácter más transversal, y que complementan al anterior, como la capacidad que el alumno debe adquirir para expresarse correctamente en una o más lenguas extranjeras.

Según lo establecido en el artículo 11 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, la Educación Secundaria Obligatoria contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:

- Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en su persona, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, en su caso, en la lengua asturiana, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
- Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos y ellas. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
- Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a las demás personas, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de otras personas, así como el patrimonio artístico y cultural.
- Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.
- Conocer y valorar los rasgos del patrimonio lingüístico, cultural, histórico y artístico de Asturias, participar en su conservación y mejora y respetar la diversidad lingüística y cultural como derecho de los pueblos e individuos, desarrollando actitudes de interés y respeto hacia el ejercicio de este derecho.

- Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de otras personas, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.
- Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
- Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con las demás personas, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
- Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.

Consideraciones metodológicas previas

El Decreto 43/2015, de 10 de junio, por el que se regula la ordenación y se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en el Principado de Asturias establece unos objetivos específicos de las Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria; a continuación se detallan los mismos:

- Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
- Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
- Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor, utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida,

realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.

- Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos y otros) presentes en los medios de comunicación, internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
- Reconocer las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y sensibilizarse a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
- Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores y otros) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
- Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
- Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
- Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.
- Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
- Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para

analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica.

Contribución de la materia a la adquisición de las siete competencias clave

De acuerdo con lo expuesto en el artículo 2.2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, las siete competencias clave del currículo de Educación Secundaria Obligatoria son las siguientes:

- **Comunicación lingüística.**
- **Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.**
- **Competencia digital.**
- **Aprender a aprender.**
- **Competencias sociales y cívicas.**
- **Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.**
- **Conciencia y expresiones culturales.**

En la programación didáctica que se desarrolla en estas líneas están presentes las siete competencias enumeradas anteriormente. Para empezar, es evidente que la **Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología** cobra un papel fundamental a lo largo de todas las unidades didácticas, pues en la asignatura Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas el alumno pondrá de manifiesto su habilidad para el cálculo, la capacidad de argumentación y construcción de sencillas demostraciones matemáticas y su ingenio para modelizar esquemas de solución que den respuesta a los problemas planteados. Se pretende que el alumno, de manera progresiva, vaya adquiriendo una metodología de trabajo que esté en sintonía con la empleada en las diferentes ramas científicas.

La **competencia digital** está estrechamente ligada con la competencia matemática, científica y tecnológica. El alumnado debe servirse, ayudado por el docente, de las múltiples aplicaciones existentes que permiten, en décimas de segundo, representar una función en un dominio dado o encontrar la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. A las clásicas herramientas como las calculadoras o las hojas de Excel se han sumado otras como GeoGebra que constituyen un apoyo gráfico evidente para la consolidación de ciertos conceptos.

Estimular la competencia **comunicación lingüística** es primordial para que el alumnado mejore su capacidad de expresión, transmitiendo a través de un discurso claro y fluido una idea, una impresión personal o un argumento. Del mismo modo, el manejo adecuado de la terminología propia de la asignatura a lo largo de las clases expositivas se erige como otro de los puntos a tratar y que, efectivamente, juega un papel destacable en la comunicación lingüística en el aula de matemáticas.

Cuestiones relativas a la cultura general de una determinada región de un país o al propio país pueden introducirse a través de actividades que estimulen el interés por la lectura o de actividades complementarias y extraescolares. De este modo se estaría desarrollando la competencia **Conciencia y expresiones culturales.**

En su paso por la Educación Secundaria Obligatoria, el alumnado debe adquirir de forma progresiva cierta independencia a la hora de enfrentarse a las diferentes asignaturas del currículo. La asignatura de Matemáticas requiere que el estudiante combine aquello que aprende de la mano del docente con sus propias investigaciones, implicando esto horas de dedicación a la materia en su hogar. El alumno aprende de la mano del docente, pero también tiene que participar activamente en la construcción de su propio aprendizaje, alejado siempre de un modelo basado exclusivamente en la memorización, añadiendo experiencias y conocimientos derivados de su propia investigación. Es decir, se fomenta que los estudiantes desarrollen las competencias **Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor** y **aprender a aprender.**

Las competencias **sociales y cívicas** deben estar presentes en el aula en todo momento, pues está en nuestra mano inculcar valores como el respeto a la diversidad, el respeto por las creencias y opiniones de los demás o el compañerismo a nuestro alumnado, procurando que el ambiente de la clase sea cordial, amable y donde reine la tolerancia. En Matemáticas, la manera de interpretar un concepto teórico o de modelar un problema admite puntos de vista y opiniones variadas pero no divergentes; por esta razón es importante que los alumnos alcancen una actitud tolerante e intenten adaptarse a la forma de pensar de cada componente de la clase. Asimismo, y dadas las dificultades que entraña la asignatura para muchos alumnos, es imprescindible que aflore la solidaridad y la empatía, prestándose ayuda entre ellos y resolviéndose dudas.

Organización, secuenciación y temporalización de los contenidos

La asignatura de 3º de ESO Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas está constituida por cinco bloques:

- Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas.
- Bloque 2: Números y álgebra.
- Bloque 3: Geometría.
- Bloque 4: Funciones.
- Bloque 5: Estadística y Probabilidad.

Cada uno de estos bloques tiene asociados una serie de contenidos que conforman lo que los alumnos van a ver en cada una de las unidades didácticas. A continuación se exponen cada uno de los contenidos asociados a los bloques. Resulta imprescindible tener en cuenta que el primer bloque es transversal y que, por tanto, está asociado a cada uno de los cuatro bloques restantes.

Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.

- Planificación del proceso de resolución de problemas.
- Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.
- Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.

- Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.
- Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.
- Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.
- Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para la recogida ordenada y la organización de datos; la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos; facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico; el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas; la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos; comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.

Bloque 2: Números y álgebra

- Potencias de números racionales con exponente entero. Significado y uso.
- Potencias de base 10. Aplicación para la expresión de números muy pequeños. Operaciones con números expresados en notación científica.
- Raíces cuadradas. Raíces no exactas. Expresión decimal. Expresiones radicales: transformación y operaciones.
- Jerarquía de operaciones.
- Números decimales y racionales. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos. Fracción generatriz.
- Operaciones con fracciones y decimales. Cálculo aproximado y redondeo. Cifras significativas. Error absoluto y relativo.
- Investigación de regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números. Expresión usando lenguaje algebraico.
- Sucesiones numéricas. Sucesiones recurrentes. Progresiones aritméticas y geométricas. Elementos.
- Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Resolución (método algebraico y gráfico).

- Transformación de expresiones algebraicas. Igualdades notables. Operaciones elementales con polinomios. División de polinomios. Regla de Ruffini.
- Resolución de ecuaciones sencillas de grado superior a dos.
- Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Bloque 3: Geometría

- Geometría del plano. Segmentos y ángulos en las figuras geométricas.
- Lugar geométrico. Determinación de figuras geométricas planas a partir de ciertas propiedades.
- Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas.
- Movimientos en el plano: traslaciones, giros y simetrías en el plano.
- Uso de los movimientos para el análisis y la representación de figuras y representaciones geométricas.
- Reconocimiento de los movimientos en la naturaleza en el arte y en los objetos cotidianos.
- Geometría del espacio. Planos de simetría en los poliedros.
- La esfera. Intersecciones de planos y esferas.
- El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto.
- Resolución de problemas de interpretación de mapas y planos.
- Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas

Bloque 4: Funciones

- Características de las gráficas, dominio, cortes con los ejes, continuidad, monotonía, extremos, simetría.
- Análisis y descripción cualitativa de gráficas sencillas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.
- Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente.

- Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.
- Utilización de modelos lineales pa ra estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.
  - Expresiones de la ecuación de la recta. Punto-pendiente, general, explícita y por dos puntos.
  - Funciones cuadráticas. Vértice, eje de simetría, cortes con los ejes. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.
  - Utilización de medios tecnológicos como calculadoras gráficas o programas informáticos sencillos para representar funciones lineales y cuadráticas.

Bloque 5: Estadística y Probabilidad

- Fases y tareas de un estudio estadístico. Población, muestra. Variables estadísticas: cualitativas y cuantitativas discretas o continuas.
- Métodos de selección de una muestra estadística. Representatividad de una muestra. Encuestas.
- Organización de los datos en tablas estadísticas. Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas. Agrupación de datos en intervalos.
- Gráficas estadísticas. Histogramas, diagrama de barras, diagrama de sectores, polígonos de frecuencias.
- Parámetros de posición y centralización. Cálculo, interpretación y propiedades.
- Parámetros de dispersión. Rango, varianza, desviación típica.
- Diagrama de caja y bigotes.
- Interpretación conjunta de la media y la desviación típica.
- Utilización de medios tecnológicos para realizar cálculos y gráficos estadísticos.
- Utilización de datos de la población española y/o asturiana para estudios estadísticos y probabilísticos.

- Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral.
- Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Diagramas de árbol sencillos. Tablas de contingencia. Permutaciones, factorial de un número.
- Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.

Las 10 unidades didácticas que conforman la programación didáctica que se presenta en próximas líneas son las siguientes:

- Unidad didáctica 1: Fracciones y decimales.
- Unidad didáctica 2: Potencias y raíces.
- Unidad didáctica 3: El lenguaje algebraico.
- Unidad didáctica 4: Ecuaciones de primer y segundo grado.
- Unidad didáctica 5: Sistemas de ecuaciones.
- Unidad didáctica 6: Progresiones.
- Unidad didáctica 7: Geometría plana. Lugares geométricos.
- Unidad didáctica 8: Elementos de una función. Estudio de gráficas.
- Unidad didáctica 9: Estadística descriptiva.
- Unidad didáctica 10: Probabilidad. Sucesos aleatorios y deterministas.

Antes de proceder a la organización por trimestres de las unidades didácticas, enunciaremos los criterios de secuenciación tenidos en cuenta para la organización de las unidades didácticas:

- Estructura interna de las matemáticas
- Dificultad, importancia y momento del curso

En el primer caso, es fundamental que exista coherencia entre las unidades. No podríamos ubicar la unidad de geometría plana antes que la de Ecuaciones de primer grado y segundo grado, pues muy probablemente necesitemos la fórmula de la ecuación de segundo grado para resolver problemas del tipo "conocido el valor de la diagonal de un rectángulo y sabiendo que un lado es el triple que otro, calcular su perímetro".

Respecto al segundo punto, conviene situar las unidades didácticas más "sencillas" o "amenas" para el alumnado al final del curso, pues aquellas más complejas como pudieran ser El lenguaje algebraico o Progresiones pueden requerirnos más tiempo del planificado en un principio. Por esta razón, y teniendo en cuenta las dificultades que tienen muchos estudiantes con cuestiones relativas a los temas de álgebra (resolución de problemas con sistemas de ecuaciones, simplificación de fracciones algebraicas, identidades notables, etc.), se ha tomado la decisión de situar al principio del curso las unidades 3, 4 y 5 y dejar para el final las unidades de estadística descriptiva y probabilidad y estudio de funciones. Estas últimas, además de gustar más, permiten la realización de actividades como elaboración de encuestas que suelen motivar al alumnado.

La distribución de estas 10 unidades en los tres trimestres de los que consta un curso académico sería la siguiente:

Primer trimestre

- Fracciones y decimales (2 semanas)
- Potencias y raíces (3 semanas)
- El lenguaje algebraico (3 semanas y tres días)
- Ecuaciones de primer y segundo grado (3 semanas)

Segundo trimestre

- Sistemas de ecuaciones (3 semanas y un día)
- Progresiones (3 semanas)
- Geometría plana. Lugares geométricos (3 semanas y cuatro días)

Tercer trimestre

- Elementos de una función. Estudio de gráficas (tres semanas y dos días)
- Estadística descriptiva (4 semanas)
- Probabilidad. Sucesos aleatorios y deterministas (2 semanas y tres días)

Desglose de las 9 unidades didácticas no desarrolladas en profundidad

Unidad didáctica 1: Fracciones y decimales	Bloque 2: números y álgebra

Contenidos

- Números decimales y racionales. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos. Fracción generatriz.
- Jerarquía de operaciones.
- Operaciones con fracciones y decimales.

Criterios de evaluación e indicadores de logro asociados

Utilizar las propiedades de los números racionales para operarlos, utilizando la forma de cálculo y notación adecuada, para resolver problemas de la vida cotidiana y presentando los resultados con la precisión requerida.

1. Definir número racional.
2. Definir fracción equivalente.
3. Comprender las operaciones que pueden realizarse entre dos o más fracciones.
4. Resolver operaciones combinadas con números racionales.
5. Clasificar un número racional en función del número de cifras decimales.
6. Comprender el concepto de fracción generatriz.
7. Calcular la fracción generatriz de un número decimal dado.

Estándares de Aprendizaje

- Reconoce los distintos tipos de números (naturales, enteros, racionales), indica el criterio utilizado para su distinción y los utiliza para representar e interpretar adecuadamente información cuantitativa.
- Distingue, al hallar el decimal equivalente a una fracción, entre decimales finitos y decimales infinitos periódicos, indicando en este caso, el grupo de decimales que se repiten o forman período.
- Halla la fracción generatriz correspondiente a un decimal exacto o periódico.

Competencias

- CCL: el alumnado mejorará su capacidad de expresión oral a través de las actividades grupales y de sus intervenciones diarias en el aula.

- CMCT: Está presente en todo momento. Se desarrolla en cada una de las sesiones.
- CSC: Tanto en las actividades grupales cuando se fomenta el compañerismo y el trabajo en equipo como en el resto de las horas de clase al fomentar valores como la tolerancia y el respeto a la diversidad.
- AA: Se potenciará en todo momento la importancia del trabajo en casa y se aportarán algunos enlaces o bibliografía que pueden consultar de manera individual para ampliar su conocimiento. En este caso, se les aportaría un enlace a un video de KhanAcademy en el que se demuestra que la suma y el producto de dos números racionales siempre es racional.
- SIEE: La resolución de un ejercicio de nivel más elevado que los que se acostumbran a hacer en clase y puramente teórico. El enfrentarse a este reto o investigar sobre la historia de los números reales.

Unidad didáctica 2: Potencias y raíces	Bloque 2: números y álgebra
Contenidos	
• Potencias de base 10. Aplicación para la expresión de números muy pequeños. Operaciones con números expresados en notación científica. • Raíces cuadradas. Raíces no exactas. Expresión decimal. Expresiones radicales: transformación y operaciones.	
Criterios de evaluación e indicadores de logro asociados	
Utilizar las propiedades de los números racionales para operarlos, utilizando la forma de cálculo y notación adecuada, para resolver problemas de la vida cotidiana y presentando los resultados con la precisión requerida. 1. Conocer las propiedades de las potencias. 2. Expresar a través de potencias de base 10 un número racional. 3. Resolver operaciones de números racionales expresados como potencias de base 10 y exponente un número entero. 4. Definir número irracional.	

5. Representar un número irracional sobre la recta real de manera exacta.
6. Resolver operaciones con radicales y clasificar el número resultante en racional o irracional.
7. Clasificar un número dado en racional o irracional.
8. Definir número real.

Estándares de Aprendizaje

- Expresa números muy grandes y muy pequeños en notación científica, y opera con ellos, con y sin calculadora, y los utiliza en problemas contextualizados.
- Factoriza expresiones numéricas sencillas que contengan raíces, opera con ellas simplificando los resultados.
- Calcula el valor de expresiones numéricas de números enteros, decimales y fraccionarios mediante las operaciones elementales y las potencias de exponente entero aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones.

Competencias

- CCL: el alumnado mejorará su capacidad de expresión oral a través de las actividades grupales y de sus intervenciones diarias en el aula.
- CMCT: Está presente en todo momento. Se desarrolla en cada una de las sesiones.
- CSC: Tanto en las actividades grupales cuando se fomenta el compañerismo y el trabajo en equipo como en el resto de las horas de clase al fomentar valores como la tolerancia y el respeto a la diversidad.
- AA: Se potenciará en todo momento la importancia del trabajo en casa y se aportarán algunos enlaces o bibliografía que pueden consultar de manera individual para ampliar su conocimiento. En este caso, se les incitaría a buscar información sobre números irracionales conocidos como el número áureo o el número e.
- SIEE: La resolución de un ejercicio de nivel más elevado que los que se acostumbran a hacer en clase y puramente teórico.
- CD: Se usará el programa Wiris para realizar operaciones con números irracionales, operaciones con potencias y trabajar la notación científica.

Unidad didáctica 3: El lenguaje algebraico	Bloque 2: números y álgebra

Contenidos

- Investigación de regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números. Expresión usando lenguaje algebraico.
- Transformación de expresiones algebraicas. Igualdades notables. Operaciones elementales con polinomios. División de polinomios. Regla de Ruffini.

Criterios de evaluación e indicadores de logro asociados

Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado, extrayendo la información relevante y transformándola.

1. Definir las operaciones suma, resta, multiplicación y división de polinomios.
2. Realizar operaciones con polinomios (suma, resta, multiplicación y división) con coeficientes racionales.
3. Expresar magnitudes y relaciones entre las mismas mediante el lenguaje algebraico.
4. Definir raíz de un polinomio.
5. Comprender la regla de Ruffini.
6. Aplicar la regla de Ruffini para descomponer polinomios no irreducibles.
7. Demostrar las igualdades notables.
8. Comprender las fórmulas de cada una de las igualdades notables.
9. Aplicar las igualdades notables para desarrollar binomios.
10. Calcular el cociente de dos polinomios a través de la descomposición en factores irreducibles de cada uno de ellos.
11. Expresar situaciones de la vida cotidiana a través del lenguaje algebraico.

Estándares de Aprendizaje

- Realiza operaciones con polinomios y los utiliza en ejemplos de la vida cotidiana.
- Conoce y utiliza las identidades notables correspondientes al cuadrado de un binomio y una suma por diferencia, y las aplica en un contexto adecuado.
- Factoriza polinomios de grado 4 con raíces enteras mediante el uso combinado de

la regla de Ruffini, identidades notables y extracción del factor común.
Competencias • CCL: el alumnado mejorará su capacidad de expresión oral a través de las actividades grupales y de sus intervenciones diarias en el aula. • CMCT: Está presente en todo momento. Se desarrolla en cada una de las sesiones. • CSC: Tanto en las actividades grupales cuando se fomenta el compañerismo y el trabajo en equipo como en el resto de las horas de clase al fomentar valores como la tolerancia y el respeto a la diversidad. En la actividad grupal de contraejemplos se procurará que los alumnos con mejores calificaciones ayuden a aquellos con más dificultades. • AA: Se potenciará en todo momento la importancia del trabajo en casa y se aportarán algunos enlaces o bibliografía que pueden consultar de manera individual para ampliar su conocimiento. En este caso, se les incitaría a buscar información sobre el matemático Al Juarismi. • SIEE: La resolución de un ejercicio de nivel más elevado que los que se acostumbran a hacer en clase y puramente teórico. En este caso, dicho ejercicio será el siguiente: " Sea P(x)=$ax^3 + bx^2 + cx$ y Q(x) un polinomio de grado dos: ¿Cuál es el grado del polinomio P(x)·Q(x)? ¿Podría conocerse el resto del cociente entre ambos? • CD: Se usará el programa Wiris para realizar operaciones con polinomios y para practicar la factorización. Reconocer páginas web fiables para buscar información acerca de las propiedades de las operaciones de polinomios.

Unidad didáctica 4: Ecuaciones de primer y segundo grado	Bloque 2: números y álgebra
Contenidos	
• Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Resolución por método algebraico.	

- Resolución de ecuaciones sencillas de grado superior a dos.
- Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones.

Criterios de evaluación e indicadores de logro asociados

Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado, extrayendo la información relevante y transformándola.

1. Plantear problemas de enunciado o situaciones de la vida cotidiana a través de una ecuación de primer o segundo grado.

Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado y ecuaciones sencillas de grado mayor que dos, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos, valorando y contrastando los resultados obtenidos.

1. Definir ecuación de grado n con una sola incógnita.
2. Definir solución de una ecuación de grado n con una sola incógnita.
3. Comprender el concepto de ecuación equivalente.
4. Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita.
5. Transformar una ecuación de primer grado en otra equivalente por medio de la suma, resta, multiplicación y división de un mismo término a ambos lados de la igualdad.
6. Reconocer una ecuación de segundo grado con una incógnita.
7. Comprender la fórmula de la ecuación de segundo grado.
8. Conocer las diferentes formas que puede adoptar una ecuación de segundo grado en función del valor de sus coeficientes.
9. Resolver ecuaciones de segundo grado incompletas.
10. Resolver problemas de distinta naturaleza, estableciendo relaciones entre los datos y resolviendo las ecuaciones de primer grado y segundo grado derivadas de las relaciones anteriores.

Estándares de Aprendizaje

- Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido.

