

Dificultad de los problemas verbales en los libros de primaria de Singapur y España

Santiago Vicente Martín (Universidad de Salamanca. España)
Lieven Verschaffel (Katholieke Universiteit Leuven. Bélgica)
Rosario Sánchez Fernández (Universidad de Salamanca. España)

Fecha de recepción: 09 de mayo de 2022

Fecha de aceptación: 11 de octubre de 2022

Resumen

Para los sistemas educativos de Singapur y España la resolución de problemas es la piedra angular del currículo de matemáticas de primaria. No obstante, los resultados de TIMSS indican que los alumnos de Singapur son capaces de resolver problemas verbales más difíciles que los españoles. Esto puede deberse, en algún grado, a los libros de texto que se usan en cada país. Para comprobarlo, en este trabajo se compara la dificultad de los problemas verbales de números presentes en los libros de matemáticas de la editorial más utilizada en cada país. Los resultados muestran que los libros de Singapur contienen problemas verbales más difíciles que los españoles, tanto en general como en cada uno de los niveles escolares. Comprender el diseño de los libros de texto puede ser útil para mejorarlos de modo que los alumnos aprendan mejor a resolver problemas.

Palabras clave

Problemas verbales, libros de texto, competencia matemática, aritmética, álgebra

Abstract

For the education systems of Singapore and Spain, problem solving is the cornerstone of the primary mathematics curriculum. However, TIMSS results indicate that Singaporean students can solve more difficult word problems than Spanish students. This may be due, to some extent, to the way in which each country's curriculum is concretized through its textbooks. To verify this hypothesis, this paper compares the difficulty of verbal number problems in mathematics textbooks from the most widely used publisher in each country. The results show that the Singapore textbooks contain more difficult word problems than the Spanish textbooks, both in general and at each school level. Understanding the design of textbooks can be useful to improve them so that students learn better problem-solving skills.

Keywords

Word problems, textbooks, mathematical ability, arithmetic, algebra

1. Introducción

Uno de los principales objetivos de los sistemas educativos de todo el mundo es conseguir que sus alumnos alcancen un nivel adecuado de competencia matemática. Esa competencia matemática se evalúa periódicamente en multitud de países a través de pruebas internacionales como el Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS). En los resultados de esta prueba, que evalúa a



Sociedad Canaria de Profesorado de Matemáticas

Luis Balbuena Castellano

los alumnos de 4.º de primaria, Singapur se ha situado la cabeza en las últimas ediciones, de modo que se ha convertido en referencia para la mejora del aprendizaje de las matemáticas en muchos países, entre ellos España. No en vano, uno de los objetivos de los resultados de TIMSS es contribuir a que en los países participantes se puedan tomar decisiones basadas en evidencias que permitan mejorar tanto su política como la práctica educativa (Yin y Foy, 2021). Los resultados de TIMSS permiten conocer, tanto el nivel competencia matemática general de los alumnos de un país, como la proporción de alumnos que alcanza determinados niveles de competencia. Cada uno de esos niveles se asocia a distintos grados de habilidad para resolver problemas: los alumnos con un nivel de competencia intermedio solo podrían resolver problemas rutinarios, mientras que los de nivel alto o avanzado podrían resolver problemas de mayores niveles de dificultad. De acuerdo con los resultados de la evaluación más reciente de TIMSS (2019), el 84% de los alumnos de Singapur alcanzaron un nivel alto, y muchos ellos (el 54% del total de alumnos evaluados) llegaron a un nivel avanzado. Sin embargo, en España el 27% de los alumnos alcanzó un nivel alto, de los cuales solo una pequeña parte (el 4% de la muestra total) alcanzó un nivel avanzado (Mullis et al., 2020). De este modo, la mayoría de los alumnos españoles se muestra mucho menos capaz de resolver problemas de cierta dificultad que los alumnos de Singapur.