Competencias

- CCL: el alumnado mejorará su capacidad de expresión oral a través de las actividades grupales y de sus intervenciones diarias en el aula.
- CMCT: Está presente en todo momento. Se desarrolla en cada una de las sesiones.
- CSC: Tanto en las actividades grupales cuando se fomenta el compañerismo y el trabajo en equipo como en el resto de las horas de clase al fomentar valores como la tolerancia y el respeto a la diversidad. En la actividad grupal de contraejemplos se procurará que los alumnos con mejores calificaciones ayuden a aquellos con más dificultades.
- AA: Se potenciará en todo momento la importancia del trabajo en casa y se aportarán algunos enlaces o bibliografía que pueden consultar de manera individual para ampliar su conocimiento. En este caso, se les aportarán enlaces con información biográfica del matemático Évariste Galois.
- SIEE: La resolución de un ejercicio de nivel más elevado que los que se acostumbran a hacer en clase y puramente teórico. En este caso, dicho ejercicio será el siguiente: encuentra una ecuación de segundo grado que no tenga solución en los números reales. Esto es: que $b^2 - 4ac < 0$
- CD: Se usará el programa Wiris para resolver ecuaciones de segundo grado, así como ecuaciones de primer grado con denominadores. Se utilizará de apoyo principalmente para resolver problemas de enunciado.

Unidad didáctica 6: Progresiones	Bloque 2: números y álgebra
Contenidos	
• Sucesiones numéricas. Sucesiones recurrentes. Progresiones aritméticas y geométricas. Elementos.	
Criterios de evaluación e indicadores de logro asociados	

Obtener y manipular expresiones simbólicas que describan sucesiones numéricas, observando regularidades en casos sencillos que incluyan patrones recursivos.

1. Definir sucesión de numérica.
2. Definir progresión aritmética.
3. Calcular el término n-ésimo de una progresión aritmética.
4. Comprender la demostración de la fórmula general de la suma de n términos de una progresión aritmética.
5. Calcular la suma de n términos de una sucesión aritmética.
6. Definir progresión geométrica.
7. Calcular el término n-ésimo de una progresión geométrica.
8. Comprender la demostración de la fórmula general de la suma de n términos de una progresión geométrica.
9. Resolver problemas de la vida real en los que haya que hacer uso de progresiones aritméticas o geométricas.
10. Reconocer patrones de sucesiones presentes en la naturaleza y en nuestra vida cotidiana.

Estándares de Aprendizaje

- Calcula términos de una sucesión numérica recurrente usando la ley de formación a partir de términos anteriores.
- Obtiene una ley de formación o fórmula para el término general de una sucesión sencilla de números enteros o fraccionarios.
- Identifica progresiones aritméticas y geométricas, expresa su término general, calcula la suma de los “n” primeros términos, y las emplea para resolver problemas.
- Valora e identifica la presencia recurrente de las sucesiones en la naturaleza y resuelve problemas asociados a las mismas.

Competencias

- CCL: el alumnado mejorará su capacidad de expresión oral a través de las actividades grupales y de sus intervenciones diarias en el aula.
- CMCT: Está presente en todo momento. Se desarrolla en cada una de las sesiones.

- CSC: Tanto en las actividades grupales cuando se fomenta el compañerismo y el trabajo en equipo como en el resto de las horas de clase al fomentar valores como la tolerancia y el respeto a la diversidad. En la actividad grupal de contraejemplos se procurará que los alumnos con mejores calificaciones ayuden a aquellos con más dificultades.
- AA: Se potenciará en todo momento la importancia del trabajo en casa y se aportarán algunos enlaces o bibliografía que pueden consultar de manera individual para ampliar su conocimiento. En este caso, se les instará a buscar información en la red sobre la biografía del matemático italiano Leonardo de Pisa.
- SIEE: La resolución de un ejercicio de nivel más elevado que los que se acostumbran a hacer en clase y puramente teórico. En este caso, dicho ejercicio será el siguiente: "La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética (n>1) es 170 y la diferencia de la progresión es 5. Si a_1 es entero: ¿ Qué valores puede tomar n?"
- CD: Se trabajará en Wiris el cálculo de términos de progresiones aritméticas y geométricas, así como la búsqueda de la diferencia o la razón a partir de una sucesión dada.

Unidad didáctica 7: Geometría plana. Lugares geométricos.	Bloque 3: Geometría
Contenidos	
• Geometría del plano. Segmentos y ángulos en las figuras geométricas • Lugar geométrico. Determinación de figuras geométricas planas a partir de ciertas propiedades. • Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas.	
Criterios de evaluación e indicadores de logro asociados	
Reconocer y describir los elementos y propiedades características de	

las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas.

1. Definir lugar geométrico.
2. Identificar y definir lugares geométricos como mediatriz, bisectriz y arco capaz.
3. Calcular el valor de cada uno de los ángulos de un polígono regular.

Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes y áreas de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos.

1. Definir triángulos semejantes.
2. Clasificar dos triángulos dados en virtud de si son semejantes o no.
3. Enunciar el teorema de Tales.
4. Reconocer si dos triángulos dados pueden ponerse en posición de Tales.
5. Identificar si los ángulos de polígonos contenidos en otros son semejantes o no.
6. Aplicar el teorema de Pitágoras en situaciones de la vida cotidiana para hallar medidas desconocidas.
7. Calcular el área y el perímetro de polígonos regulares y figuras curvas.

Estándares de Aprendizaje

- Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo, utilizándolas para resolver problemas geométricos sencillos.
- Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos.
- Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas.
- Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes.
- Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos.

Competencias

- CCL: el alumnado mejorará su capacidad de expresión oral a través de las actividades grupales y de sus intervenciones diarias en el aula.

- CMCT: Está presente en todo momento. Se desarrolla en cada una de las sesiones.
- CSC: Tanto en las actividades grupales cuando se fomenta el compañerismo y el trabajo en equipo como en el resto de las horas de clase al fomentar valores como la tolerancia y el respeto a la diversidad.
- AA: Se potenciará en todo momento la importancia del trabajo en casa y se aportarán algunos enlaces o bibliografía que pueden consultar de manera individual para ampliar su conocimiento. En este caso, se les instará a buscar comandos específicos en GeoGebra para la elaboración de una tarea individual.
- SIEE: La resolución de un ejercicio de nivel más elevado que los que se acostumbran a hacer en clase y puramente teórico.
- CD: Se trabajará en Geogebra el cálculo de áreas y la representación de algunas figuras planas.

Unidad didáctica 8: Elementos de una función. Estudio de gráficas.	Bloque 4: Funciones
Contenidos	
• Características de las gráficas, dominio, cortes con los ejes, continuidad, monotonía, extremos, simetría. • Análisis y descripción cualitativa de gráficas sencillas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. • Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente.	
Criterios de evaluación e indicadores de logro asociados	
Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica 1. Comprender los conceptos de dominio y recorrido de una función. 2. Indicar el dominio y el recorrido de una función de variable real a partir de su	

gráfica.

3. Comprender los conceptos máximo y mínimo relativo de una función de variable real.
4. Comprender el concepto de función periódica.
5. Dibujar una curva creciente o decreciente en un determinado tramo.
6. Obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función dada una gráfica.
7. Razonar sobre la posibilidad o imposibilidad de determinadas situaciones a partir de una gráfica dada.
8. Interpretar la información aportada por los medios de comunicación o por diversos estudios cuando está representada a través de una gráfica.
9. Asociar la expresión analítica de una función con la gráfica de la misma.

Estándares de Aprendizaje

- Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.
- Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto.
- Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto.
- Asocia razonadamente expresiones analíticas a funciones dadas gráficamente.

Competencias

- CCL: el alumnado mejorará su capacidad de expresión oral a través de las actividades grupales y de sus intervenciones diarias en el aula.
- CMCT: Está presente en todo momento. Se desarrolla en cada una de las sesiones.
- CSC: Tanto en las actividades grupales cuando se fomenta el compañerismo y el trabajo en equipo como en el resto de las horas de clase al fomentar valores como la tolerancia y el respeto a la diversidad.
- AA: Se potenciará en todo momento la importancia del trabajo en casa y se aportarán algunos enlaces o bibliografía que pueden consultar de manera individual para ampliar su conocimiento. En este caso, se les instará a buscar ejemplos de funciones en la vida cotidiana: televisión, periódicos, etc.
- SIEE: El estudio de fenómenos que se recogen en los medios de comunicación a

través de gráficas. Los estudiantes llevarán a cabo una actividad grupal (parejas) consistente en la presentación de una gráfica que hayan encontrado en un periódico (El País, El Comercio, AS, etc.). Deberán extraer conclusiones relevantes y exponerlas a sus compañeros.

- CD: Se trabajará en Geogebra la representación de gráficas de funciones a partir de sus ecuaciones.

Unidad didáctica 9: Estadística descriptiva.	Bloque 5: Estadística y Probabilidad
Contenidos	
• Fases y tareas de un estudio estadístico. Población, muestra. Variables estadísticas: cualitativas y cuantitativas discretas o continuas. • Métodos de selección de una muestra estadística. Representatividad de una muestra. Encuestas. • Organización de los datos en tablas estadísticas. Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas. Agrupación de datos en intervalos. • Gráficas estadísticas. Histogramas, diagrama de barras, diagrama de sectores, polígonos de frecuencias. • Parámetros de posición y centralización. Cálculo, interpretación y propiedades. • Parámetros de dispersión. Rango, varianza, desviación típica. • Diagrama de caja y bigotes. • Interpretación conjunta de la media y la desviación típica. • Utilización de medios tecnológicos para realizar cálculos y gráficos estadísticos. • Utilización de datos de la población española y/o asturiana para estudios estadísticos y probabilísticos.	
Criterios de evaluación e indicadores de logro asociados	
Elaborar informaciones estadísticas para describir un conjunto de datos mediante tablas y gráficas adecuadas a la situación analizada, justificando si las conclusiones son representativas para la población estudiada.	

1. Definir variable aleatoria cualitativa y cuantitativa.
2. Definir población y muestra aleatoria.
3. Comprender el concepto representatividad de una muestra.
4. Reconocer en medios de comunicación y en el día a día ejemplos de variables cualitativas y cuantitativas.
5. Calcular las medidas de dispersión y/o centralización de una variable aleatoria dada.
6. Razonar sobre la conveniencia de usar una medida de centralización u otra para obtener información sobre una variable aleatoria dada.
7. Representar a través de aplicaciones o programas como Excel o Rcommander gráficos de barras, gráficos de sectores y diagramas de cajas y bigotes.
8. Expresar la información obtenida a partir del estudio de una muestra en un informe.
9. Comprender las propiedades de los parámetros de dispersión y centralización.
10. Elaborar encuestas.

Estándares de Aprendizaje

- Distingue población y muestra justificando las diferencias en problemas contextualizados.
- Valora la representatividad de una muestra a través del procedimiento de selección, en casos sencillos.
- Distingue entre variable cualitativa, cuantitativa discreta y cuantitativa continua y pone ejemplos.
- Elabora tablas de frecuencias, relaciona los distintos tipos de frecuencias y obtiene información de la tabla elaborada.
- Construye, con la ayuda de herramientas tecnológicas si fuese necesario, gráficos estadísticos adecuados a distintas situaciones relacionadas con variables asociadas a problemas sociales, económicos y de la vida cotidiana.
- Calcula e interpreta las medidas de posición (media, moda, mediana y cuartiles) de una variable estadística para proporcionar un resumen de los datos.
- Calcula los parámetros de dispersión (rango, recorrido intercuartílico y desviación típica). Cálculo e interpretación de una variable estadística (con calculadora y con hoja de cálculo) para comparar la representatividad de la media y describir los datos.
- Utiliza un vocabulario adecuado para describir, analizar e interpretar información

estadística de los medios de comunicación. • Emplea la calculadora y medios tecnológicos para organizar los datos, generar gráficos estadísticos y calcular parámetros de tendencia central y dispersión. • Emplea medios tecnológicos para comunicar información resumida y relevante sobre una variable estadística analizada.
Competencias • CCL: el alumnado mejorará su capacidad de expresión oral a través de las actividades grupales y de sus intervenciones diarias en el aula. • CMCT: Está presente en todo momento. Se desarrolla en cada una de las sesiones. • CSC: Tanto en las actividades grupales cuando se fomenta el compañerismo y el trabajo en equipo como en el resto de las horas de clase al fomentar valores como la tolerancia y el respeto a la diversidad. En la sección relativa a actividades extraescolares y complementarias se incluye una tarea grupal que, en grupos de 4, llevarán a cabo los alumnos de la asignatura y que está relacionada con el estudio de los hábitos alimenticios de países escogidos aleatoriamente para ellos. • AA: Se potenciará en todo momento la importancia del trabajo en casa y se aportarán algunos enlaces o bibliografía que pueden consultar de manera individual para ampliar su conocimiento. En este caso, se les instará a buscar en diarios de diferentes tipos ejemplos de información expresada mediante gráficos de barras y de sectores. • SIEE: La puesta en práctica del proyecto de investigación explicado en el apartado de actividades complementarias y extraescolares. • CD: Se trabajará en Excel, Rcommander y SPSS con pequeñas bases de datos. Los alumnos aprenderán a calcular algunos de las medidas de centralización y dispersión más comunes como la media o la desviación típica.

Unidad didáctica 10: Probabilidad. Sucesos aleatorios y deterministas.	Bloque 5: Estadística y Probabilidad

Contenidos
• Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral. • Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Diagramas de árbol sencillos. Tablas de contingencia. Permutaciones, factorial de un número. • Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.
Criterios de evaluación e indicadores de logro asociados
Estimar la posibilidad de que ocurra un suceso asociado a un experimento aleatorio sencillo, calculando su probabilidad a partir de su frecuencia relativa, la regla de Laplace o los diagramas de árbol, identificando los elementos asociados al experimento. 1. Definir suceso aleatorio. 2. Definir suceso determinista. 3. Indicar el espacio muestral de un experimento aleatorio sencillo como el lanzamiento de un dado de seis caras no truncado. 4. Indicar posibles subespacios muestrales de un espacio muestral dado. 5. Enunciar la ley de Laplace. 6. Aplicar la ley de Laplace en contextos en los que los sucesos sean equiprobables. 7. Comprender el concepto de sucesos independientes. 8. Calcular, por medio de diagramas de árbol, la probabilidad de la intersección de dos sucesos independientes. 9. Representar diagramas de árbol que ejemplifiquen un experimento aleatorio.
Estándares de Aprendizaje
• Identifica los experimentos aleatorios y los distingue de los deterministas. • Utiliza el vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar. • Asigna probabilidades a sucesos en experimentos aleatorios sencillos cuyos resultados son equiprobables, mediante la regla de Laplace, enumerando los sucesos elementales, tablas o árboles u otras estrategias personales. • Toma la decisión correcta teniendo en cuenta las probabilidades de las distintas opciones en situaciones de incertidumbre.

Competencias
• CCL: el alumnado mejorará su capacidad de expresión oral a través de las actividades grupales y de sus intervenciones diarias en el aula. • CMCT: Está presente en todo momento. Se desarrolla en cada una de las sesiones. • CSC: Tanto en las actividades grupales cuando se fomenta el compañerismo y el trabajo en equipo como en el resto de las horas de clase al fomentar valores como la tolerancia y el respeto a la diversidad. • AA: Se potenciará en todo momento la importancia del trabajo en casa y se aportarán algunos enlaces o bibliografía que pueden consultar de manera individual para ampliar su conocimiento. En este caso, se les instará a buscar ejemplos de la vida cotidiana de experimentos deterministas. • SIEE: Se incitará a los estudiantes a buscar noticias en las que se use el concepto de probabilidad. Probabilidad de que un partido político gane unas elecciones, probabilidad de que un delantero marque a un determinado equipo, etc.

Unidad didáctica desarrollada

En el presente apartado se incluyen las competencias, contenidos, criterios de evaluación, indicadores de logro asociados y estándares de aprendizaje de la unidad didáctica cinco “sistemas de ecuaciones”, la cual se desarrollará en 13 sesiones (3 semanas y un día).

Unidad didáctica 5: Sistemas de ecuaciones	Bloque 2: números y álgebra
Contenidos	
• Planificación del proceso de resolución de problemas. • Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc. • Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. • Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y	

afrontar las dificultades propias del trabajo científico.

- Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Criterios de evaluación e indicadores de logro asociados

Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.

1. Razonar sobre la validez de la respuesta a la que ha llegado tras la utilización de algunos de los métodos vistos en el aula.

Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.

2. Adoptar una actitud positiva ante situaciones desconocidas que se planteen en el aula, así como mostrar motivación hacia la resolución de las mismas.

Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático

3. Emplear las herramientas matemáticas explicadas en el aula con el fin de resolver problemas matemáticos de la vida cotidiana.

Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado, extrayendo la información relevante y transformándola.

4. Traducir situaciones de contextos cercanos a expresiones algebraicas y simplificarlas.

Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, ecuaciones sencillas de grado mayor que dos y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos, valorando y contrastando los resultados obtenidos

5. Definir ecuación lineal con dos incógnitas.
6. Definir solución de una ecuación lineal con dos incógnitas.
7. Transformar una ecuación lineal con dos incógnitas en una recta.
8. Definir sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

9. Definir solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
10. Definir sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas equivalentes.
11. Clasificar los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en función del número de soluciones.
12. Resolver gráficamente sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
13. Comprender el concepto de punto de corte de dos rectas.
14. Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de sustitución.
15. Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de igualación.
16. Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de reducción.
17. Comprender el porqué de la elección de cualquiera de los tres métodos de resolución a la hora de abordar un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
18. Resolver problemas de enunciado con la ayuda de sistemas de ecuaciones lineales.
19. Buscar relaciones y/o recordar conocimientos de otras áreas de las matemáticas para plantear sistemas de ecuaciones en la resolución de problemas.

Estándares de Aprendizaje

- Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.
- Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.
- Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada.
- Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.
- Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares.
- Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido.

Competencias

- CCL: el alumnado mejorará su capacidad de expresión oral a través de las actividades grupales y de sus intervenciones diarias en el aula. Será frecuente en las primeras sesiones el planteamiento de preguntas de verdadero o falso en los últimos 5 minutos de la clase, debiendo defender el alumnado su postura sobre si la afirmación hecha por el profesor es o no cierta.
- CMCT: Está presente en todo momento. Se desarrolla en cada una de las sesiones.
- CSC: Tanto en las actividades grupales cuando se fomenta el compañerismo y el trabajo en equipo como en el resto de las horas de clase al fomentar valores como la tolerancia y el respeto a la diversidad. En la actividad grupal de contraejemplos se procurará que los alumnos con mejores calificaciones ayuden a aquellos con más dificultades.
- AA: Se potenciará en todo momento la importancia del trabajo en casa y se aportarán algunos enlaces o bibliografía que pueden consultar de manera individual para ampliar su conocimiento. En este caso, se les aportarán enlaces con información biográfica del matemático Évariste Galois.
- SIEE: La resolución de un ejercicio de nivel más elevado que los que se acostumbran a hacer en clase y puramente teórico. En este caso, dicho ejercicio será el siguiente: "Si despejando la misma incógnita en dos ecuaciones, y una vez igualadas, no se puede resolver la ecuación con una incógnita: ¿Se trataría de un sistema compatible indeterminado o incompatible?"

Metodología

A la hora de impartir cada una de las unidades de las que consta la programación didáctica propuesta, se seguirá el método de la enseñanza expositiva. Siguiendo la teoría del aprendizaje asimilativo de Ausubel, se presenta al alumnado una información en su forma final, combinando las formas primarias de una explicación (enunciar un teorema, introducir una definición, explicar un contraejemplo, preguntar a los alumnos por ejemplos concretos que cumplan una propiedad, etc.) con formas secundarias (realizar ejercicios prácticos, repetir la explicación de un concepto cuando este no ha sido entendido, etc.).

Habrá sesiones dedicadas únicamente a “teoría” en las que se seguirá el siguiente esquema: definición, ejemplo, nota y contraejemplo. Como ejemplo, se incluye a continuación un fragmento de la primera sesión de la unidad didáctica dedicada a sistemas de ecuaciones lineales se seguirá este modelo:

- Repaso del concepto ecuación lineal con dos incógnitas (organizador previo).
- Definición de sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Ejemplo de sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Preguntar al conjunto de la clase si ha entendido el concepto y el ejemplo asociado.
- Buscar otro ejemplo de sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Definición del concepto solución de sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Ejemplo en el que se presenta un sistema y un par de valores. El alumno debe demostrar que ese par no se corresponde con la solución del sistema.
- Nota: los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican en función del número de soluciones.

El hecho de que el método de enseñanza seleccionado sea el de clase expositiva no implica que no se empleen metodologías activas ni trabajos en grupo; de hecho, y una vez se les ha entregado la correspondiente prueba individual calificada y se les haya explicado la técnica del contraejemplo, se pondrá en marcha una actividad grupal en la que, generalmente en grupos de cuatro, deberán encontrar los errores de un examen “ficticio” (los errores coinciden con los cometidos con mayor frecuencia por ellos) y justificar su decisión proponiendo contraejemplos que hagan ver que ese razonamiento es incorrecto. Se tratará en todo momento de formar grupos heterogéneos. Consumidos los 40 minutos aproximados, tendrá lugar un debate en el que el representante de cada grupo explicará al resto los errores que han encontrado y los contraejemplos elegidos. En el anexo del trabajo se incluye la actividad de contraejemplos confeccionada para la unidad didáctica sistemas de ecuaciones.

De la misma manera, y generalmente después de la celebración de la prueba individual correspondiente, se organizará otra actividad grupal con el mismo criterio de agrupamiento que la anterior consistente en un taller de problemas con una dificultad superior a los practicados en el aula. Estos problemas no sólo requieren de los contenidos aprendidos en la unidad más reciente, también serán necesarios conceptos de unidades anteriores para dar con la solución. El grupo ganador será el que halle la solución en el menor tiempo posible.

A continuación se enumeran otras cuestiones importantes a tener en cuenta acerca de la metodología:

- Se apostará en todo momento por un aprendizaje significativo y alejado del aprendizaje memorístico de algoritmos y fórmulas.
- Se tendrán en cuenta las ideas y aportaciones de los alumnos en todo momento, tratando de generar debates entre ellos que repercutan en su capacidad de argumentación.
- A través del Plan de Lectura, Escritura e Investigación se favorecerá el conocimiento de la historia de las matemáticas del alumnado.
- En cada una de las unidades didácticas se propondrán actividades que fomenten la reflexión y estimulen el pensamiento matemático.
- El empleo de las TIC como apoyo de la asignatura. El uso de programas como Rcommander para trabajar con pequeñas bases de datos tiene por objetivo mostrar al alumnado una de las múltiples aplicaciones que las matemáticas, tan conectadas con la informática, tienen en el mundo real, y más a día de hoy, donde sectores como la empresa reclaman matemáticos.
- Se potenciará en todo momento que el alumno participe en el aula y salga a la pizarra a exponer sus ideas.
- Fomentar el trabajo en equipo y el compañerismo mediante actividades grupales.
- Tratar de contextualizar los problemas de enunciado, escogiendo temas que puedan resultar de interés para la clase.
- El papel que la tutoría entre iguales puede jugar en la mejora de resultados académicos por parte de un alumno que no ha obtenido buenas calificaciones es destacable. Al final de cada trimestre, y en virtud de las calificaciones

obtenidas por cada alumno, se reestructurará la disposición del alumnado en el aula, sentando en parejas o en tríos a alumnos cuya nota ha sido baja con otros cuyo rendimiento en la materia esté siendo el adecuado. Se encomendará a aquellos alumnos con mejor trayectoria a prestar ayuda a los que, por diversas razones, no han logrado aprobarla en un trimestre o en dos.

- La pérdida del temor por parte del alumnado a enfrentarse a demostraciones y a comprender sencillas propiedades o fórmulas matemáticas como la fórmula de las soluciones de la ecuación de segundo grado es uno de los principales propósitos de esta programación. Entre las actividades complementarias está prevista una denominada "encuentra el fallo en la demostración" que premiará a aquellos estudiantes que den con los gazapos de un proceso de demostración elegido mensualmente. A todo ello hay que incluirle que en las clases expositivas se demostrarán algunas cuestiones como las fórmulas de las identidades notables o la fórmula de la suma de n términos de una progresión aritmética.

Una vez se han descrito estas consideraciones metodológicas generales, se procederá a desglosar en función de la unidad didáctica las diferentes actividades que se llevarían a cabo, prestando especial atención a las desarrolladas en la unidad didáctica 5 "Sistemas de ecuaciones".

Para la primera unidad didáctica "Fracciones y decimales" se plantea la siguiente actividad: para explicar el hecho de que los números racionales amplían el conjunto de los números enteros y, a su vez, el de los naturales, se dedicará una sesión en uno de los primeros días a la puesta en escena de una representación en la que los estudiantes, repartidos en tres grupos, interpretarán los papeles de números naturales, enteros y racionales. El primer grupo, los números naturales, comenzará la actuación enunciando algunas de sus propiedades y ejemplos de números naturales; seguidamente, los enteros harán su aparición procediendo de igual modo para después, finalmente, dar entrada a los racionales, que serán el objeto de estudio d la unidad.

Como ejemplo de problemas y actividades tipo de la unidad se muestran las siguientes:

- Indicar si las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{10}{18}$ son equivalentes

- Calcular: $\frac{7}{5}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{4}{5}$

En el caso de la segunda unidad didáctica “Potencias y raíces” y, una vez finalizada la unidad, en la sesión anterior al exámen, se propondrá un juego del tipo ‘¿Quién es quién?’. Los alumnos se sentarán de dos en dos y se les entregará a cada uno un pequeño trozo de papel con un número irracional apuntado. Cada uno deberá adivinar su número realizando un número máximo de cuatro preguntas.

A continuación se muestran algunos problemas tipo y cuestiones que se trabajarán a lo largo de la unidad:

- Expresa como una única potencia: $\frac{7^3\cdot 14^2\cdot 21^5}{28^2}$
- Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser falsas, justifica tu respuesta.

1. La suma de dos números irracionales es un número irracional
2. El producto de un número racional y otro irracional es un número irracional.

En lo que respecta a la unidad didáctica “El lenguaje algebraico”, se llevará a cabo una actividad grupal al finalizar el temario en la que, en equipos de cuatro, los alumnos deberán rellenar un rosco de ‘pasapalabra’ con definiciones de conceptos de esta unidad. El equipo que antes complete el rosco, gana. Un ejemplo sería el siguiente: “Con la s: dícese de los monomios que tienen la misma parte literal”.

Como ejemplos de cuestiones que se trabajarán a lo largo de la unidad, se ofrecen los siguientes:

- Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. El polinomio x^3+5x^2-x-5 no se puede factorizar como producto de polinomios de grado uno.
2. La fracción algebraica $\frac{x^2-27}{x+3}$ es irreducible.

Para la cuarta unidad didáctica “Ecuaciones de primer y segundo grado” se plantea la celebración de un taller de problemas dos sesiones antes de la sesión de la prueba escrita. Se agrupará al alumnado en cuatro equipos diferentes, disponiendo de 35 minutos para resolver tres problemas de dificultad dispar.

El equipo que acabe primero, y siempre que estén los tres problemas bien resueltos, saldrá a la pizarra a resolverlos y recibirá a cambio una pequeña recompensa. Asimismo, y una vez hayan hecho el examen y conocido su calificación, tendrá lugar otra actividad grupal, esta vez sobre contraejemplos. los estudiantes, a partir de un examen ficticio conteniendo los errores más comunes observados en la prueba individual de lenguaje algebraico y resolución de ecuaciones, deberán averiguar los pasos incorrectos cometidos en cada una de las cuatro preguntas y encontrar contraejemplos que evidencien los fallos.

A modo de ejemplo de ejercicios típicos y actividades que se propondrían en el resto de sesiones, ilustramos los siguientes:

- Resolver la siguiente ecuación: $(2x+1)(2x-1)+x^2=(x-3)^2+x-1$
- Calcula las dimensiones del estadio de Vallecas si la distancia del córner derecho de la grada sur al córner izquierdo de la grada norte es de 120.37 metros y el largo del campo mide 33 metros más que el ancho.

En la unidad didáctica 6 "Progresiones", en una de las últimas sesiones previa al examen, se llevará a cabo un divertido juego que estará ambientado en una historia ficticia del centro. Los alumnos, repartidos en grupos de cuatro, recibirán un papel que contendrá hasta cinco sucesiones distintas con algunos números desconocidos que se corresponden con el código secreto del IES. A través de pequeñas pistas, que pueden ser desde la suma de los n términos hasta el producto de los mismos, deberán completarlo para liberar al alumno que lleva 20 años atrapado en el departamento de Matemáticas.

En las restantes sesiones los estudiantes se enfrentarán a actividades de este tipo:

De una progresión geométrica se conoce que su primer término es 5 y su tercero 125. Calcular la razón y la suma de los seis primeros términos. ¿Cuántas progresiones hay?.

En el caso de la séptima unidad didáctica "Geometría plana. Lugares geométricos", y dado que la parte correspondiente a lugares geométricos está cargada de definiciones, se volvería a poner en práctica, siempre que hubiera tenido éxito, la actividad planificada para la unidad didáctica número tres: un rosco de pasapalabra incluyendo las definiciones más relevantes, como por ejemplo: “con la m, lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus extremos”.

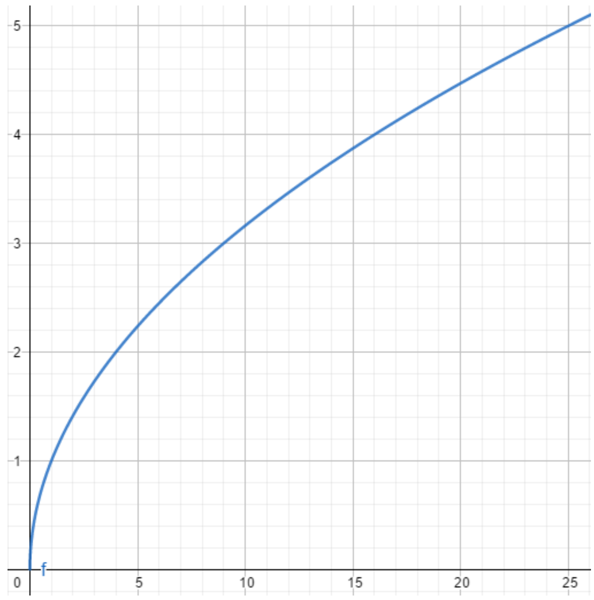
A continuación se muestra un problema tipo que se incluiría en la unidad:

- Define como lugar geométrico una circunferencia de centro C y radio 4.

Con respecto a la octava unidad didáctica “Elementos de una función. Estudio de gráficas”, una de las actividades que se propondría al alumnado sería la siguiente: los estudiantes, divididos en parejas, deberán seleccionar una gráfica que hayan encontrado en un periódico o revista, explicándole a la clase la información que representa y señalando elementos importantes como los máximos relativos, mínimos relativos o el dominio de la función. Dispondrán de una semana y media para planificarla, debiendo preparar una exposición oral de ocho minutos.

Con el fin de familiarizar al alumnado con el estudio de gráficas que representan situaciones de la vida cotidiana, se prestaría especial atención a actividades como la que se muestra debajo:

La siguiente gráfica representa los miles de euros que gana el dueño de un restaurante de comida catalana (eje y) a lo largo de los primeros 25 días de verano (eje x)



- ¿En qué momento alcanza los máximos beneficios?
- ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Y el recorrido?

Las unidades de “Estadística descriptiva” y “Probabilidad. Sucesos aleatorios y deterministas” se prestan especialmente a la organización de actividades prácticas que son del agrado de gran parte del alumnado. En el caso de la primera, se propondrá al alumnado realizar, de manera individual, una encuesta a sus familiares y amigos sobre los tres equipos de primera división que mejor les caen. Además de indicar la moda de la variable, deberán escoger la representación gráfica que mejor se ajuste a esa información (gráficos de sectores, histogramas, etc.). Podrán usar Excel, Rcommander o SPSS para hacer la representación gráfica. El margen para hacer la tarea será de una semana y media, debiendo posteriormente exponer el trabajo en clase.

Una de las actividades que se incluirían en la unidad de probabilidad versaría sobre la ley de Laplace. Tras la correspondiente sesión teórica, se llevará a cabo una actividad en la que, divididos en dos grupos, los alumnos deberán encontrar experimentos aleatorios en los que sea aplicable esta ley. El grupo que elabore el listado más amplio gana.

A continuación se muestran algunos problemas tipo y cuestiones que se trabajarán a lo largo de las dos unidades:

1. Las temperaturas registradas en la ciudad de Jaén los 8 últimos días a las 19:00 son: 40º,38º,34º,38º,41º,39º,40º,37º: calcula la media en esos 10 días y la desviación típica: ¿ Consideras que ha habido mucha variación de temperatura?. Escoge la representación gráfica más adecuada para representar los datos. Introduce los datos anteriores en Rcommander o SPSS y calcula, si es posible, los siguientes parámetros estadísticos: mediana, varianza y moda.
2. En la urna en la que se deciden los octavos de final de la UEFA Europa League hay 16 equipos, de los cuales 4 son españoles (Racing de Santander, Villarreal, Valencia y Atlético), 3 ingleses, 3 franceses, 2 húngaros y 4 rusos. Tras extraer la bola del Racing de Santander, y sabiendo que no le puede tocar ningún equipo español, los aficionados cántabros desean conocer la probabilidad de que:
    - Le toque un equipo inglés
    - Le toque un equipo húngaro o francés

- No le toque un equipo ruso
- Le toque un equipo inglés y al Valencia también

Con respecto a la unidad que en el presente trabajo se desarrolla (unidad 5, sistemas de ecuaciones), se incidirá sobremanera en los conceptos preliminares. De cara a comprobar la comprensión de los conceptos: "solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas", sistema compatible determinado y sistema compatible indeterminado, en los últimos cinco minutos de la primera sesión se formularán las siguientes cuestiones de V o F para que el alumnado responda oralmente:

- El par (1,0) es solución del sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-3y=2 \end{cases}$
- ¿Es la ecuación $y+x^2=6$ una ecuación lineal?

En las sesiones 6,7 y 8 se realizaran ejercicios de repaso de los contenidos teóricos vistos hasta entonces. Además de los clásicos de resolución de sistemas, se pondrá especial énfasis en el siguiente tipo de actividades:

¿Qué valores deben de tomar $c\ y\ d$ para que este sistema no tenga solución?

$$\begin{cases} 2x-y=c \\ 4x-2y=d \end{cases}$$

Además de una actividad grupal sobre contraejemplos en la que cuatro alumnos por grupo deberán encontrar los errores de un examen y plantear contraejemplos que evidencien cada error, se celebrará una actividad grupal similar a la prevista en el caso de la unidad didáctica anterior (resolución de ecuaciones de primer y segundo grado); en cuatro grupos diferentes, los alumnos deberán resolver dos problemas con una dificultad superior a los trabajados en clase y que exigirán de ingenio; a continuación mostramos uno de los que se incluirían:

"Seis personas *a,b,c,d,e* y *f* están sentadas en una mesa redonda, teniendo *a* a *b,d y* e a su derecha y al resto a su izquierda. Cada persona escribe un número y se lo enseña a las dos que tiene a s lado. Después cada uno dice en voz alta la media de los dos números que le han enseñado. Si los resultados fueron 5,6,7,8,9 y 10, ¿Qué números escribieron?".

En la sesión dedicada a usar contraejemplos se incluirán los problemas que aparecen en el anexo del presente trabajo.

A continuación aparecen desgranados cada uno de los trece días (tres semanas y un día) dedicados a impartir la unidad sistemas de ecuaciones. Como se puede comprobar, los tres primeros días estarán especialmente focalizados a la comprensión de la parte teórica por parte del alumnado mientras que las siguientes sesiones están orientadas a la práctica de los conocimientos adquiridos, haciendo hincapié en la resolución de problemas de enunciado contextualizados y ejercicios de carácter más "teórico".

- Día 1: Presentación del tema. Repaso del concepto "ecuación lineal" y representación de rectas a partir de su ecuación general y noción de solución de ecuación lineal. Hecho este repaso, cuyo tiempo estimado es de 15 minutos, pasaremos a definir los conceptos de sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y de solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Una vez introducidos estos conceptos, pasaríamos a establecer una clasificación de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en función del número de soluciones y a relacionar el concepto de solución "aritmética" con la interpretación gráfica de la posición relativa de las dos rectas. Resolución gráfica de sistemas. Todo ello nos llevaría, realizando ejemplos y atendiendo dudad, por supuesto, otros 35 minutos. Los últimos 5 minutos se dedicarán a la realización de un cuestionario oral de "Verdadero" o "Falso" sobre las cuestiones teóricas tratadas.
- Día 2: Repaso de los tres métodos principales de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas ilustrándolos con sus respectivos ejemplos y comparando resultados. Esta parte llevará unos 40 minutos, destinando los últimos 15 a introducir el concepto de sistemas equivalentes y a resolver dudas sobre el método de resolución gráfica.
- Día 3: Repaso de toda la teoría vista hasta el momento y propuesta de ejercicios variados: concepto de solución, clasificación de sistemas en función del número de soluciones, representación gráfica de dos rectas, métodos de

sustitución, igualación y eliminación, etc. La duración estimada de estas actividades será de 50 minutos, si bien parte del tiempo se aprovechará para solucionar dudas.

- Día 4: Breve introducción al concepto de ecuación no lineal y al concepto de solución de ecuación no lineal. Ejemplos de ecuaciones no lineales y modos de resolverlas, si bien esta última parte no entrará en la prueba individual. Tras 40 minutos explicando cada una de estas partes, el alumnado dispondrá de 15 minutos para resolver ejercicios sobre sistemas de ecuaciones lineales.
- Día 5: Resolución de problemas mediante sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Al principio de la clase, durante 5 minutos, se pondrán ejemplos al alumnado sobre situaciones de la vida cotidiana en las que sea necesario usar sistemas de ecuaciones. Tras este preámbulo, pasaríamos a enumerar los pasos que se deben seguir a la hora de plantear un problema, lo cual nos llevará aproximadamente 12 minutos. Presentado este modelo, pasaríamos a resolver conjuntamente cuatro problemas variados: uno de mezclas, otro de porcentajes, otro en el que sea preciso utilizar las ecuaciones del Movimiento Rectilíneo Uniforme y un ejemplo de problema aplicado a la vida cotidiana en el que se hace uso de los sistemas de dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas para calcular las dimensiones del terreno de juego del Santiago Bernabéu. Todo ello llevará 38 minutos. La quinta unidad ha llegado a su fin.
- Días 6,7 y 8: Repaso de todos y cada uno de los conceptos vistos. El repaso se llevará a cabo mediante la selección de una serie de ejercicios que pongan a prueba la comprensión de los alumnos sobre el tema: sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes racionales, clasificación de sistemas en función de valores desconocidos, preguntas de verdadero o falso y problemas de niveles variados.
- Día 9: Examen de la unidad didáctica “Sistemas de ecuaciones lineales”. La duración del examen será de una hora y media y constará de 6 preguntas: una pregunta de teoría V o F en la que el alumno deberá justificar sus respuestas; una pregunta en la que deberán resolver gráficamente un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y clasificarlo en función del número de soluciones; dos sistemas de ecuaciones: uno que deberán resolver por

sustitución y otro por igualación. En el segundo caso los coeficientes no serán enteros, sino racionales; por último, dos problemas en los que deberán usar sistemas de ecuaciones lineales para llegar a la solución. Muy probablemente uno sea de mezclas y otro de porcentajes.

- Día 10: Los alumnos recibirán corregido el examen que hicieron en la anterior sesión, dejándoles 15 minutos para que comprueben si hay algún error en la suma de las calificaciones parciales y para que pregunten cualquier tipo de duda que les surja. Explicación del concepto “contraejemplo” y su utilidad para evitar cometer los errores más típicos relacionados con resolución de ecuaciones de primer grado, propiedad distributiva, simplificación de fracciones, ecuaciones equivalentes y representación gráfica de sistemas. Esto último llevará, aproximadamente, 40 minutos.
- Día 11: Se llevará a cabo una actividad grupal consistente en un “taller de problemas”. Los alumnos, divididos en grupos pequeños, deberán encontrar la solución de dos problemas especialmente complicados que implican el uso de conceptos vistos en unidades anteriores como el cálculo del término n-ésimo de una progresión aritmética. La actividad tendrá una duración de 55 minutos.
- Día 12: Se celebrará de nuevo otra actividad grupal. En este caso, los alumnos, en grupos de 3, deberán encontrar los errores que hay en los exámenes “ficticios” que se les han entregado y, para cada uno de los errores, deberán proponer un contraejemplo. La duración estimada de la actividad es de 40 minutos.
- Día 13: para finalizar la unidad, y antes de dar comienzo al siguiente tema, los alumnos deberán hacer un pequeño test de 4 preguntas para comprobar si han enmendado los errores conceptuales cometidos en el examen. La estructura de la prueba la conformarán 4 afirmaciones falsas que deberán desmontar usando un contraejemplo y escribiendo al lado la respuesta correcta. El test no durará más de 30 minutos.

Recursos didácticos

Cabe distinguir una serie de recursos que se emplearán a la hora de impartir todas y cada una de las unidades didácticas y otros más específicos que se reservarán para determinadas unidades didácticas.