Las causas de estas diferencias parecen estar, fundamentalmente, en determinadas variables sociales (implicación de las familias en la educación escolar, importancia de la educación para la sociedad) y políticas (presupuesto del gobierno dedicado a la educación, formación del profesorado, ver Rao et al., 2010). Además, hay otros elementos, como el diseño los libros de texto, que también podrían ejercer cierta influencia en esas diferencias, ya que el libro es la principal herramienta usada en las aulas españolas (ANELE, 2014). Siendo esto así, en el presente trabajo nos centraremos en analizar el nivel de dificultad de los problemas verbales incluidos en los libros de texto que más se han utilizado en Singapur y en España. Para ello, en primer lugar, profundizaremos en el significado de las diferencias señaladas por TIMSS en el rendimiento de los alumnos singapurenses y españoles. Después definiremos los tipos de problemas que los alumnos pueden encontrarse en el aula, y los categorizaremos según su nivel de dificultad, es decir, de acuerdo con el nivel de razonamiento que requiere su resolución. Finalmente, describiremos los motivos por los cuales los libros de texto son uno de los recursos de mayor influencia en la práctica educativa.

2. Resolución de problemas y niveles de rendimiento en TIMSS

En el ámbito de la educación matemática, el término “resolución de problemas” puede entenderse de diferentes modos, desde ejercitarse a través de tareas rutinarias hasta resolver situaciones nuevas o sorprendentes (Schoenfeld, 1992). Por ejemplo, el marco teórico de TIMSS entiende la resolución de problemas como la habilidad de resolver situaciones matemáticas variadas, en las que es necesario tener conocimientos matemáticos, aplicarlos y razonar de diferentes modos y con diferentes niveles de complejidad (Lindquist et al., 2017). Asimismo, López et al. (2015) señalan que la resolución de problemas puede analizarse desde ópticas muy diferentes: según su tipología (ejercicios, de palabras, para demostrar, realistas), el contexto situacional en que aparecen, su formulación (ilustraciones, número de cuestiones, suficiencia de información), los requerimientos de resolución (identificación y aplicación, razonamiento), el tipo de solución requerida (apertura, formato representacional, unicidad y exactitud) y si implica algún tipo de toma de decisiones.

Un tipo concreto de problemas de matemáticas son los Problemas Aritméticos Verbales (en adelante, PAV), que se definen como descripciones verbales de situaciones problemáticas en las que se plantea(n) una o varias preguntas cuyas respuestas pueden obtenerse aplicando operaciones aritméticas a los datos numéricos del problema (Verschaffel et al., 2020). Los PAV son considerados herramientas imprescindibles para que los alumnos aprendan a resolver problemas en la escuela. Asimismo, en

TIMSS se vincula el nivel de competencia alcanzado por un alumno con su habilidad para resolver determinados tipos de PAV. Para ilustrar esta idea podemos tomar como ejemplo algunos de los ítems liberados de la edición de TIMSS del año 2011. Los alumnos con un nivel intermedio serían capaces de resolver únicamente los problemas fáciles, que impliquen números naturales y una única operación, como este primer ejemplo de ítem liberado (en adelante, IL1): ‘Hay 218 pasajeros y 191 miembros de la tripulación en un barco. ¿Cuánta gente hay en total en el barco?’ Este problema fue resuelto por el 93% de los alumnos de 4.º de primaria de Singapur y el 83% de los españoles. Un segundo ítem liberado (IL2), de estructura multiplicativa, también fácil, es el siguiente: “En la feria del pueblo se intercambian cromos. 1 cromo de animales se cambia por 2 de dibujos animados. Becky tiene 5 cromos de animales para cambiar por cromos de dibujos animados. ¿Cuántos cromos de dibujos animados obtendrá Becky?” El 86% de los alumnos de Singapur y el 63% de los alumnos españoles lo resolvieron correctamente. Los alumnos con un nivel de competencia alto serían capaces de resolver problemas de dos pasos que requieran la comprensión conceptual de los números enteros, como el siguiente (IL3): “En la feria se intercambian 2 cromos de animales por 3 cromos de deportes. Jim tiene 8 cromos de animales para cambiar por cromos de deportes. ¿Cuántos cromos de deportes obtendrá?” Este problema fue resuelto por el 71% de los alumnos de Singapur, y por el 20% de los alumnos españoles. Finalmente, los alumnos de nivel avanzado serían capaces de resolver problemas relativamente difíciles, de múltiples pasos, que requieran comprensión y aplicación del razonamiento, como el siguiente (IL4): “En la feria del pueblo se intercambian cromos. 1 cromo de animales se cambia por 2 de dibujos animados, y 2 cromos de animales por 3 cromos de deportes. Brad tiene 8 cromos de dibujos animados para cambiar por cromos de deportes. ¿Cuántos cromos de deportes obtendrá?” Este problema fue resuelto correctamente por el 48% de los alumnos de Singapur, y por el 9% de los alumnos españoles.