Al primer grupo pertenecerían los siguientes recursos:

- Libro de texto de referencia, que en este caso pertenece a la editorial Anaya.
- Calculadora científica.
- Materiales didácticos elaborados por el profesor. Apuntes personalizados que incluyen ejemplos, representaciones gráficas o definiciones no incluidas en el libro de texto y que pueden ser de gran ayuda.
- Modelos de resolución de exámenes de cursos anteriores para que el alumnado esté familiarizado con el tipo de cuestiones que se pueden preguntar.
- Páginas web y bibliografía complementaria acorde a cada una de las unidades didácticas.
- Pizarras digitales y clásicas.
- Aulas amplias y bien iluminadas.

El centro ha de disponer de ordenadores que tengan instalados los siguientes programas y aplicaciones:

- Wiris
- Rcommander
- Excel
- SPSS
- GeoGebra
- Microsoft office PowerPoint 2019

Wiris se empleará especialmente en las cuatro primeras unidades didácticas con el fin de que el alumnado, una vez domine los diferentes conceptos y algoritmos, pueda realizar las correspondientes comprobaciones en poco tiempo. Se dedicará una sesión al final de las unidades 2 y 4 para manipular este programa.

Geogebra cobrará especial importancia a la hora de introducir al alumnado en el estudio de funciones. A través de la representación de una función se pedirá a los estudiantes que señalen sus características principales: dominio, recorrido, simetría, máximos y mínimos locales, etc. Asimismo, y tras la finalización de la unidad, se dedicará una sesión a explicar los comandos principales para la representación gráfica de funciones.

Excel, SPSS y Rcommander tendrán un papel destacado en la unidad didáctica 9. Los alumnos y alumnas aprenderán la manera de exportar los datos de una hoja de Excel a Rcommander y SPSS y, por medio de comandos como mean, median o mode, extraer conclusiones relevantes sobre los mismos. Asimismo, aprenderán a realizar gráficos de barras, diagramas de caja e histogramas tanto en Rcommander como SPSS.

De hecho, una de las actividades previstas en el capítulo "actividades complementarias y extraescolares" requerirá el uso de al menos uno de estos programas. En el aula virtual, no obstante, se incluirá un manual de Rcommander que incluya los comandos esenciales para el estudio de una muestra y su posterior representación.

Para la puesta en marcha de la presente programación también será necesario un proyector. Si bien en la mayor parte de las sesiones será suficiente con la pizarra tradicional o el uso de la sala de ordenadores, en las primeras clases introductorias de cada tema podría ser necesario para acceder a alguna página web que contuviera información interesante relativa a historia de las matemáticas. Para la parte de geometría y estudio de funciones puede resultar de gran ayuda el uso de hojas cuadriculadas, así como instrumentos de dibujo técnico tales como: escuadra, porta ángulos, cartabón y regla.

Procedimientos, instrumentos y criterios de calificación del aprendizaje del alumnado

La evaluación del aprendizaje de los alumnos y alumnas respecto a la presente programación didáctica será continua y se realizará teniendo en cuenta los objetivos generales de la etapa y los específicos de la materia, tomando como referencia los indicadores concretados encada una de las diez unidades didácticas que componen esta programación.

A lo largo de las sesiones se tendrá en cuenta el grado de implicación del alumnado, reflejándose este en la realización de las actividades propuestas así como en las intervenciones en el aula. La asistencia a clase se considera obligatoria y fundamental para que los estudiantes puedan alcanzar tanto los objetivos generales como los específicos de la materia.

En el proceso evaluador se tendrán en cuenta ciertos aspectos, entre los que podemos señalar: la capacidad de cálculo, la capacidad de síntesis y análisis, la producción de sencillas demostraciones matemáticas y propuesta de contraejemplos, etc. Otro aspecto a tener en cuenta será el sentido crítico, pretendiendo que el alumno sepa manejar lo mejor posible las informaciones de las que dispone en los enunciados y distinguiendo en todo momento entre aquellos datos relevantes y aquellos que no lo son.

Hecha esta breve introducción, a continuación se indican los instrumentos de recogida de información que se tendrán en cuenta a la hora de evaluar el aprendizaje de los estudiantes:

- Participación del alumnado en las actividades, actitud positiva respecto a la asignatura y resolución en la pizarra de ejercicios propuestos.
- Trabajos individuales y en equipo. Además de la comprobación y puesta en práctica de destrezas matemáticas, se observará en todo momento la colaboración, solidaridad y espíritu emprendedor de los componentes de cada grupo. La capacidad para debatir y argumentar en las tareas grupales también se valorará.
- Realización de pruebas individuales escritas. Cada trimestre se fecharán dos pruebas que, en la mayoría de los casos, englobarán dos unidades didácticas. A través de estas pruebas se comprobará el grado de adquisición de los contenidos impartidos en las unidades didácticas, así como aquellos conceptos susceptibles de resultarles dificultosos.

Con respecto a los criterios de calificación, la calificación final de la asignatura Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas se obtendrá de la siguiente forma:

- La participación del alumnado (realización de preguntas, intervenciones en el aula, interés y actitud positiva hacia la asignatura y resolución de problemas y cuestiones en la pizarra) supondrá un **20%** de la calificación final.
- La realización de trabajos individuales y en equipo y la participación y resolución de los problemas y retos planteados durante la actividad grupal sobre contraejemplos que se celebra dos sesiones después a la de la prueba escrita correspondiente aportará otro **20%** a la calificación final.
- Las dos pruebas escritas que se llevarán a cabo en cada uno de los tres trimestres tendrán un peso del **60%** en la calificación final. A ese 60% se le deberá multiplicar la media aritmética de las dos calificaciones de las pruebas individuales para obtener la parte de calificación trimestral correspondiente a los exámenes.
- En aquellos casos en los que un alumno o alumna obtenga una calificación menor que 5 en alguno de los trimestres, tendrá la oportunidad de recuperar esa parte tres semanas después de la entrega del boletín de notas. Además del examen, se le hará entrega de un listado de actividades, debiendo hacer únicamente aquellas recomendadas por el docente. El peso de las actividades será del 45% y el restante de la prueba.

En lo que respecta a las pruebas escritas, generalmente estarán compuestas por cinco preguntas, de las cuales cuatro serán de respuesta abierta y la restante o bien de respuesta múltiple o bien de verdadero o falso. Conviene remarcar que será requisito indispensable acompañar cada respuesta de su correspondiente justificación, y que esta debe estar bien argumentada.

A la hora de calificar las cuatro preguntas de respuesta abierta, se tendrán en cuenta una serie de factores:

- Utilización apropiada de signos, símbolos y lenguaje matemático en cada respuesta.
- El desarrollo detallado de los algoritmos empleados para resolver un problema.
- La gramática y la ortografía mostradas a lo largo de la prueba.

- La limpieza en el trazo y la precisión de las representaciones geométricas y gráficas.
- La exactitud a la hora de enunciar una definición o una propiedad.
- La correcta expresión escrita.

Sobre los trabajos individuales y grupales, se valorarán favorablemente los siguientes aspectos:

- Originalidad.
- Calidad gramatical y ortográfica.
- Corrección en el uso de símbolos y terminología matemática.
- Buena presentación.
- La inclusión de diversas estrategias y su correspondiente explicación para resolver un problema.
- Ejemplificación de los argumentos empleados.

En el transcurso de la actividad grupal en el aula sobre contraejemplos, se valorará especialmente la motivación del alumnado y la capacidad de razonamiento. Asimismo, el compañerismo y la habilidad para trabajar en equipo tendrán una influencia destacable en la calificación de cada una de estas sesiones. En esta actividad evidentemente importa la calidad de la solución aportada, pero adquiere aún más peso el hecho de que los alumnos lo intenten y diseñen estrategias conjuntas para abordar los problemas.

Sobre el 20% correspondiente a participación del alumnado y resolución en pizarra de problemas se tendrán en cuenta tanto las aportaciones, preguntas y actitud de los estudiantes como el hecho de haber intentado resolver el problema, con independencia del resultado final. No se trata tanto de valorar la perfección en la ejecución y resolución de los problemas, sino de tener en cuenta el esfuerzo realizado y las ganas de mejorar del estudiante. Con esto se pretende motivar al alumnado a mejorar y hacerle ver que, si se esfuerza, puede progresar adecuadamente en la materia.

Medidas de refuerzo y atención a la diversidad

Debemos entender la atención a la diversidad como un conjunto de actuaciones que favorezcan el proceso de enseñanza-aprendizaje del alumnado y que respondan a sus necesidades. El Decreto 43/2015 diferencia dos tipos de medidas: medidas de carácter ordinario (afectan a todo el alumnado) y medidas de carácter singular (las asociamos generalmente a los alumnos con necesidades educativas especiales).

En líneas generales, las medidas ordinarias que se deben contemplar son las siguientes:

- Adaptación de la metodología empleada para impartir la asignatura, así como el uso de materiales complementarios; todo ello sin que implique modificar
- Agrupamientos flexibles.
- Desdoblamientos de grupo.
- Apoyo en grupo ordinario.
- Docencia compartida.
- El agrupamiento de las materias del primer curso ESO en ámbitos de conocimiento.

En el primer caso, la sustitución de una técnica de aprendizaje asimilativo por una técnica de aprendizaje por descubrimiento podría ser una medida a tener en cuenta, y más en los casos en los que se tenga que aprender el conjunto de pasos que componen un algoritmo como la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de sustitución.

La realización de apoyos en el aula en pequeño grupo o individuales también se contempla, pues constituye una medida de gran eficacia a la hora de que el alumno adquiera los conocimientos esenciales de la materia en la que tiene dificultades, que en este caso sería Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas.

La docencia compartida, por su parte, facilita la atención individualizada del alumnado, al que en muchas ocasiones es difícil prestar la atención que merece como consecuencia del número elevado de miembros en un aula y del poco tiempo del que se dispone en cada sesión.

En cualquier caso, y con la intención de atender de una manera personalizada a todo aquel alumno con carencias en la asignatura, se pondrían en marcha alternativas como destinar la media hora de recreo a tutorías individualizadas o colectivas.

Para aquellos casos de alumnos de NEE (necesidades educativas especiales) resulta especialmente conveniente mantener una comunicación fluida con sus familiares, tutora y Departamento de Orientación con el fin de encontrar las

En el caso de contar con alumnos/as con Síndrome de Asperger, pueden resultar satisfactorias algunas de las siguientes medidas:

- Concederles tiempo extra para finalizar sus tareas y exámenes.
- Tener en cuenta las dificultades que pudieran tener para entender bromas o expresiones no literales. Utilizar un vocabulario claro y que no admita ambigüedades.
- Premiarles cuando entreguen las tareas tal y como les hemos encomendado. En estos casos puede ser interesante hacer uso de reforzadores como la economía de fichas.
- Habilitar un aula al que puedan acceder cuando sufran ataques de ansiedad.
- Sentarles junto a compañeros responsables y que se encarguen de anotar en su agenda las tareas del día a día.
- Generalmente son alumnos con mucho interés por la informática. Las matemáticas y la informática están estrechamente ligadas, por lo que podemos captar su interés comprometiéndonos a enseñarle algún lenguaje de programación como Matlab o Python.
- Ofrecerles en todo momento instrucciones claras y sencillas tanto en exámenes como en las tareas diarias.

Como se ha mencionado anteriormente, resulta oportuno simplificarles las tareas a través de instrucciones claras. Cada enunciado podemos convertirlo en una sucesión de pequeños enunciados a los que deberá dar respuesta para llegar a la solución correcta. Veamos un ejemplo relacionado con la unidad didáctica sistemas de ecuaciones:

“El perímetro de un rectángulo es de 40 cm. Si su base mide el doble que su altura: ¿Cuánto miden sus lados? “

La forma en la que podríamos presentarle las instrucciones para resolver el problema sería la siguiente:

1. Representa un rectángulo
2. Asígnale una incógnita a cada lado
3. Plantea una ecuación lineal con dos incógnitas que relacione el perímetro con la medida de los lados.
4. Plantea otra ecuación que relacione la altura del rectángulo con su base.
5. Utiliza el método de reducción para resolver el sistema.
6. Escribe la solución, asignándole a cada incógnita las unidades correspondientes.

Respecto a los alumnos de altas capacidades, tanto el programa de enriquecimiento curricular como la ampliación curricular o la flexibilización del periodo escolar deben contemplarse. En el primer caso, se podrían planificar actividades o talleres en horario extraescolar en los que, de una forma más distendida, se trabajaran contenidos del currículo. Como ejemplo, y relativo a la unidad didáctica sistemas de ecuaciones, podría proponerse una tarea de carácter lúdico consistente en averiguar qué sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas son equivalentes. Se le entregarían al estudiante seis fichas con un sistema en cada una de ellas, debiendo emparejar aquellos que son equivalentes. Tras esto, se le propondría un reto: resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas empleando cualquiera de los tres métodos de resolución vistos para los casos de dos ecuaciones con dos incógnitas.

En relación a la ampliación curricular, si al alumno o alumna le interesan especialmente las matemáticas, podría recomendársele diferentes lecturas, tanto en español como en inglés, sobre historia de las matemáticas y aplicaciones de las matemáticas a otras disciplinas. Libros como “¿Puede pensar una máquina?” de Alan Turing constituyen acicates para satisfacer su curiosidad. Otros recursos a tener en cuenta son los manuales de introducción a lenguajes de programación. En el caso de la unidad didáctica sistemas de ecuaciones podría explicársele la forma de introducir una matriz de coeficientes o utilizar el comando solve en Matlab u Octave, así como proponerles retos del tipo: "construye un algoritmo que resuelva cualquier sistema compatible determinado y que devuelva 'false' cada vez que se introduzca un sistema incompatible". De esta forma no sólo estarían mejorando sus habilidades en programación, sino que también descubrirían conceptos de cursos superiores como matriz de coeficientes, vector de términos independientes, matriz ampliada, método de Gauss, etc.

Por último, y de cara a facilitar la adaptación del alumnado de incorporación tardía al sistema educativo, se deberán contemplar las siguientes actuaciones:

- Aulas de acogida.
- Flexibilización del período de escolarización.
- Aulas intensivas de inmersión lingüística.
- Tutoría de acogida.

Para comprobar la competencia curricular del alumno de reciente incorporación, y previa consulta con el orientador del centro y jefatura de estudios, se elaborará una breve prueba inicial con los contenidos vistos hasta el momento a lo largo del curso que servirá como instrumento para evaluar aquellos conocimientos que ya tiene adquiridos y los que, por el contrario, le resultan novedosos. En el caso en el que se le asignara un/una PTSC, se efectuaría un seguimiento conjunto, acordando reunirse semanalmente para evaluar los progresos del alumno en cuestión.

Programa de refuerzo para los alumnos con la materia pendiente del curso anterior

Ante esta circunstancia plausible las actuaciones a seguir serían las siguientes:

- Al comienzo de cada trimestre el alumno deberá contactar con el profesor que impartió la materia el curso pasado para que le facilite unos apuntes conteniendo lo principal de cada tema y una batería de ejercicios (aproximadamente quince por tema) que deberá entregarle en mano o telemáticamente al docente a través del correo electrónico que este ponga a su disposición.

- Para la entrega de los ejercicios citados anteriormente se acordará una fecha. No obstante, y siempre con dos semanas de antelación, el alumno podrá modificar la misma.
- A mediados de cada trimestre, el docente concertará una reunión con los padres del alumno para conocer de primera mano la forma en la que está afrontando la materia, así como las posibles necesidades que pueda tener respecto a esta.
- Además de la entrega de actividades trimestrales, cuyo peso final en la calificación del alumno será del 60%, cada trimestre, docente y alumno se reunirán en horario extraescolar y durante no más de 40 minutos para realizar un simulacro de examen de unas características parejas al que el alumno se enfrentará a finales del tercer trimestre. Estos simulacros tendrán un peso total del 10%, siendo el 30% restante para la prueba final.

Procedimiento de evaluación de la aplicación y el desarrollo de la programación docente

Para analizar si las medias y consideraciones metodológicas recogidas en la presente programación han sido acompañadas de los resultados previstos, se establecen los siguientes indicadores:

- Se considera que un porcentaje de aprobados superior al 80% es un muy buen resultado y que, por tanto, tanto contenidos, metodología, actividades complementarias, etc. Han funcionado convenientemente.
- Si el porcentaje de aprobados se sitúa entre el 70 y el 80%, se considerará un buen resultado, si bien cabría introducir mejoras en la programación de cara al curso venidero, especialmente metodológicas.

- Si el porcentaje de aprobados es inferior al 70% y superior al 60, hablaremos de resultado aceptable, implicando una serie de cambios en la programación de cara al siguiente curso académico.
- En caso de situarse por debajo del 60%, se considera deficiente y, por tanto, llevaría a considerar serios cambios metodológicos: cambiar las actividades grupales de contraejemplos y problemas por sesiones de repaso, reducir el tiempo dedicado a la teoría para incidir en determinado tipo de ejercicios, no incluir demostraciones, etc.

Tras la finalización de cada trimestre, se pasará a los alumnos una encuesta de satisfacción anónima en la que se incluyen ítems como "El tiempo dedicado a resolver dudas es el adecuado" o "Las actividades realizadas en el aula me han sido de utilidad para comprender la materia". Cada ítem estará acompañado de cuatro indicadores:

1. Totalmente de acuerdo (4)
2. Bastante de acuerdo (3)
3. No muy de acuerdo (2)
4. Nada de acuerdo (1)

El mayor indicador de éxito es, sin duda, la progresiva mejora del alumno a lo largo de la asignatura, algo que se refleja en la calidad de la entrega de los ejercicios, la calificación de las pruebas individuales y el grado de implicación en las tareas colectivas. Si esta mejora se prolonga en el tiempo, se podrá concluir sin atisbo de duda que tanto metodología como programación en general han logrado los frutos deseados.

El porcentaje de participación en las actividades complementarias como "encuentra el fallo en la demostración", el interés creciente por la investigación de cuestiones matemáticas presentes en el mundo real y por la historia de las matemáticas constituyen indicadores fiables del aumento de motivación del alumnado para con la asignatura.

Actividades complementarias y extraescolares

Reacciones químicas y sistemas de ecuaciones

Asignaturas como Física, Química o incluso Biología necesitan de las matemáticas para dar soporte a muchos de los conceptos o leyes. Un ejemplo de esto es la relación existente entre el ajuste de una reacción química (pongamos, por ejemplo, una reacción de combustión de un compuesto orgánico) y la resolución de un sistema de ecuaciones lineales con tantas incógnitas como átomos desconocidos de elementos tengamos y donde los coeficientes del sistema vienen dados por el número de moléculas de cada compuesto.

Con la finalidad de promover la transversalidad de asignaturas y que, de este modo, el alumnado aprecie la relación entre lo que aprenden en diferentes asignaturas, podría llevarse a cabo una actividad conjunta entre los departamentos de Matemáticas y Física y Química para, un día por la tarde, realizar un experimento que conlleve el ajuste de una reacción química sencilla y que no entrañe un riesgo excesivo. Un ejemplo de esto podría ser la combustión de una pequeña cantidad de azúcar (sacarosa). Será necesaria la autorización de los familiares del alumnado para poder contar con su participación.

Taller 10 cambios sencillos para mejorar tu alimentación

A mediados del mes de mayo, y conjuntamente con el departamento de Biología y Geología, se concertaría una cita con el centro de salud SEN Global Salud de Oviedo para impartir el taller “10 cambios sencillos para mejorar tu alimentación”. Los alumnos que han cursado Biología y Geología ya han podido ver a lo largo del curso académico cuestiones relacionadas con los hábitos alimenticios saludables, trastornos alimenticios y la función de nutrición en general, mientras que los alumnos de la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Enseñanzas Académicas han tenido la oportunidad de aprender la clasificación de las variables aleatorias y los modelos de representación gráfica que mejor se ajustan a cada una de ellas, así como la aplicación de las medidas de centralización y dispersión.

Tras la conclusión del taller, los estudiantes deberán llevar a cabo una pequeña investigación en grupos de cuatro, consistente en el estudio de un modelo de alimentación de un país concreto que se les adjudicará por sorteo.

A partir de unas tablas Excel elaboradas por el docente (y que les serán enviadas a los alumnos por correo electrónico o campus virtual) en las que se recoge el porcentaje de verduras, carne y pescado consumidos de media en los hogares de cada uno de esos países, los estudiantes deberán escoger y elaborar el gráfico que mejor se ajuste a la representación de dichos datos (pueden usar Rcommander, SPSS o Excel) y preparar una presentación en la que expliquen al resto de sus compañeros el modelo de alimentación del país adjudicado.

Encuentra el fallo en la demostración

Esta actividad tiene como objetivo paliar una de las fobias más comunes entre el alumnado: demostrar propiedades o fórmulas como las soluciones de la ecuación de segundo grado. Cada mes, desde octubre hasta junio, se colgará en el tablón de anuncios de cada una de las aulas de 3º en las que se imparta la asignatura una demostración con un error; los alumnos que quieran participar deberán entregar una hoja con su nombre, apellidos y grupo incluyendo error con su justificación. Las personas que hayan dado con el gazapo y que hayan aportado un argumento claro y convincente recibirán un pequeño premio con un valor no superior a diez euros en ningún caso. Esta propuesta sería llevada a cabo por el Departamento de Matemáticas del centro.