Para interpretar adecuadamente estos resultados, es necesario comprender por qué los dos primeros problemas son más fáciles que el tercero, y por qué el último es el más difícil de todos. Para ello, es conveniente destacar dos cuestiones: primero, que existe una variedad muy amplia de problemas que se resuelven con una de las cuatro operaciones aritméticas básicas, y segundo, que la resolución de diferentes problemas implica diferentes niveles de razonamiento matemático.

3. Tipos de problemas según su estructura semántico-matemática

El nivel de dificultad de los problemas viene determinado por diferentes criterios: lingüísticos (estructura, vocabulario, semántica), matemáticos (propiedades de los números del problema, operación aritmética o estrategias de resolución requeridas, relevancia de la información) u otros factores generales (sociales, pedagógicos, etc., ver Daroczy et al., 2015). La estructura semántico-matemática de los problemas es uno de los factores que determina en mayor medida su nivel de dificultad (Carpenter y Moser, 1984; Greer, 1992; Heller y Greeno, 1978; Vergnaud, 1991). En los PAV de estructura aditiva (aquellos que pueden resolverse con una suma o una resta) se han descrito cuatro tipos de problemas de acuerdo con su estructura semántico-matemática: cambio, comparación, combinación e igualación (Heller y Greeno, 1978; Carpenter y Moser, 1984). En función del conjunto desconocido y de las relaciones (aditivas o sustractivas) existentes entre los conjuntos implicados en cada PAV, pueden establecerse las 20 subcategorías descritas en la Figura 1.

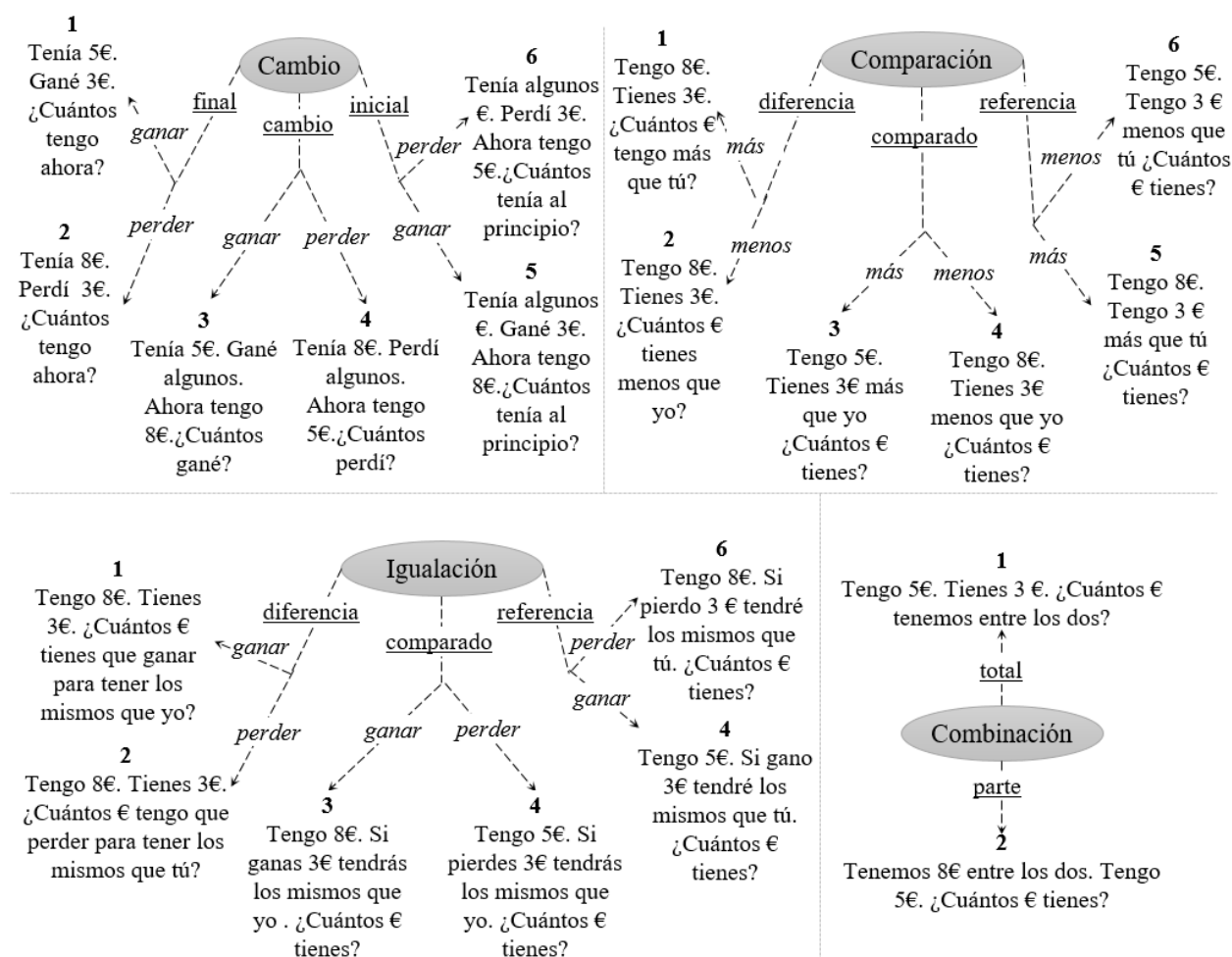


Figura 1. Tipos de problemas aritméticos verbales de estructura aditiva (adaptado de Heller y Greeno, 1978 y Carpenter y Moser, 1984). Los números sobre cada enunciado indican el sub-tipo de problema al que pertenecen.

Por otra parte, para los PAV de estructura multiplicativa (que son intrínsecamente más difíciles que los aditivos, véase Verschaffel et al., 2007) se han descrito cuatro tipos de estructuras: razón (o grupos iguales), comparación multiplicativa (o escalares), producto cartesiano y matriz rectangular (Greer, 1992; Vergnaud, 1991). En función de la operación necesaria para resolver el PAV y cuál sea el conjunto desconocido, se pueden diferenciar las subcategorías que se muestran en la Figura 2.