Actividades asociadas al Plan de Lectura, Escritura e Investigación

En cada uno de los trimestres de la asignatura Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, se dedicarán cuatro horas a fomentar la lectura de textos de diversa naturaleza y ajustados a los posibles intereses del alumnado y a sus capacidades; dicha lectura recibe el nombre de lectura comprensiva.

El primer trimestre, y coincidiendo con el comienzo de la parte de álgebra, se llevará a cabo una lectura grupal de uno de los capítulos de la biografía del famoso matemático Evariste Galois: “El elegido de los dioses: La Historia de Evariste Galois”, del autor Leopold Infeld. A las dos primeras sesiones de lectura grupal le sucederán una de debate y otra de trabajo en equipo.

En la última sesión se pedirá al alumnado que, en grupos de cuatro, anoten las ideas principales que han extraído de los dos primeros días de lectura para posteriormente exponerlas al resto de la clase. De esta forma no sólo se está fomentando la lectura, sino que también se incide en la relevancia de saber resumir y seleccionar lo principal de un texto.

En el segundo y tercer trimestre se procedería de la misma forma, si bien en el primer caso la lectura propuesta será "Geometría y arte. Influencias matemáticas durante el renacimiento", en el tercer trimestre será el propio alumnado quien elija la lectura sobre la que desean trabajar, teniendo presente en todo momento que es requisito imprescindible la vinculación del argumento con alguno de los temas tratados en la asignatura.

Propuesta de innovación

Ámbitos de mejora

Ocurre con frecuencia que los alumnos tienden a memorizar procedimientos en matemáticas, priorizando el mecanismo que llega al resultado antes que las razones por las cuales debe utilizarse ese procedimiento para obtener la solución. Un ejemplo clásico que ilustra esto último es la aplicación incorrecta de la fórmula del cuadrado de un binomio:$(a+b)^2 = a^2 + b^2$. En mi caso concreto, 4 sobre 15 alumnos (26.7%) a la hora de resolver la ecuación $x^2 = 4$, concluían que, o bien la solución era exclusivamente $x = 2$, o bien que había dos posibles soluciones: o $x = 2$, o $x = -2$.
A esto habría que añadirle la dificultad que muchos estudiantes encuentran al manejar signos negativos que acompañan una expresión en paréntesis, y más si se trata de una expresión algebraica. El álgebra, como explicaremos más adelante en el subcapítulo de "marco teórico" ha supuesto, históricamente, un quebradero de cabeza para muchos estudiantes, existiendo un miedo extendido en la sociedad hacia esta rama de las matemáticas.
En la muestra de 15 exámenes antes mencionada descubrí que un 27% de los alumnos únicamente cambiaba el signo del primer término de la expresión $(x-2)^2$ cuando estaba acompañada por un signo menos; es decir: en el momento en el que se presentaba la siguiente situación: $-(x^2 - 4x + 4)$ algunos alumnos solo multiplicaban por el signo – el término x^2, concluyendo que $-(x^2 - 4x + 4) = -x^2 - 4x + 4$, como si el único término entre paréntesis fuera x^2 . Del mismo modo, un 20% cometió el mismo error al calcular $-36\frac{x+7}{6}$, multiplicando el signo menos únicamente por x en lugar de por cada uno de los miembros de $x + 7$ obteniendo así como resultado $-6x + 42$ donde, como podemos apreciar no se ha cambiado el signo de 42 (debería ser -42, pues -6 por 7 es -42). Todos estos errores serán desglosados a la postre.
Generalmente, cuando el docente efectúa una corrección del examen explica el procedimiento a seguir para llegar a la respuesta correcta, deteniéndose a remarcar qué pasos son correctos o incorrectos en cada caso. Sin embargo, no es tan habitual que les proporcione ejemplos que contradigan el por qué de sus afirmaciones.
En este trabajo se propone, a modo de alternativa, iniciar a los estudiantes en el uso

del contraejemplo como una herramienta para trabajar sus fallos y que les permita comprender el por qué de lo erróneo de sus argumentos, corrigiendo así hábitos como los anteriormente mostrados. A través de esta medida se pretende conseguir que el alumnado desarrolle poco a poco un pensamiento crítico y matemático que le posibilite abandonar su pensamiento ingenuo inicial sobre ciertos conceptos como los relacionados con la resolución de ecuaciones y sistemas.

Contexto

El presente proyecto de innovación se llevaría a cabo en un grupo de 3º de la ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de un IES localizado en pleno centro de la villa asturiana de Avilés entre dos de los parques más importantes de dicha localidad. Se trata de un instituto con aproximadamente 900 alumnos y en el que conviven diversas nacionalidades. Debe tenerse en cuenta que en 1º de Bachillerato se incorpora mucho alumnado procedente de varios colegios concertados de la localidad y que los alumnos que comienzan 1º ESO han cursado Educación Primaria en hasta siete colegios públicos diferentes.

El grupo en cuestión consta de 17 alumnos, de los cuales ninguno se encuentra repitiendo 3º ESO, si bien hay una alumna que repitió 2º ESO. Tampoco hay ningún alumno con Necesidades Educativas Especiales, si bien hay un alumno absentista que podría considerarse NEAE. Los integrantes del grupo están repartidos en tres filas y se sientan en parejas, generalmente con aquellos compañeros con los que mantienen una buena relación personal. Existe un buen ambiente de compañerismo, estando dispuestos siempre a ayudar a su compañero de mesa con las tareas que les encomienda la profesora.

El aula en la que se introduciría este proyecto de innovación consta de: un ordenador, dos pizarras (una clásica y otra digital), un proyector, sillas y mesas verdes, etc. La amplitud del aula es suficiente para organizar la actividad grupal que se pretendía.

Antes de poner en práctica la innovación, se tomó información previa de 16 de esos 17 alumnos a través de una prueba escrita que había tenido lugar a principios de febrero. Un mes más tarde, se completó esa información inicial con los resultados de cinco exámenes de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas que tuvieron que realizar aquellos alumnos que habían superado las partes previas de la asignatura.

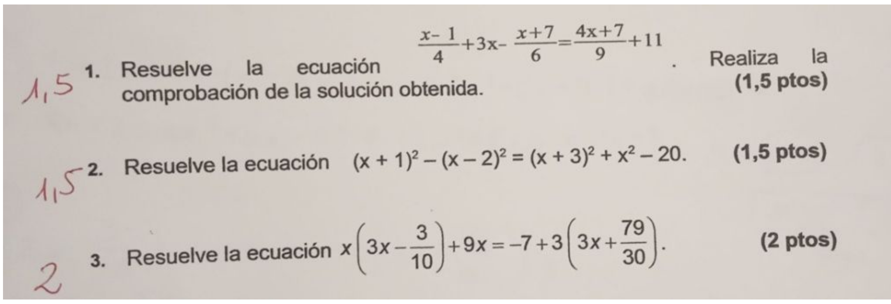
A partir de la información extraída de ambos exámenes y de la observación semanal, se llegó a la conclusión de que se trataba de un grupo con resultados muy dispares. El porcentaje de aprobados en la prueba escrita de resolución de ecuaciones fue de un 50%, desglosado en cuatro aprobados, dos notables y dos sobresalientes. Únicamente cinco alumnos/as no tuvieron que recuperar ninguna de las partes de álgebra conjuntamente con la prueba de sistemas; de hecho, las 4 personas que obtuvieron notable y sobresaliente consiguieron cuatro sobresalientes en el examen de sistemas.

Ante esta dispersión, una de las ideas que se pretendía llevar a cabo era la organización de una tarea grupal en la que, divididos en grupos de cuatro, los alumnos debieran corregir los errores que apreciaran en un examen "ficticio", aportando en cada caso un contraejemplo que demostrara que las afirmaciones ahí plasmadas no eran ciertas.

Justificación y objetivos

Como se ha ido relatando en los apartados anteriores, el proyecto de innovación que se plantea en este trabajo se ha ideado tras comprobar, a través de la revisión de un total de 20 exámenes (15 versaban sobre resolución de ecuaciones de primer y segundo grado y cinco sobre sistemas de ecuaciones), que algunos conceptos fundamentales de álgebra como el número de soluciones que ha de tener $ax^2 = b$ con $a \neq 0\ y\ \frac{b}{a} > 0$ no estaban ni mucho menos claros. A continuación, haremos un breve análisis sobre los fallos cometidos en tres de las seis preguntas de las que constaba el primer examen y en cuatro de las seis preguntas de las que constaba el segundo, clasificando los errores según las causas que más creemos que se ajustan a este y si se trata de un error aritmético o algebraico; en ambos casos, nos guiaremos por los criterios seguidos en Socas (1997), Diego, González, Pérez y Polo (2009) y Palarea, Ruano y Socas (2008).

En el caso del primer examen, las tres preguntas que se tomaron como muestra fueron las siguientes:



1,5 1. Resuelve la ecuación $\frac{x-1}{4}+3x-\frac{x+7}{6}=\frac{4x+7}{9}+11$. Realiza la comprobación de la solución obtenida. **(1,5 ptos)**

1,5 2. Resuelve la ecuación $(x+1)^2-(x-2)^2=(x+3)^2+x^2-20$. **(1,5 ptos)**

2 3. Resuelve la ecuación $x\left(3x-\frac{3}{10}\right)+9x=-7+3\left(3x+\frac{79}{30}\right)$. **(2 ptos)**

El primer ejercicio fue contestado correctamente por un 60% de la clase. El 40% restante se repartió de la siguiente forma: 33.3% cometió algún fallo y el 6.7% no contestó.

Dentro de este 33.3% podemos encontrar tres tipos de errores:

- Errores derivados de una mala aplicación de la propiedad distributiva
- Error derivado de la aplicación incorrecta de la regla del pasa para resolver ecuaciones de primer grado; esto es, aplicar erróneamente las reglas de “el término independiente que está sumando pasa restando al otro lado de la igualdad, el que está restando pasa sumando, el coeficiente que está multiplicando a la incógnita pasa dividiendo al otro lado de la igualdad y el que está dividiendo pasa multiplicando”
- Interpretación y uso erróneo del signo ‘=’

Atendiendo a las clasificaciones de Socas (1997), Diego et.al (2009) y Palarea et.al (2008), pasamos a desglosar particularmente y a explicar brevemente cada uno de estos errores.

Uno de los alumnos mostró una dificultad evidente a la hora de distinguir entre el signo “=” y el “implica”. En todo momento usaba el “=”como sinónimo del “implica”; en este caso, estaríamos hablando de un error debido a las características propias del lenguaje algebraico.

Solo dos alumnos tuvieron algún fallo en este ejercicio como resultado de una aplicación deficiente de la regla del pasa. En uno de los casos, cuando llegaba a la expresión $95x = 475$, para hallar el valor de x pasaba dividiendo el coeficiente cambiado de signo. No obstante, no cometió ninguna equivocación más de este tipo en el resto de la prueba, por lo que se concluyó que, en este caso, se trataba de un despiste y, por tanto, un error que tiene su origen en actitudes afectivas y emocionales.

El otro alumno quiso pasar todos los términos de la ecuación $9x - 9 + 108x - 6x - 42 = 16x + 28 + 396$ al lado izquierdo de la igualdad; sin embargo, en lugar de expresar la ecuación anterior con la forma: $111x - 16x - 51 - 424 = 0$, obvió el 0 que acompaña la igualdad y anotó: $111x - 16x = -51 - 424$. Si bien lo más adecuado hubiera sido hablar en privado con el alumno en cuestión para preguntarle, el hecho de que no haya vuelto a cometer dicho fallo me lleva a concluir que, de nuevo, se trata de despiste. En caso contrario, o bien le cuesta aplicar la regla del pasa con las igualdades de la forma $ax + c = dx + b$ (esto es: no tiene claro como se debe pasar un término de un miembro de la igualdad a otro. Por ejemplo, si pasara el c que está sumando a ax sumando al otro miembro y en su lugar le cambiara e signo a b).En este caso pasa restando el $16x$ al lado izquierdo de la igualdad, lo cual es correcto; sin embargo, en lugar de pasar sumando al lado derecho de la igualdad el -51, mantiene el 51 con el signo -. Además de este fallo, comete otro error: cambia el signo del 424 del miembro derecho de la igualdad sin haberlo pasado al otro miembro y por ello, hablaríamos de un error propio de las ecuaciones de primer grado algebraico del tipo procedimental. Sin embargo, y visto que este fallo se repitió en otros apartados, hablaríamos de error debido a las características propias del lenguaje algebraico (cuyo origen está en una ausencia de sentido, esto es: no comprende la estructura de la ecuación de primer grado) ; la razón no es otra que la omisión del "=0" cuando pasa todos los términos de una ecuación al otro miembro.

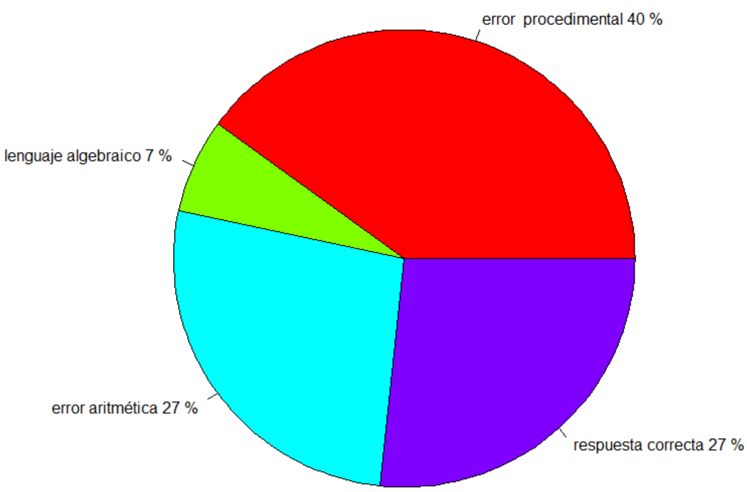
En el caso de la aplicación incorrecta de la propiedad distributiva, fueron 3 alumnos los que cometieron el mismo fallo: cuando multiplicaron ambos miembros de la ecuación $\frac{x-1}{4} + 3x - \frac{x+7}{6} = \frac{4x+7}{9} + 11$ por el mínimo común múltiplo y debían resolver el paréntesis $-6(x + 7)$, únicamente multiplicaban por -1 el primer término, concluyendo que $-6(x + 7) = -6x + 42$. En este caso, parece que se trata de un error aritmético en el que los alumnos han aplicado de manera incompleta la propiedad distributiva, olvidándose del signo menos al multiplicar el segundo término.

En el caso del ejercicio número dos, un 27% de los estudiantes concluían que la ecuación $x^2 = 4$ tenía únicamente una solución, siendo esta $x = 2$. Este error en concreto podría clasificarse dentro de la categoría errores de procedimiento, pues es evidente que el alumnado no usa adecuadamente la fórmula para calcular las soluciones de una ecuación de la forma $ax^2 = b$ con $a \neq 0$ y $\frac{b}{a} > 0$.

El otro error que tuvo lugar con más frecuencia fue como consecuencia de una aplicación incorrecta de la propiedad distributiva. Otro 27% de estudiantes afirmaba que $-(x-2)^2 = -x^2 - 4x + 4$. Al igual que se señaló para el ejercicio 1, los estudiantes sólo han multiplicado el primer término por -1, con lo cual han incurrido en un error aritmético.

Añadidos a estos dos, que fueron los que mayor presencia tuvieron, podemos añadir otros minoritarios: error algebraico procedimental al señalar que $-x^2 = -4 \rightarrow x = \sqrt{-4}$, pues no pasa dividiendo el -1, lo que implica una mala aplicación del método de la balanza, que detallaremos más adelante; utilización del signo igual como implicación (error derivado del lenguaje algebraico) y desacierto al desarrollar el cuadrado del binomio $(x-2)^2$ (se trataría de un error derivado de la aplicación inadecuada de una fórmula).

En conjunto, de los 15 alumnos que contestaron la pregunta solamente 4 la respondieron correctamente. Los 11 restantes cometieron: 4 errores de tipo aritmético, 6 procedimental y 1 debido al lenguaje algebraico.



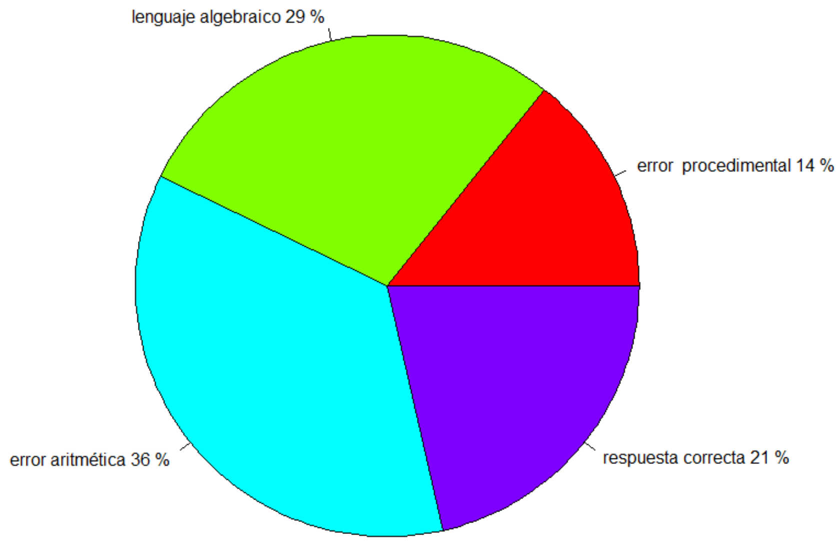
En lo que respecta a la pregunta 3, se detectó un error que destacaba notablemente sobre el resto, siendo cometido por un 20% de los alumnos; a la hora de multiplicar a ambos lados de la igualdad por el mínimo común múltiplo de los denominadores, estos estudiantes multiplicaban dos veces por el mínimo común múltiplo los términos que estaban dentro del paréntesis y aquel a la izquierda del mismo. Es decir:

$$x\left(3x-\frac{3}{10}\right)+9x=-7+3\left(3x+\frac{79}{30}\right)\rightarrow 30x(90x-9)+270x$$
$$=-210+90(90x+79)$$

Resulta complicado clasificar este error. Por un lado, podría ser tratado como un error del álgebra que tiene su origen en la aritmética; asimismo, la interpretación errónea del concepto de paréntesis puede contemplarse como una falta de sentido estructural (Castro, 2012), es decir: el alumno puede no haber llegado a comprender el significado del paréntesis en aritmética y sus propiedades y, por ende, a la hora de enfrentarse a ecuaciones con denominadores que contengan paréntesis arrastre los mismos fallos. Se trataría, por tanto, de un error asociado a las características propias del lenguaje algebraico.

Se detectaron también pequeños gazapos a la hora de efectuar algún cálculo aritmético, usar la regla del pasa o pequeñas equivocaciones en el uso de la fórmula de la ecuación de segundo grado. Únicamente tres alumnos/as resolvieron adecuadamente el ejercicio al completo.

Con la salvedad de dos alumnos cuyos fallos no incluiremos al considerarlos dentro de actitudes emocionales y afectivas (uno de ellos consecuencia de copiar incorrectamente la información de la línea superior y otro consecuencia de no haber calculado la raíz cuadrada del radicando tras haber escrito correctamente la fórmula de la ecuación de segundo grado, razón por la cual no se puede considerar un error de procedimiento), a continuación se incluye un diagrama de sectores clasificando los errores consecuencia de lo que se interpreta como ausencia de sentido:

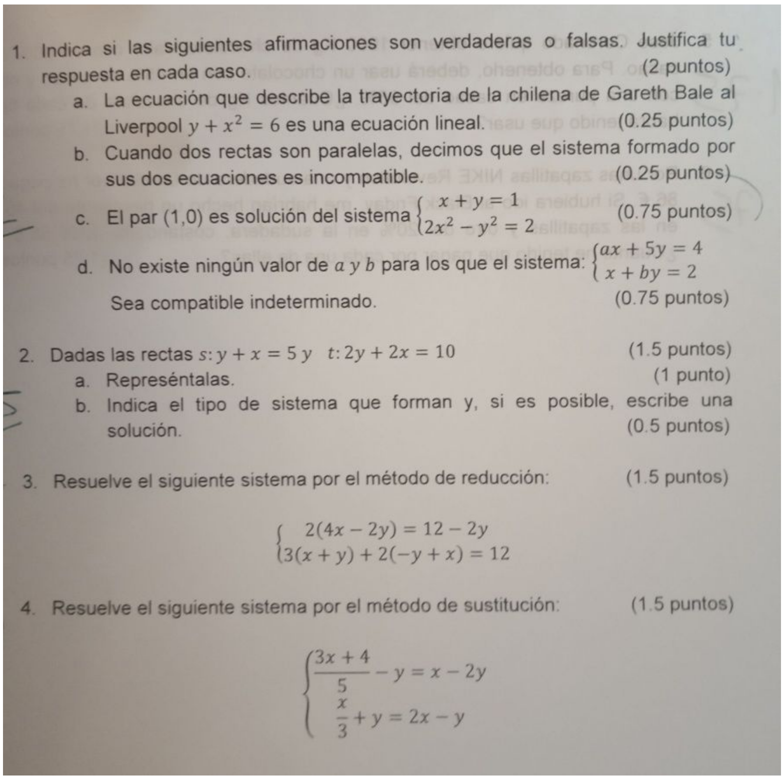


Sobre las cinco pruebas de sistemas de ecuaciones lineales analizadas, se llegó a la conclusión de que los alumnos manejaban correctamente el algoritmo para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por los métodos de reducción y sustitución por medio de las respuestas aportadas a los ejercicios 3 y 4. También demostraron comprender los conceptos de ecuación lineal y solución de un sistema, pues todos ellos respondieron correctamente a los apartados a y c de la pregunta 1.