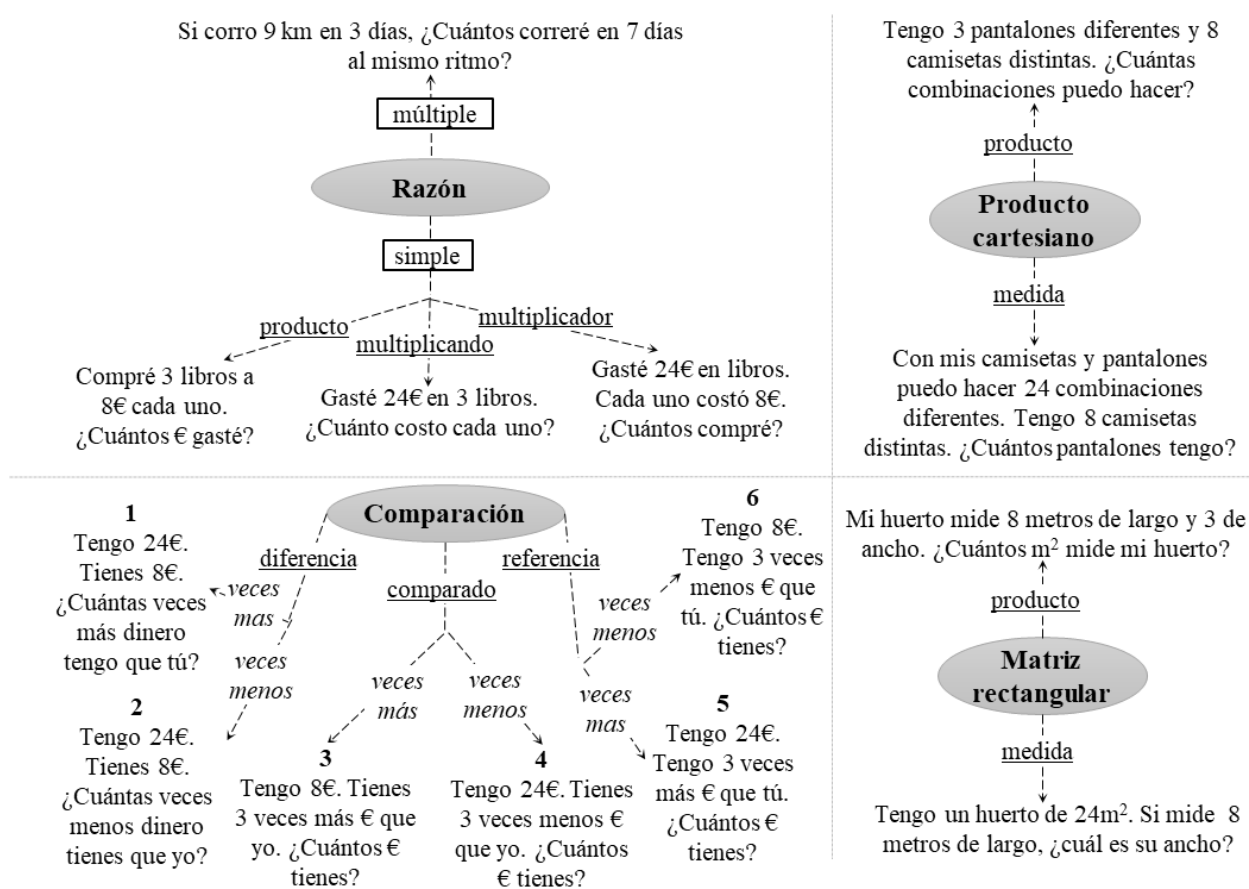


Figura 2. Tipos de problemas aritméticos verbales de estructura multiplicativa (adaptado de Greer, 1992 y Vergnaud, 1991).

Como cualquier PAV, cada uno de los ítems liberados de TIMSS que tomamos como ejemplo unas líneas más arriba puede incluirse en alguna de estas categorías. El IL1 (averiguar la gente que viaja en el barco sabiendo el número de pasajeros y de tripulantes) es un problema de combinación 1, y se resolvería con una suma. El IL2 (cambiar 5 cromos de animales por cromos de dibujos animados, a razón de 2 cromos de dibujos por cada cromo de animales) sería un problema de multiplicación-razón simple, y se resuelve con una multiplicación. El IL3 (cambiar 8 cromos de animales por cromos de deportes, a razón de 3 cromos de animales por cada 2 de deportes), es un problema de multiplicación-razón múltiple, y se resuelve mediante una regla de tres, por lo que implica una división ($8 : 2 = 4$) y una multiplicación ($4 \times 3 = 12$). Finalmente, el IL4 (cambiar 8 cromos de dibujos animados por cromos de deportes, a razón de 2 cromos de dibujos por cada cromo de animales, y de 3 cromos de animales por cada 2 de deportes) podría entenderse como la combinación de una estructura multiplicativa de razón simple con multiplicador desconocido, para saber el número de cromos de animales que puede obtener ($8 : 2 = 4$); y otra de multiplicación razón múltiple, para saber cuántos cromos de deportes puede obtener, una vez sabidos los que puede obtener de animales ($4 : 2 = 2$; $2 \times 3 = 6$).

El nivel de dificultad de los problemas a los que se enfrentan los alumnos y las estrategias que se utilicen para resolverlo determinan el grado de éxito con el que los resuelven. Por ello, es preciso analizar los modelos que explican el modo en el que los alumnos resuelven problemas.