La pregunta 2 fue contestada correctamente al completo por 3 alumnos. Los dos alumnos restantes cometieron dos imprecisiones de distinta índole. En el primer caso, representación de dos rectas coincidentes como dos rectas secantes y en el segundo, ausencia de respuesta para el apartado b; esto último puede deberse a: dar por hecha la respuesta al realizar tablas de valores o bien no comprender en su totalidad el concepto "solución de un sistema de ecuaciones lineales".

Lo más destacable fueron los errores cometidos al operar con fracciones en el ejercicio 4, siendo 3 los alumnos/as que no llegaron a la respuesta correcta. Dos de ellos hallaron acertadamente el valor de la incógnita y, equivocándose posteriormente en el cálculo de x al sustituir en una de las ecuaciones; uno de los errores fue debido a la aplicación incorrecta de la regla del pasa al resolver la ecuación $-2x - \frac{100}{13} = -4$, concluyendo que esta equivalía a la ecuación $-26x - 100 = 52$. En el otro caso se trató de un error aritmético con operaciones con fracciones; el alumno/a concluyó que -$\frac{24}{13} = 8$. El alumno/a que no calculó con acierto ninguno de los dos valores de las incógnitas fue como consecuencia de una imprecisión al usar la regla de la balanza (se trata de la concepción de una igualdad como una balanza equilibrada. Si sumas un término a un lado de la igualdad, deberás añadir el mismo al otro para que la balanza vuelva a estar en equilibrio. La explicación es idéntica en los casos de la resta, multiplicación o división por un término a un lado de la igualdad) una vez había llegado a la ecuación $6y = 5\left(\frac{4+5y}{2}\right)$, multiplicó a ambos lados de la igualdad por 2, olvidándose de simplificar ese 2 con el 2 del denominador y concluyendo que $6y = 10(4 + 5y)$

A continuación se ofrece una imagen de la prueba de sistemas de ecuaciones a la que hemos estado haciendo referencia:



1. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta en cada caso. (2 puntos)
   a. La ecuación que describe la trayectoria de la chilena de Gareth Bale al Liverpool $y + x^2 = 6$ es una ecuación lineal. (0.25 puntos)
   b. Cuando dos rectas son paralelas, decimos que el sistema formado por sus dos ecuaciones es incompatible. (0.25 puntos)
   c. El par (1,0) es solución del sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$ (0.75 puntos)
   d. No existe ningún valor de a y b para los que el sistema: $\begin{cases} ax + 5y = 4 \\ x + by = 2 \end{cases}$ Sea compatible indeterminado. (0.75 puntos)

2. Dadas las rectas $s: y + x = 5$ y $t: 2y + 2x = 10$ (1.5 puntos)
   a. Represéntalas. (1 punto)
   b. Indica el tipo de sistema que forman y, si es posible, escribe una solución. (0.5 puntos)

3. Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción: (1.5 puntos)

$$\begin{cases} 2(4x - 2y) = 12 - 2y \\ 3(x + y) + 2(-y + x) = 12 \end{cases}$$

4. Resuelve el siguiente sistema por el método de sustitución: (1.5 puntos)

$$\begin{cases} \frac{3x + 4}{5} - y = x - 2y \\ \frac{x}{3} + y = 2x - y \end{cases}$$

Una vez se ha presentado la situación de partida o diagnóstico inicial, se ve necesario trabajar con el alumnado sobre algunos de los errores recogidos con la finalidad de que, en ocasiones futuras, sean conscientes del motivo por el cual su planteamiento original era incorrecto y que, de cara a los próximos cursos, no caigan en los mismos errores.

A través de este proyecto se persigue que el alumnado desarrolle un pensamiento matemático y crítico que le incite a razonar sobre los procesos, algoritmos y conceptos que le son introducidos en el aula de matemáticas, fomentando en ellos la inquietud por descubrir casos concretos para los cuales no se cumplan determinadas propiedades. Es decir, que encuentre una fuente de entretenimiento en la manipulación de las propiedades y conceptos.

El uso de contraejemplos en el aula de matemáticas pretende ser de utilidad para los estudiantes a la hora de enfrentarse a aquellas propiedades que les resultan más dificultosas; una suerte de comprobación de si aquello que están escribiendo sobre el papel es correcto o si, en caso contrario, se trata de una incongruencia.

Otro de los objetivos que se fijan es la visión del aula de matemáticas como un aula de debate. Se pretende que el alumno participe activamente proponiendo ejemplos que, desde su punto de vista, invaliden las afirmaciones hechas por el docente o que complementen otras aportaciones hechas por sus compañeros. Todo ello, evidentemente, en un ambiente respetuoso y alejado de una competitividad agresiva.

Por otro lado, se pretende estimular al alumnado con la propuesta de retos alejados de las actividades rutinarias consistentes en simplificar, resolver o calcular. A través de estas cuestiones teóricas se busca que, progresivamente, los estudiantes vayan iniciándose en la producción de razonamientos matemáticos escritos y sencillas demostraciones. Añadido a todo ello, se desea que estos retos conlleven una mejora de la autoestima del alumnado con respecto a su relación con las matemáticas, haciéndoles ver que son capaces de enfrentarse a problemas de niveles variados.

Marco teórico

La enseñanza del álgebra, así como las dificultades y errores que los alumnos cometen cuando se enfrentan a esta parte de la asignatura ha sido, a lo largo de las últimas décadas, objeto de interés de muchas investigaciones. En este epígrafe se llevará a cabo una revisión bibliográfica

Conviene en estas primeras líneas explicar que estos errores no son exclusivos de los primeros cursos de ESO; El estudio realizado por Ibarra (2017) en la Universidad Tecnológica General Mariano Escobedo de México revelaba que , pese a haber trabajado en la asignatura Álgebra Lineal diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones (Reducción, Gauss-Jordan y Regla de Cramer), el 79% del alumnado cometió diferentes tipos de errores, lo que evidenciaba un aprendizaje no significativo y con un peso memorístico importante.

Kieran (2006) repasa en su trabajo la gran cantidad de investigaciones que se han llevado a cabo desde finales de la década de los 70 hasta el año 2006. Sobre las iniciadas a finales de la década de los 70, Kieran realiza una revisión bibliográfica extensa, clasificando las investigaciones en cuatro grupos: interpretación de signos, incógnitas y variables; resolución de ecuaciones, expresiones algebraicas y ecuaciones; Planteamiento de problemas de enunciado y su posterior resolución e investigaciones dedicadas al estudio de los errores y dificultades de alumnos a la hora de reconocer estructuras algebraicas. No entraremos a hablar del tercer grupo, pero si del resto.

Ejemplos del primer grupo son las realizadas por Vergnaud (1988) y Hersovics y Kieran (1980) sobre la visión tan limitada que tienen muchos alumnos del signo igual. Consideran que, necesariamente, después del igual debe ir una cantidad, un número, perdiéndose así el significado de equivalencia. Asimismo, los estudios llevados a cabo por Both (1982, 1983) revelan lo problemático que le resulta a muchos estudiantes asociar una letra como generalización de un número. En ese apartado también se incluyen otras muchas conclusiones extraídas acerca de la comprensión del concepto variable o las muchas interpretaciones que aparecen sobre el signo menos a la hora de trabajar con ecuaciones o expresiones algebraicas

Uno de los errores más frecuentes que cometen muchos estudiantes y que está ligado al segundo grupo es la necesidad de cerrar expresiones algebraicas de la forma $a + b$ o $5b + 3$; acostumbrados a obtener un resultado final en forma de número a la hora de realizar operaciones aritméticas, no conciben que una expresión algebraica como $10a + 5$ no pueda expresarse como un único valor (de ahí la expresión “cerrarse”). Para ello, o bien sustituyen los valores genéricos a y b por dos valores concretos o bien suman términos no semejantes, dando lugar a afirmaciones como $10a + 5 = 15a$ (ejemplo de “cerrar” una expresión). En líneas posteriores cuando hablemos de la clasificación de Socas (1997) y de las investigaciones aportadas por Palarea, Ruano y Socas (2008) clasificaremos este tipo de error.

En ese cuarto grupo de investigaciones se incluyen algunas como las de Wagner, Rachlin y Jensen (1984) donde se apunta al conflicto que genera en los alumnos trabajar con incógnitas de más de un término. Habituados a encontrar ecuaciones de la forma $ax + b = c$, se bloquean cuando el papel de incógnita lo ejerce una expresión formada por más de un término como en el caso $2(t + 1) + 1 = 5$. Asimismo, y tal y como aprecia Kieran (1984), se aprecia en los estudiantes un desconocimiento evidente sobre el concepto de ecuación equivalente y las propiedades de la igualdad.

Filloy, Rojano y Solares (2003) realizaron un estudio en el que se recogían las dificultades de un grupo de 12 alumnos con edades comprendidas entre 14 y 15 años para interpretar el sentido de la igualdad a la hora de encontrar la solución de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas por los métodos de igualación y sustitución.

En ese estudio se extrajeron dos conclusiones importantes: los alumnos tienen muchas dificultades a la hora de poner una incógnita en función de otra y de sustituirla en la otra ecuación. Los autores indican que el alumnado entrevistado da una interpretación diferente al signo igual en el caso de igualación y otra distinta en el caso de sustitución. Asimismo, mostraban un desconocimiento sobre la posibilidad de que tanto la incógnita x como la incógnita y pudieran tomar valores negativos.

Sobre la enseñanza de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas también escribió Segura (2004), quien, apoyándose en la teoría de Duval (1999), subraya la importancia de que un concepto matemático se trabaje a través de la coordinación de varios registros de representación semióticos para que el aprendizaje sea significativo. Duval (1999) sostiene que para que sistema semiótico pueda ser un registro de representación es necesario que cumpla las siguientes condiciones:

1) Que a cada registro le corresponda una representación. Es decir, que sea posible asociar la imagen de una representación a un registro dado.
2) El tratamiento de una representación a través de un proceso interno, el cual implica

la ejecución de transformaciones en el mismo registro donde ha sido formado.

3) La conversión de una representación hacia otra de un registro diferente. Debe conservar la totalidad o parte del contenido de la representación de partida.

Duval añade que, generalmente, sólo se trabaja con las dos primeras condiciones, mientras que la 3 pasa a un segundo plano. En el caso del objeto "sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas" existen tres registros: verbal, algebraico y gráfico. En el caso particular de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas compatible determinado, podríamos representarlo por medio del enunciado de un problema cuya solución es única (registro verbal), la representación gráfica de dos rectas que se cortan en un único punto (registro gráfico) o por medio de dos ecuaciones lineales y una llave.

Basándose en parte del marco teórico expuesto anteriormente, Sandra Mabel Segura diseñó una secuencia didáctica sobre el objeto sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en la que se priorizaba el cambio de registros de representación y su tratamiento. A través de una actividad consistente en eliminar un virus presente en el dispositivo de un laboratorio mediante rayos (cada rayo es asociado con una ecuación lineal con dos incógnitas y la posición del virus como la solución del sistema formado por las rectas) trabajó con un grupo de alumnas el paso del registro algebraico al gráfico y viceversa.

No obstante, en el presente trabajo nos centraremos en la clasificación que propuso Socas (1997) sobre los tres posibles orígenes de los errores que comete el alumnado:

- Obstáculo
- Ausencia de sentido
- Actitudes afectivas y emocionales

El obstáculo, como se explica en Palarea, Ruano y Socas (2008), no significa falta de conocimiento. El alumno adquirió un conocimiento que le resultó efectivo en determinados contextos pero que, sin embargo, no domina su utilización fuera de ellos, hecho este que da lugar a los errores (respuestas inadecuadas). Atendiendo de nuevo a la clasificación de Socas (1997) estos obstáculos pueden ser de tres tipos:

Los obstáculos epistemológicos hacen referencia a aquellos conceptos matemáticos cuyo aprendizaje ha resultado especialmente dificultoso a lo largo de la historia. En su análisis Socas (1997) y Palarea, Ruano y Socas (2008), separan estos obstáculos epistemológicos de los obstáculos cognitivos de los estudiantes de hoy en día, pues el hecho de que un error se haya repetido durante muchos años no es un argumento lo suficientemente consistente para concluir que los alumnos de hoy en día cometen exactamente esos errores y que son esos conceptos históricamente complicados los que más problemas les generan.

Los obstáculos didácticos, como apuntan Diego, González, Pérez y Polo (2019) aparecen como resultado del proceso de enseñanza seguido por el alumno. Algunas de las variables que influyen son: la metodología usada por el docente, la organización curricular de los contenidos y el significado parcial que se le dota en un primer momento a algunos conceptos, sin profundizar en el resto de significados que puedan tener. A modo de nota histórica, el concepto de obstáculo aplicado al campo de la didáctica de las matemáticas surge en el año 1983 de la mano de Brusseau.

En lo que respecta a los errores por ausencia de sentido, la clasificación recogida en Palarea et.al (2008) establece los siguientes tipos:

- Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética
- Errores de procedimiento
- Errores debidos a las características propias del lenguaje algebraico

Los errores de procedimiento aparecen cuando los alumnos no usan adecuadamente fórmulas o reglas. Camacho, Hernández y Socas (1998) distinguen a su vez tres subtipos:

- Errores relativos al uso inapropiado de la propiedad distributiva. Uno de los ejemplos más recurrentes es: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$
- Errores relativos al uso de recíprocos, por ejemplo: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}$
- Errores de cancelación, por ejemplo: $\frac{x+y}{x+z} = \frac{y}{z}$

Sobre los errores debidos a las características propias del lenguaje algebraico ya habíamos hablado al principio cuando mencionamos a Kieran. Si bien hay muchos tipos, cabe destacar los que surgen de la sustitución formal y de la interpretación tan "restringida" que le dan al signo igual.

En cuanto a los errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, se trata de errores que los alumnos ya cometían cuando trabajaban con propiedades de números enteros, reales, racionales, etc. y que extienden en los procesos de generalización.

Los errores debidos a actitudes afectivas y emocionales son aquellos que se producen como consecuencia de despistes, exceso de confianza, falta de concentración, bloqueos, nervios, etc.

Paralea et. Al (2008) efectuaron un estudio a partir de una muestra de 60 alumnos de 4º de ESO de Enseñanzas Académicas y 1º de Bachillerato. A través de de una prueba que constaba de dos preguntas detectaron errores como la necesidad de clausura (obstáculo cognitivo); la omisión de paréntesis a la hora de sustituir una expresión en otra (error algebraico que tiene su origen en la aritmética u obstáculo didáctico derivado de la forma en la que se les enseñó a realizar operaciones combinadas); aplicación incorrecta de la propiedad distributiva (error de procedimiento) ;dificultades a la hora de pasar del registro verbal al algebraico y la necesidad de particularizar cuando se enfrentaban a letras que generalizaban un número.

Tomando como referencia la clasificación de errores según sus causas propuesta por Socas (1997) y los criterios de clasificación de errores en virtud del contenido matemático aportados por diversos autores, Diego et.al (2009) elaboran su propia clasificación descriptiva desde el punto de vista del contenido matemático de errores que aparecen en la resolución de ecuaciones lineales. Distinguen 3 categorías diferentes:

- Errores aritméticos. Dentro de este grupo conviene destacar el conocido como "error de Egodawatte" o "distributiva incompleta" y que tiene lugar cuando los alumnos multiplican un número situado delante del paréntesis únicamente por el primer término, como por ejemplo: $3(x+1)=2 \rightarrow 3x+1=2$. Los errores cometidos al operar con fracciones también entrarían en esta categoría.
- Errores algebraicos. En este apartado los autores distinguen dos variedades: errores conceptuales y errores procedimentales. Las dificultades para distinguir términos con incógnita y términos independientes y el paso al otro miembro del coeficiente que acompaña a la incógnita como un sumando $(4x+2=0 \rightarrow x=-2-4=-6)$ quedarían enmarcadas dentro de la primera variedad, mientras que aquellos errores consecuencia del uso incorrecto del método de la balanza (no suman el opuesto del término independiente del primer miembro al segundo miembro de la

igualdad) o del método del pasa (lo que está sumando pasa restando, lo que está multiplicando pasa dividiendo, etc.). Un ejemplo del primer caso sería: $2x + 4 = 2 \rightarrow 2x + 4 + (-4) = 2$, mientras que un error común en el segundo es concluir que: $-6x = 2 \rightarrow x = 2 + 6 = 8$ En ocasiones, algunos estudiantes mezclan estos dos procedimientos, generando un nuevo método: $-3x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{3}$ en el que el coeficiente que está multiplicando a la incógnita pasa dividiendo pero con el signo cambiado. Este tipo de errores ya han sido recogidos en investigaciones como las de Hall (2002).

- Errores mixtos aritmético-algebraicos. En este grupo se incluyen errores que pueden considerarse o bien algebraicos o bien aritméticos. La vía para salir de dudas es la celebración de una entrevista personal con los alumnos implicados.

Castro (2012) apunta a que estamos viviendo una “crisis de la enseñanza del álgebra” motivada por la dificultad intrínseca de esta rama (procesos de generalización y simbolos); por el interés decreciente del alumnado en los estudios; por el empleo de métodos de enseñanza anticuados y por la visión que tiene la sociedad del álgebra, a la que etiqueta como una de las ramas más complejas de las matemáticas.

Este autor expone una lista de dificultades de los alumnos con respecto al álgebra, señalando básicamente dos vertientes: dificultades con el álgebra asociada a la aritmética y las dificultades con el álgebra como lenguaje. A continuación se resumen algunas de las mismas.

El hecho de que en problemas de aritmética se utilicen letras para denotar las unidades de la cantidad que se está calculando (litros, metros kilogramos, etc) supone un problema para los estudiantes cuando comprueban que en álgebra las letras designan cantidades conocidas (Both, 1984), lo que daría lugar, en términos de Socas, a un obstáculo cognitivo.

El dominio de las estructuras algebraicas es otra de las cuestiones de interés de este estudio. Una expresión algebraica está conformada por una estructura interna y una estructura externa; la segunda viene dada por los elementos que la componen, los signos que las ligan y el orden de los mismos, mientras que la primera describe el valor de esta y las relaciones de los elementos que la componen con este (Castro, 2012). La falta de sentido estructural, derivado en muchos casos de falta de comprensión de estructuras aritméticas, origina muchos de los fallos que los estudiantes cometen en su día a día.

Otro de los problemas que heredan los estudiantes de la aritmética es la necesidad de resolver todas las operaciones a ambos lados de una igualdad para comprobar si esta es cierta o no en lugar de apoyarse en propiedades de los números reales. Este tipo de situaciones se extiende al álgebra, evidenciado una carencia de sentido de estructura como bien apostilla Castro (2012).

Una estrategia didáctica a tener en cuenta en el aula de matemáticas con la finalidad de corregir ciertos errores consecuencia de un “pensamiento ingenuo” (García y Morales, 2013) es el uso de contraejemplos. La RAE en su edición de 2019 define contraejemplo como “ejemplo que contradice lo que se ha pretendido mostrar con otro” (Real Academia Española [RAE], 2019). Son muchos los autores que defienden la necesidad de introducir en la clase de matemáticas los contraejemplos, entre los que se encuentra Santos (2007)

García y Morales (2013) utilizan la expresión “pensamiento ingenuo” para referirse a un pensamiento inmediato y poco reflexivo que desemboca en algunos de los errores ya comentados, como por ejemplo asegurar que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. A través de la aritmética, podemos demostrarle al alumnado que esa igualdad no es cierta (probar con $a = 1\ y\ b = 3$), facilitando la transición a un pensamiento algebraico. El hecho de que el docente no se detenga a demostrar el por qué de lo incorrecto del argumento de sus alumnos y se limite a corregir el fallo no motiva a que estos razonen en futuras ocasiones sobre los procesos que deben seguir para llegar al resultado que persiguen. Como dice Carrión (2007), no es suficiente con que un individuo sepa lo que es correcto, debe saber también lo incorrecto para así detectar donde comienza a fallar.

Desarrollo de la innovación

Plan de actividades

Antes de terminar una determinada unidad, se pedirá a los alumnos que, con un margen de dos semanas, entreguen un esbozo de demostración o argumentación de una proposición escogida por el docente (ajustada al nivel del grupo, evidentemente) para indagar en el razonamiento matemático de los mismos y así adaptar las siguientes actividades. Hay casos en los que, debido a la relación tan directa que existe entre dos unidades, se escogerá una sola proposición. En el caso de las unidades "sistemas de ecuaciones lineales" y "resolución de ecuaciones de primer y segundo grado", se escogió la siguiente:

"Si despejamos la misma incógnita en dos ecuaciones y, una vez igualadas, vemos que no se puede resolver la ecuación de primer grado resultante: ¿Qué tipo de sistema sería?"

Una vez se haya terminado de explicar una unidad en la clase de matemáticas (ya sea la que aquí se expone o cualquier otra), los alumnos hayan realizado la correspondiente prueba individual y dicha prueba les haya sido devuelta con las correcciones pertinentes, se dedicará la siguiente hora de la asignatura a exponer contraejemplos que sirvan como prueba para rebatir los argumentos erróneos del alumnado. El docente no será el único protagonista, sino que deberá pedir la colaboración de sus alumnos para encontrar más situaciones en las que no sea válido un determinado argumento. Al finalizar la sesión, cada alumno recibirá impresa una hoja en la que aparecen indicados los diferentes contraejemplos que se han construido para invalidar los razonamientos incorrectos.

Tras la celebración de esta sesión tendrá lugar una actividad grupal en la que los alumnos deberán señalar los razonamientos erróneos que aparecen en un examen ficticio, debiendo argumentar los motivos por los cuales no es válido; proponiendo un contraejemplo que desmantele la respuesta del alumno ficticio. Los grupos deben ser necesariamente heterogéneos, procurando que en cada uno de ellos haya al menos un alumno cuyo dominio de la asignatura permita ayudar a aquellos que, por diversas circunstancias, no han obtenido una buena calificación en los exámenes o que muestren dificultades evidentes con respecto a la asignatura.

Esta actividad colectiva está diseñada para que, en aproximadamente cuarenta minutos, los alumnos puedan debatir sobre las respuestas que, a su juicio, son incorrectas y proponer el correspondiente contraejemplo. Los veinte minutos restantes se dedicarán a la puesta en común de la actividad, para lo cual será necesario que cada grupo designe un representante que se encargue de exponer al resto de sus compañeros los errores detectados y los contraejemplos que han elaborado.

Finalmente, y con un margen de una semana sobre la celebración de la actividad grupal, se realizará un test breve de cuatro preguntas para comprobar si las acciones anteriores han surtido efecto y los alumnos han abandonado la concepción errónea previa que tenían sobre algunos conceptos y procedimientos.

Agentes implicados

Además del alumnado, el único agente implicado será el profesor que imparta la materia en el grupo.

Materiales de apoyo y recursos necesarios

Para el desarrollo de la actividad grupal, además de ocho mesas (dos mesas para cada grupo), serán necesarios bolígrafos, folios, una pizarra de tiza o rotulador y una lista de los alumnos con las notas obtenidas por cada uno en los últimos exámenes. Asimismo, es imprescindible contar con cuatro copias más además de las repartidas a los estudiantes en caso de que algún grupo pudiera extraviar o hubiera desgastado en exceso la que les fue concedida.

Es necesario que el aula sea lo suficientemente amplia para que los integrantes de cada grupo estén cómodos; existiendo una separación que evite posibles plagios. Asimismo, debe contar con buena iluminación y sonoridad. Al ser el docente quien aporta su propio material no será necesario incluir ningún libro de texto de referencia u otro instrumento de consulta.

Los mismos requisitos son aplicables al caso de la prueba individual.

Fases de la innovación

A continuación se presenta un cronograma que resume la manera en la que se presentaría el proyecto de innovación en el aula para el caso concreto de las unidades "Resolución de ecuaciones" y "Sistemas de ecuaciones":

Actividades	4ªsemana de febrero	2ªsemana de marzo	3ªsemana de marzo	4ªsemana de marzo	1ªsemana de abril
Demostración número soluciones	✓				
Examen		✓			
Clase expositiva contraejemplos			✓		
Actividad grupal				✓	
Prueba individual					✓

En este caso hemos desarrollado el proyecto una vez finalizadas dos unidades, pues los contenidos de la primera se ponían en práctica en la otra y, por tanto, cabía la posibilidad de que se repitieran errores cometidos a la hora de resolver ecuaciones de primer y segundo grado en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Este cronograma es aplicable a todas las unidades. Si se llevara a cabo esta innovación conjuntamente para las unidades "Números racionales" y "Números reales" se contaría con un tiempo total de seis semanas en las que las actividades quedarían repartidas de la siguiente forma:

Actividades	1ªsemana de octubre	3ªsemana de octubre	4ªsemana de octubre	1ªsemana de noviembre	2ªsemana de noviembre
Demostración producto irracionales	✓				
Examen		✓			
Clase expositiva contraejemplos			✓		
Actividad grupal				✓	
Prueba individual					✓

En este caso la pequeña demostración (más bien ejemplificación) que se le pediría a los alumnos sería la siguiente:

"¿El producto de dos números irracionales puede ser en algún caso un número natural? ¿ y el producto de un número natural y un irracional? "

Evaluación y seguimiento de la innovación

Los dos medidores principales del éxito o fracaso de la innovación son la prueba individual y la actividad grupal. Las circunstancias adversas del panorama mundial impidieron que se pudieran llevar a cabo ambas actividades en el aula; sin embargo, fue posible elaborar una tarea individual (la grupal era imposible dada la situación) que actúa a modo de prueba individual. Esta tarea consta de cuatro preguntas (se incluye en el anexo), en las que se incluyen contenidos de cada una de las 3 unidades didácticas de álgebra: lenguaje algebraico, resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Para evaluarla, se seguirán los mismos criterios que se hubiesen seguido en el caso de la prueba individual: El hecho de intentar resolver los ejercicios (actitud,esfuerzo), el haber o no encontrado el error en cada apartado, el haber propuesto o no un contraejemplo o aportar un razonamiento convincente en cada cuestión y si , a la hora de contestar las preguntas ha cometido algún tipo de error.

A cada una de estas cuatro consideraciones se les asocia un indicador del 1 al 4 o de 1-3 para evaluar la tarea individual y, por tanto, la efectividad o no de la propuesta de innovación.

En lo que respecta a la actitud para afrontar la actividades: esfuerzo, presentación e interés, se tomarán como referencia estos cuatro indicadores, ordenados de peor (1) a mejor (4):

1. No ha entregado la actividad o la ha plagiado.
2. Ha entregado la actividad, pero se evidencia falta de trabajo y la presentación es mala.
3. Ha entregado la actividad, la presentación es correcta y se evidencia dedicación y esmero pese a que haya algún apartado sin contestar.
4. Ha entregado a actividad, la presentación es correcta, se evidencia dedicación y esmero y ha intentado dar respuesta a todos los apartados, con independencia de si la respuesta es correcta o no.

Los 12 alumnos que entregaron la actividad cumplen el cuarto indicador. En circunstancias adversas se han esforzado por dar respuesta a las cuatro cuestiones, independientemente de si han aportado una respuesta más o menos acertada; siendo la presentación en los doce casos la adecuada (foto de los 4 apartados o documento PDF).

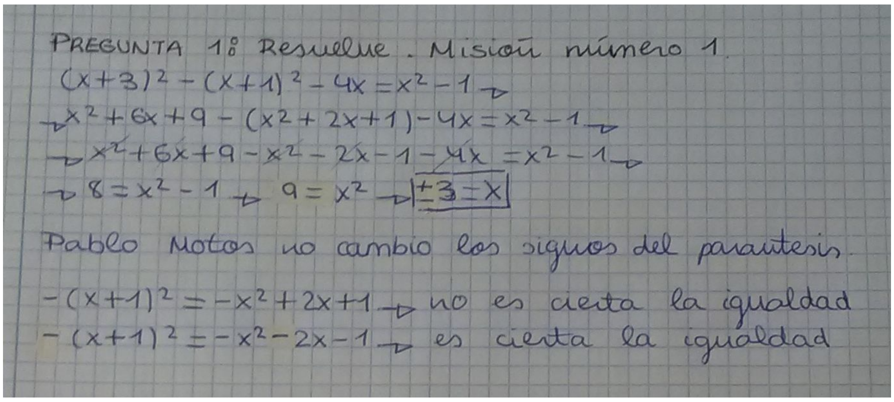
En lo que respecta a la detección del error en cada apartado, se tienen en cuenta cuatro índices:

1. No ha detectado el error
2. Ha detectado el error, pero no justifica el por qué de lo erróneo
3. Ha detectado el error y aporta una justificación errónea.

4. Ha detectado el error y ha aportado una justificación correcta.

En el primer ejercicio (ver Anexo) el 100% de los alumnos encontraron el fallo: $-(x+1)^2 = -x^2 + 2x + 1$; si bien no señalaron directamente el error que Pablo Motos (el alumno ficticio que realiza el examen incluido en el anexo) cometía al afirmar que $4x + 10 = x^2 - 1 \rightarrow x^2 - 4x + 9 = 0$, el 50% de los estudiantes resolvió la ecuación del enunciado:$(x+3)^2 - (x+1)^2 - 4x = x^2 - 1$ desde el principio, usando que $-(x+1)^2 = -x^2 - 2x - 1$. De estos 6 alumnos, 4 la resolvieron correctamente, obteniendo como soluciones $x = -3$ y $x = 3$

En la siguiente imagen se ilustra la respuesta de una alumna que encontró el error y resolvió correctamente la ecuación:


PREGUNTA 1º Resuelve. Misión número 1.

$(x+3)^2-(x+1)^2-4x=x^2-1 \rightarrow$

$\rightarrow x^2+6x+9-(x^2+2x+1)-4x=x^2-1 \rightarrow$

$\rightarrow x^2+6x+9-x^2-2x-1-4x=x^2-1 \rightarrow$

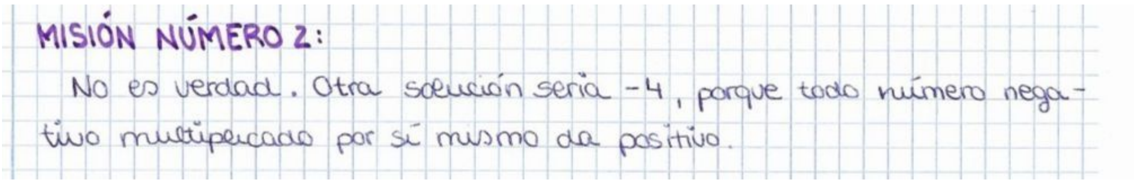
$\rightarrow 8=x^2-1 \rightarrow 9=x^2 \rightarrow \boxed{\pm 3 = x}$

Pablo Motos no cambio los signos del parentesis.

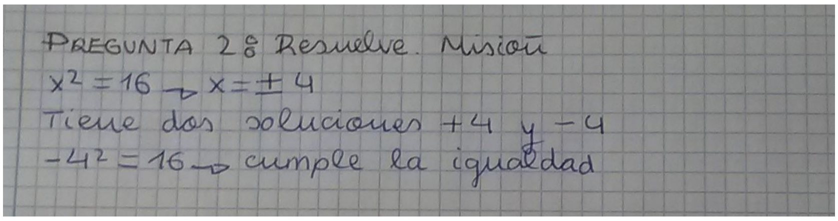
$-(x+1)^2=-x^2+2x+1 \rightarrow$ no es cierta la igualdad

$-(x+1)^2=-x^2-2x-1 \rightarrow$ es cierta la igualdad

En lo que respecta a la segunda pregunta, hubo poca discusión. 11 de los 12 alumnos afirmaron que la ecuación $x^2 = 16$ tenía más de una solución y que, por tanto, Pablo Motos no estaba en lo cierto. De estos 11 alumnos, 8 justificaron bien su respuesta, ofreciendo argumentos como los que se muestran a continuación:


MISIÓN NÚMERO 2:

No es verdad. Otra solución sería -4, porque todo número nega-
tivo multiplicado por sí mismo da positivo.

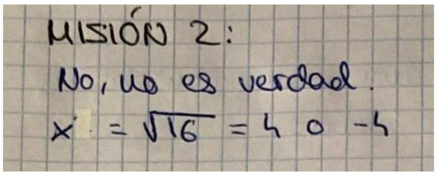

PREGUNTA 2º Resuelve. Misión

$x^2=16 \rightarrow x=\pm 4$

Tiene dos soluciones +4 y -4

$-4^2=16 \rightarrow$ cumple la igualdad

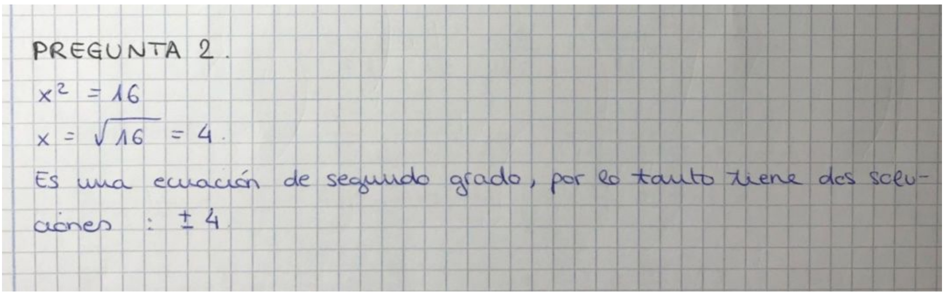
Dos alumnas iban muy bien encaminadas a la hora de aportar la justificación del por qué la ecuación $x^2 = 16$ tenía dos soluciones; sin embargo, cometieron pequeñas imprecisiones: una afirmó que las ecuaciones de la forma $ax^2 = b\ con\ a \neq 0$ tenían necesariamente dos soluciones y otra sostenía que había dos posibles soluciones: o 4 o -4. Esta última se ofrece a continuación



Una respuesta que se dio por correcta pero que admite más discusión es la aportada por una alumna que afirmaba lo siguiente:

"Es una ecuación de segundo grado, por lo tanto tiene dos soluciones: +4 y -4"

Si estuviéramos considerando el cuerpo de los números complejos, esto sería correcto; sin embargo, una ecuación de segundo grado puede tener una solución real y otra compleja; no obstante, sobreentendemos que se refiere a las ecuaciones de esa forma concreta, por lo que se daría por correcto.



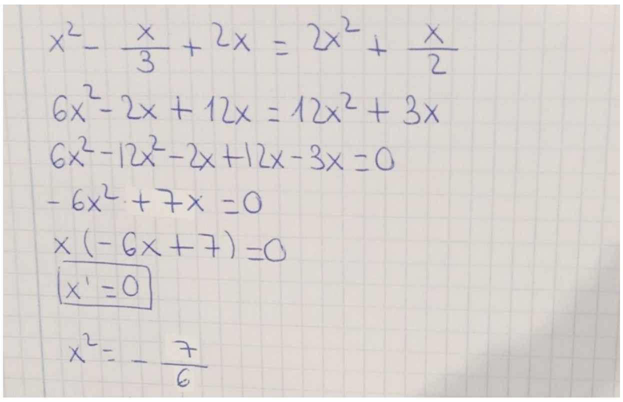
Respuesta aportada por la alumna referida anteriormente

En el caso de la tercera pregunta, debían detectar dos errores: el no haber multiplicado por el mínimo común múltiplo de 2 y 3 el término $2x$ del primer miembro al usar la propiedad distributiva y el haber multiplicado por 36 (6 fuera del paréntesis y por 6 dentro del paréntesis) aquellos términos que acompañaban al paréntesis.

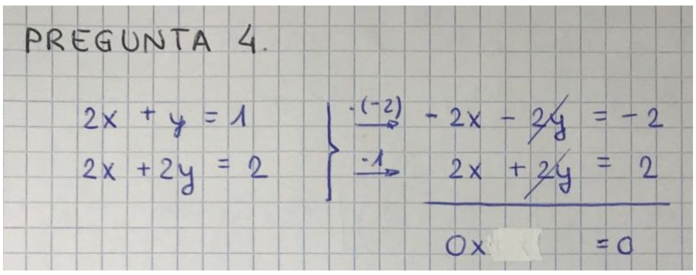
Dos alumnos señalaron ambos fallos y, además, resolvieron correctamente la ecuación, demostrando así que, además de saber dónde estaba el fallo, conocían el procedimiento adecuado para llegar a la solución.

Otros 8 alumnos señalaron únicamente un fallo (4 hicieron referencia explícita al hecho de no haber multiplicado por el m.c.m el término $2x$ y otros 4 el uso inadecuado del m.c.m al multiplicar tanto fuera como dentro de paréntesis por 6). No obstante, y conviene valorarlo adecuadamente, 4 de ellos resolvieron la ecuación perfectamente, hallando las dos soluciones correctas ($x = 0\ y\ x = \frac{7}{6}$). Las otras 4 alumnas no la resolvieron, pero esto fue debido a que el enunciado no lo especificaba.

Los dos alumnos restantes no indicaron explícitamente ninguno de los dos fallos; sin embargo, y como mostraremos a continuación, siguieron el procedimiento correcto para resolver adecuadamente la ecuación; únicamente un fallo en la aplicación de las reglas de pasa (cometieron el mismo) les privó de llegar al resultado correcto (en $-6x + 7 = 0$ concluyeron que $x = -\frac{7}{6}$)

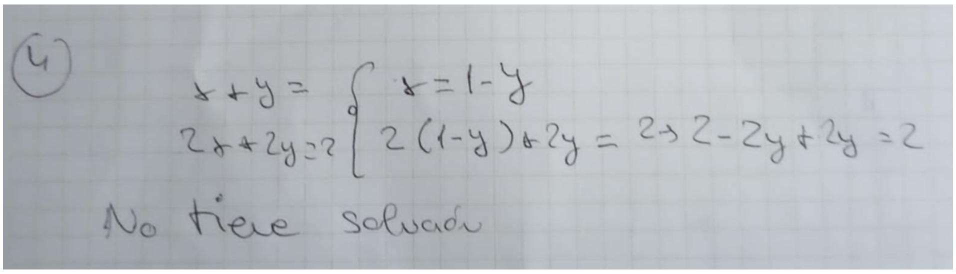


En lo que respecta a la cuestión cuarta, 9 alumnos en total señalaron el error y ofrecieron argumentos de peso para concluir que la representación hecha por Pablo Motos era incorrecta: representan dos rectas coincidentes aportando tablas de valores, resuelven el sistema, hacen referencia a que una ecuación es "el doble" que la otra o lo resuelven por el método de reducción. Ofrecemos un ejemplo debajo de estas líneas:



Método de reducción para demostrar que se trataba de un SCI

Los tres alumnos que dieron una respuesta incorrecta fue como consecuencia de tres razones diferentes: cálculo erróneo de los puntos por los que pasaba cada recta, asociación incorrecta entre una ecuación de la forma $0x = 0$ y un sistema incompatible y, por último, la representación de dos rectas coincidentes como dos paralelas. Este último, en términos de registros de representación, puede deberse a un manejo deficiente del paso del registro algebraico al gráfico.



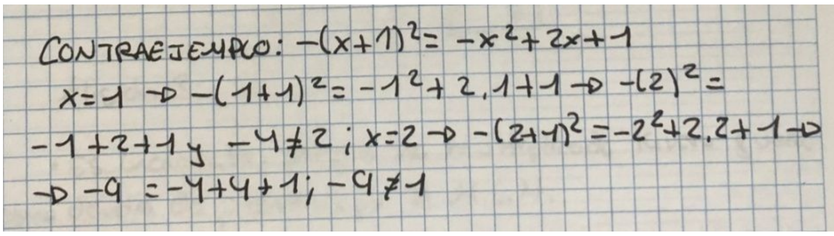
Asociación incorrecta entre una ecuación de la forma 0x=0 con un sistema incompatible

La hora de valorar los contraejemplos propuestos por el alumnado, se toman tres índices:

1- No ha propuesto ningún contraejemplo
2- Ha propuesto un contraejemplo, pero este no daba respuesta a la hipótesis planteada por el alumno
3- Ha propuesto un contraejemplo correcto y lo ha argumentado.

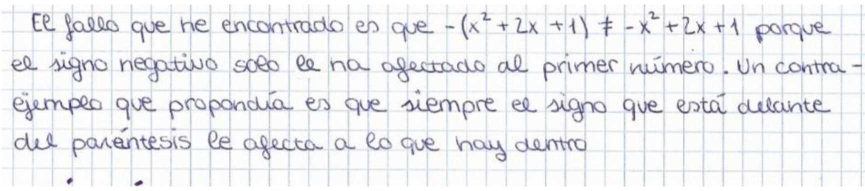
Si bien es cierto que algunas de las cuatro preguntas (especialmente la 2 y la 4) podían responderse perfectamente a través de argumentos sólidos como los ejemplificados en alguna de las imágenes anteriores, el acercamiento de la técnica del contraejemplo al alumnado ha resultado satisfactorio, sobretodo en la primera y la tercera pregunta.

Para mostrar a Pablo Motos su error a la hora de afirmar que $-(x+1)^2 = -x^2 + 2x + 1$, un total de 6 alumnos (50%) tomaron los valores $x = 1, x = 2 \; o \; ambos$ para demostrar que esa igualdad no era cierta para todo valor de x , efectuando todas las operaciones correctamente. Debajo de estas líneas se ofrece una de las respuestas aportadas por uno de estos seis alumnos:


CONTRAEJEMPLO: $-(x+1)^2 = -x^2+2x+1$
$x=1 \to -(1+1)^2 = -1^2+2{,}1+1 \to -(2)^2 =$
$-1+2+1$ y $-4 \neq 2$; $x=2 \to -(2+1)^2 = -2^2+2{,}2+1 \to$
$\to -9 = -4+4+1$; $-9 \neq 1$

Propuesta de contraejemplo tomando los valores x=1 y x=2

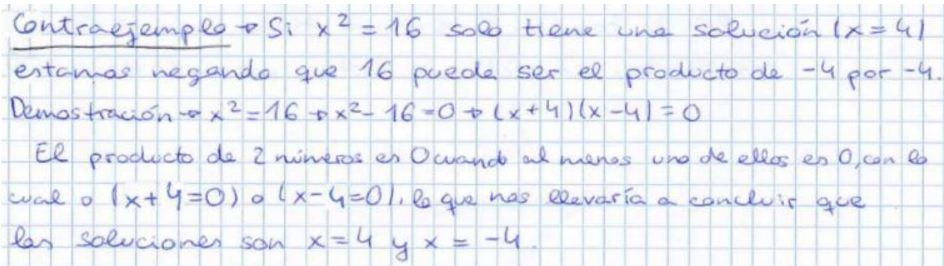
Otros 5 alumnos concluyeron que, por ser $-(x-1)^2 = -x^2-2x-1$, el razonamiento de Pablo Motos era erróneo. Una de esas respuestas fue la siguiente:


El fallo que he encontrado es que $-(x^2+2x+1) \neq -x^2+2x+1$ porque el signo negativo solo le ha afectado al primer número. Un contra-ejemplo que propondría es que siempre el signo que está delante del paréntesis le afecta a lo que hay dentro

Ejemplo de razonamiento alternativo al contraejemplo

La alumna restante propuso un contraejemplo, pero se equivocó en las operaciones y no llegó al resultado esperado.

En el caso de la pregunta 2, encontramos desde contraejemplos y argumentos sólidos hasta pequeñas demostraciones. Algunas ya las hemos mostrado anteriormente; a continuación se incluye la respuesta de una alumna que ha empleado tanto la técnica del contraejemplo como la elaboración de una demostración:


Contraejemplo → Si $x^2 = 16$ solo tiene una solución $(x=4)$ estamos negando que 16 puede ser el producto de -4 por -4.
Demostración → $x^2 = 16 \to x^2 - 16 = 0 \to (x+4)(x-4) = 0$
El producto de 2 números es 0 cuando al menos uno de ellos es 0, con lo cual o $(x+4=0)$ o $(x-4=0)$, lo que nos llevaría a concluir que las soluciones son $x=4$ y $x=-4$.

El contraejemplo usado para corregir la afirmación de Pablo Motos en la pregunta 3 no admitió discusión: los 9 alumnos que completaron el apartado del contraejemplo sugirieron sustituir en la ecuación inicial el valor $x = -\frac{7}{9}$ para llegar a una contradicción y demostrar que no podía ser solución de esa ecuación.

vemos que la segunda solución $-\frac{7}{9}$ no cumple la ecuación.

$$-\frac{7}{9}\left(-\frac{7}{9}-\frac{1}{3}\right)+2\left(-\frac{7}{9}\right)=-\frac{7}{9}\left[2\left(-\frac{7}{9}\right)+\frac{1}{2}\right]\to$$

$$\to -\frac{7}{9}\left(-\frac{10}{9}\right)-\frac{14}{9}=-\frac{7}{9}\left[-\frac{14}{9}+\frac{1}{2}\right]\to$$

$$\to \frac{70}{81}-\frac{14}{9}=-\frac{7}{9}\left(-\frac{19}{18}\right)\to -\frac{56}{81}\neq\frac{133}{162}$$

Tipo de respuesta aportada por nueve alumnos

Finalmente, la cuarta pregunta tampoco suscitó mucho debate entre los alumnos. A excepción de los tres mencionados anteriormente, el resto: o bien propusieron un contraejemplo (tablas de valores con más de un punto común o sustitución formal de dos soluciones) o bien ofrecieron un argumento en base a las características de los coeficientes de ambas ecuaciones y su término independiente. En ambos casos, y al no exigirse en el enunciado un contraejemplo, la respuesta fue muy satisfactoria y los alumnos mostraron un manejo correcto tanto dentro del registro algebraico (manejo de ecuaciones lineales, resolución del sistema, clasificación de n sistema en función de la forma de sus coeficientes y términos independientes, etc.) como del paso del registro algebraico al gráfico (identifican un sistema de esas características como compatible indeterminado y lo representan adecuadamente). Se añaden a continuación dos respuestas diferentes:

Misión número 4 → Cuando tenemos un SCI como en este caso las dos rectas nunca pueden cortarse en un punto, sino que son coincidentes, que pasan por los mismos puntos.

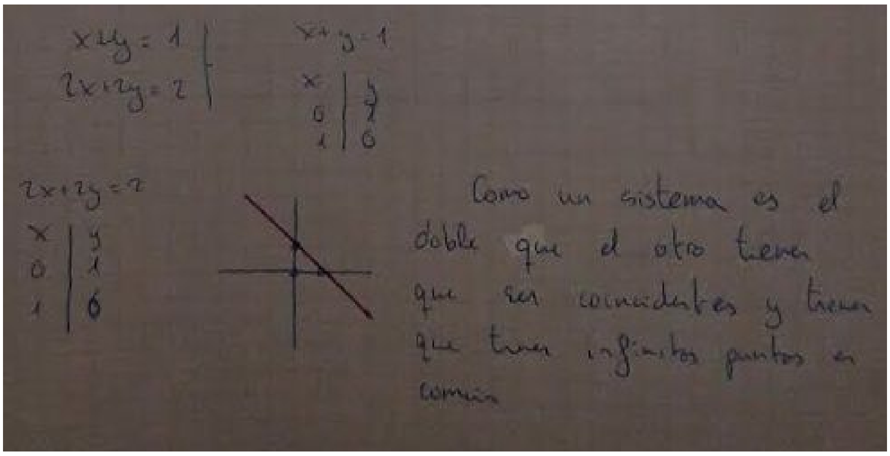
Contraejemplo → Comprobamos que (4,-3) es solución del sistema

$\begin{cases} 4-3=1 \\ 2(4)-2(3)=2 \to 8-6=2 \end{cases}$ Pero esta solución no es la única. Probamos con (2,-1):

$\begin{cases} 2-1=1 \\ 2(2)-2(1)=2 \to 4-2=2 \end{cases}$

Por lo tanto, el sistema tiene más de una solución y, por tanto, las rectas se cortan por más de un punto

Ejemplo de respuesta incluyendo contraejemplo



Ejemplo de razonamiento basado en las características de las ecuaciones del sistema

Por último, y para clasificar los errores que haya podido cometer el alumnado al escribir sus respuestas, se toman como referencia estos tres indicadores:

1. Comete los mismos errores que se pretenden corregir mediante la actividad
2. No comete errores relacionados con los objetivos de la actividad pero si otros de diversa índole
3. No comete ningún tipo de errores.

De los errores que se querían controlar por medio de esta actividad sólo uno tuvo especial presencia en las actividades individuales, y es el relacionado con la resolución de las ecuaciones del tipo $ax^2 = b \; con \; a \neq 0 \; y \; \frac{b}{a}$. Hasta 7 alumnos cometieron errores de diversa índole asociados a este tipo de ecuaciones:

1. Error procedimental debido al uso incorrecto de la fórmula para resolver estas ecuaciones. Un alumno afirmó que la ecuación $x^2 = 16$ tenía dos soluciones: $x = 0 \; y \; x = 4$; esto puede deberse a la confusión con la fórmula para resolver ecuaciones incompletas del tipo $ax^2 - bx = 0$.
2. Otro error, quizás debido a las características propias del lenguaje algebraico (símbolos) o también al aprendizaje incompleto de una fórmula fue el siguiente: al llegar a la ecuación $x^2 = 16$, y aunque luego señalaban las dos soluciones, apuntaban a que el valor de x era igual a $\sqrt{16}$, lo cual no es correcto, pues debería ser $\pm\sqrt{16}$. Solo dos alumnos, a partir de este fallo, llegaron a la solución incorrecta: en un caso, una alumna apuntaba a que el valor de x era o bien 4 o bien -4; en el otro, una alumna apuntaba a que únicamente tenía la solución x=4.

3. De forma análoga, y en el ejercicio 1, algunos alumnos que consideraron oportuno resolver la ecuación desde el principio rectificando los fallos de Pablo Matos, en el momento en el que llegaban a la ecuación $x^2 = 9$; o bien indicaban que las posibles soluciones eran 0 y -3 (sólo un alumno cometió este fallo); o bien sólo indicaban el valor $x = 3$ (sólo un alumno) o bien, a la hora de expresar el valor de x, escribían $x = \sqrt{9}$ obviando el ±, si bien posteriormente apuntaba las dos soluciones correctas (un alumno únicamente). El hecho de no acompañar con ± la raíz cuadrada puede tener su origen en un obstáculo cognitivo (en aritmética cuando resolvemos raíces cuadradas siempre van acompañadas del signo +) o puede deberse a una ausencia de sentido al no comprender la procedencia del número negativo.

Otros errores minoritarios que se apreciaron fueron la representación de dos rectas coincidentes como paralelas (una alumna únicamente), errores en operaciones con fracciones (error aritmético cometido por dos personas) y equivocación cometida a la hora de resolver la ecuación de primer grado $-6x + 7 = 0$ fue, una vez pasado el 7 como -7 al otro lado de la igualdad, el no dividir por el -1 que multiplica al 6. Ya habíamos mencionado en la parte de marco teórico que se debía a un aprendizaje deficiente de las reglas del pasa y de la regla de la balanza. Este error lo cometieron 2 personas.

Por lo tanto, y a modo de conclusión, la evaluación de la innovación se llevaría a cabo a través de estas pruebas/ actividades individuales y de la actividad grupal. Por medio de estas actividades se observa si el al alumno/alumna ha corregido los errores cometidos tanto en los exámenes como en su día a día en aula y, si bien no se le asigna una nota numérica, se le propondrán para que practique en casa actividades similares e incluso, en la siguiente actividad/prueba individual de contraejemplos, se le añadiría una cuestión extra relacionada con este tema.

El seguimiento consiste, básicamente, en la realización de estas pruebas individuales un tiempo después (no más de una semana y media) de haber llevado a cabo la actividad grupal y efectuarlas de manera aproximadamente mensual, una vez se haya acabado una unidad o dos unidades muy relacionadas. En el caso de las ecuaciones de primer y segundo grado y los sistemas de ecuaciones, ya hemos visto que se han juntado los contenidos por lo muy estrechamente relacionados que están;

en el caso de la unidad de progresiones, por ejemplo, esta actividad abarcaría únicamente ese tema y tendría lugar una semana después de la actividad grupal, que también abarcaría exclusivamente ese tema. En el caso de las unidades de estadística y probabilidad se procedería de igual forma que en el caso de ecuaciones y sistemas.

Conclusiones

A través de este trabajo se pretendía poner en valor el uso de contraejemplos como herramienta didáctica para trabajar en el aula aquellos errores que observemos que los alumnos cometen con más frecuencia. Se ha podido comprobar como, pese a que errores muy concretos siguen presentes, la mayoría de alumnos ha sido capaz de rebatir los argumentos incorrectos plasmados en un papel haciendo uso de contraejemplos, razonamientos precisos e incluso demostraciones.

La incorporación de este recurso a su trabajo diario en la asignatura comportará un desarrollo de su pensamiento matemático y de su sentido crítico, reflexionando sobre la validez o no de determinadas propiedades o razonamiento en lugar de darlos por hecho.

Referencias bibliográficas

Carrión, V. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. (11), 19-57.

Camacho, M., Hernández, J. y Socas, M. M. (1998). Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria. Revista interuniversitaria de formación del profesorado. (32), 73-86.

Both, L. R. (1982). Developing a teaching module in beginning algebra. In A. Vermandel (Ed.), Proceedings of the 6th PME international conference. 1, 280-285.

Both, L. R. (1983). A diagnostic teaching programme in elementary algebra: Results and implications. In R.Hershkowitz (Ed.), Proceedings of the 7th PME international conference. 1, 307-312.

Castro, E. (2012). *Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar.* Universidad de Granada, Granada, España.

de España, G. (2006). Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín oficial del Estado, 106(4). Recuperado de : boe.es/buscar/pdf/2006/BOE-A-2006-7899-consolidado.pdf

de España, G. (2013). Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. *Boletín Oficial del estado*. Disponible en: https://www.boe.es/buscar/pdf/2013/BOE-A-2013-12886-consolidado.pdf

de España, G. (2015). Orden ECD/65/2015, de 21de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria y el Bachillerato. Boletín Oficial del Estado núm. 25 de jueves 29 de enero de 2015

de España, G. (2014). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado núm. 3 de 3 de enero de 2015

Decreto 43/2015, de 10 de junio, por el que se regula la ordenación y se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en el Principado de Asturias.

Boletín Oficial del Principado de Asturias, 150, de 30 de junio de 2015, 1 a 521. Recuperado de https://sedemovil.asturias.es/bopa/2015/06/30/2015-10785.pdf

Real Academia Española. (2019). *Diccionario de la lengua española* (22.ª ed.). Madrid, España: Autor.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Colombia. Universidad del Valle.

Escoredo, A. y Pérez, C. (2010). Matemáticas 3º ESO. Madrid, España: Santillana Educación, S.L.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. For the Learning of Mathematics. 9(2). 19-25.

Filloy, E., Rojano, T. y Solares, A. (2003). Two Meanings of the Equal Sign and Senses of Substitution and Comparison Methods. In N. A. Pateman, B. Dogherty & J. Zilliox (Eds.) Proceedings of the Twenty-seventh Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education. 4, 223-229. Honolulu, Hawaii, USA: CRDG, College of Education, University of Hawaii

García, O. y Morales, L. (septiembre de 2013). El Contraejemplo como Recurso Didáctico en la Enseñanza del Cálculo. Revista Iberoamericana de educación matemática. (35), 161-175.

Hall, R. (2002). An analysis of errors made in the solution of simple linear equations. Philosophy of Mathematics Education Journal, 15, 113-143.

Herscovics,N., & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher,73,*572-580.

Ibarra,C.E. (junio de 2017). Análisis del desempeño estudiantil en el uso de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales.*Revista iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa (7),* 1-17.

Kieran, C. (1984). A comparison between novice and more-expert algebra students on tasks dealing with the equivalence of equations. In J.M Moser (Ed.), Proceedings of the 6th PME-NA Anual Meetings. I, 83-91.

Kieran, C. (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra. En Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future. (pp 11-50). Rotterdam: Sense Publishers Rotterdam/ TAIPEI.

Pérez, M., Diego, J. M., Polo, I. y González, M. J. (2019). Causas de los errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita, PNA 13(2), 84-103. Universidad de Granada. Granada. Trabajo recuperado de: https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/56442/Perez2019PNA13%282%29 Causas.pd f?sequence=1&isAllowed=y

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, 13 generalización y modelización por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. PNA 2(2), 61-74.

Santos, L. M. (2007). La Resolución de Problemas Matemáticos. Fundamentos Cognitivo. México: Editorial Trillas.

Segura, S. M. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. Relieme. 7(1). 49-78.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Vallejo, C. y Vallejo, V. (Ed.) (2015). Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas 3º ESO. Madrid, España: Editorial Anaya.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. In C. Laborde (Ed.,) Actes du premier colloque Franco-Allemande de Didáctique des mathématiques et de l'informatique (pp.189-199). Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Wagner, S., Rachlin, S.L & Jensen, R.J. (1984). *Algebra Learning Project: Final Report.* Athens, USA: University of Georgia, Department of Mathematics Education.

Anexo

Actividad Contraejemplos:

Pablo Motos No ha sacado buena nota en su examen de matemáticas de ecuaciones de primer grado, segundo grado y sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Tu misión es ayudarle a corregir los errores que ha cometido. ¿Cómo lo harás? Proponiendo un contraejemplo que le ayude a ver que algunas de sus afirmaciones no son ciertas.

Pregunta 1: Resuelve la siguiente ecuación de segundo grado:

$$(x+3)^2-(x+1)^2-4x=x^2-1$$

Solución de Pablo Motos:

Bueno, está claro que $(x+3)^2=x^2+6x+9$ y que $(x+1)^2=x^2+2x+1$. Entonces:

$$x^2+6x+9-(x^2+2x+1)-4x=x^2-1$$
$$x^2+6x+9-x^2+2x+1-4x=x^2-1$$
$$4x+10=x^2-1$$
$$x^2-4x+9=0$$

No sigo porque no me acuerdo de la fórmula de la ecuación de segundo grado. ¡Barrancas no me la ha querido chivar!

Misión número 1: ¿Qué fallos has encontrado en el ejercicio que ha hecho Pablo Motos? ¿Qué contraejemplo propondrías para demostrarle que no es cierta la igualdad $-(x+1)^2=-x^2+2x+1$?

Pregunta 2: Resuelve la siguiente ecuación de segundo grado: $x^2=16$

Solución de Pablo Motos:

Esta es fácil, si $x^2=16$, entonces $x=\sqrt{16}=4$. Sólo tiene una solución y esa es $x=4$.

<u>Misión número 2:</u> ¿Es verdad que esa ecuación sólo tiene una solución? En caso de que lo que afirma Pablo Motos sea falso: ¿Podrías demostrarle que existe otro número real que cumple la igualdad $x^2 = 16$?

<u>Pregunta 3:</u> Resuelve la siguiente ecuación de segundo grado:

$$x\left(x-\frac{1}{3}\right)+2x = x\left(2x+\frac{1}{2}\right)$$

<u>Solución de Pablo Motos:</u>

El mínimo común múltiplo de 2 y de 3 (m.c.m(2,3)) es 6. Multiplicaré por 6 la ecuación:

$$6x(6x-2)+2x = 6x(12x+3)$$

$$36x^2 - 12x + 2x = 72x^2 + 18x$$

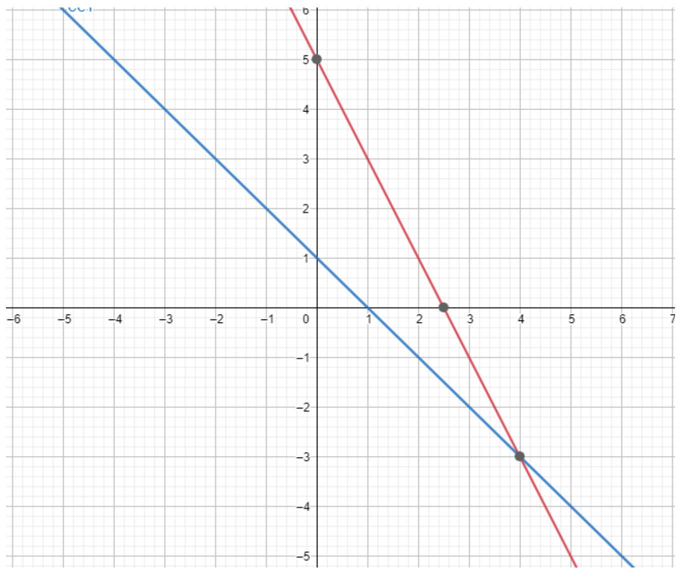
$$-36x^2 - 28x = 0$$

Luego las soluciones son:$x = 0\ y\ x = \frac{-28}{36}$=$\frac{-7}{9}$

<u>Misión número 3:</u> ¿Es correcto el procedimiento de Pablo Motos? Si no lo es: ¿Qué fallos ha cometido? ¿Cómo demostrarías que no ha llegado al resultado correcto?

<u>Pregunta 4:</u> Resuelve gráficamente el sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$

<u>Solución de Pablo Motos:</u> Las dos rectas se cortan únicamente en un punto (0,1) y la representación gráfica es esta:



<u>Misión número 4:</u> Tu misión es hacerle ver que el sistema tiene más de una solución y que, por tanto, esa representación gráfica que ha hecho es incorrecta.