4. Modelos de resolución y niveles de dificultad de los problemas

Se han propuesto diferentes modelos explicativos para describir tanto el proceso de resolución de PAV como el nivel de dificultad de los diferentes tipos de problemas, entendiendo por dificultad el grado de razonamiento de diferentes tipos necesario para su resolución y la necesidad de generar un modelo mental del problema. Por ejemplo, Verschaffel et al. (2000) plantean la existencia de dos modos de resolver un PAV: genuino y superficial. Los problemas semántico-matemáticamente difíciles -aquellos en los que es necesario razonar para comprender las relaciones entre las cantidades del problema- solo pueden ser resueltos correctamente de modo genuino. Por ejemplo, en el IL3 (de multiplicación razón múltiple) el alumno debe comprender que el problema implica dos pasos: primero debe averiguar cuántos grupos de 2 cromos de deportes puede hacer con los 8 que tiene, y luego multiplicar el número de grupos obtenido por los 3 cromos de animales que le darán por cada grupo de 2 cromos de deportes. En cambio, los problemas fáciles pueden resolverse de manera superficial utilizando, entre otras, la "estrategia de la palabra clave" (Hegarty, et al., 1995). Por ejemplo, el IL1 descrito más arriba, puede resolverse sin necesidad de razonar, tomando los datos del enunciado ("218" y "191"), y la expresión "en total" de la pregunta como una clave para sumar ambas cantidades, obviando el resto de la información del enunciado y sin necesidad de comprender la situación descrita.

Otros modelos han definido los niveles de dificultad de los problemas en función de las estrategias de resolución que es necesario desplegar para resolverlos. Por ejemplo, Riley y Greeno (1988) diferencian tres niveles de dificultad para los problemas de estructura aditiva. Los problemas más fáciles serían aquellos que el alumno puede resolver modelando directamente el enunciado, de modo que no sería necesario crear una representación mental del mismo. Por ejemplo, problemas de combinación 1 como el IL1, y que impliquen cantidades pequeñas, podrían resolverse simplemente juntando ambas cantidades y contando para alcanzar el resultado. Los problemas de dificultad media serían aquellos cuya resolución requeriría crear una representación mental de la estructura matemática del problema, ya que la ubicación del conjunto desconocido en esa estructura impide el modelado directo, si bien esa cantidad puede averiguarse ejecutando determinadas acciones acordes con las relaciones entre los conjuntos. Por ejemplo, en el PAV de cambio 3 — ver Figura 1 — puede representarse la cantidad inicial, la cantidad final, y añadir los euros necesarios para llegar desde el conjunto inicial hasta el final. Finalmente, los problemas difíciles son aquellos que solo pueden resolverse transformando la representación mental inicial del PAV mediante la aplicación del conocimiento conceptual parte-todo. Por ejemplo, para resolver un problema de cambio 6 (ver Figura 1) es necesario comprender que la cantidad inicial constituye el total formado por los 3 euros que perdí y los 5 que me quedan al final.

De este modo, podemos concluir que, de acuerdo con la estructura semántico-matemática de los PAV, existe una variedad muy amplia de problemas, cuya resolución entraña niveles de dificultad muy dispares.

5. Libros de texto y resolución de problemas

Existen dos argumentos que sugieren que los libros ejercen una influencia considerable en el desarrollo de la competencia matemática de los alumnos en general, y de su habilidad de resolver problemas en particular. En primer lugar, los maestros de la mayoría de los países del mundo utilizan los libros de texto de manera muy frecuente en sus clases (Depaepe et al., 2009; Hiebert et al., 2003).

En segundo lugar, los libros incluyen una parte tan importante del currículo escolar que, de hecho, determinan en gran medida lo que se enseña en el aula (Apple, 1992; Oates, 2014).

Además de estos argumentos, existen evidencias empíricas de que el contenido de los libros influye en el desarrollo de algunos aspectos de la competencia matemática de los alumnos. Por ejemplo, los alumnos son más competentes en aquellos temas a los que los libros dedican más espacio (Schmidt et al., 2001), más ejercicios y más problemas (Törnroos, 2005); y aprenden mejor los principios aritméticos básicos y utilizan con más frecuencia las estrategias de resolución de problemas que más presencia tienen en los libros (Fagginger Auer et al., 2016; Heinze et al., 2009; Sievert et al., 2019, 2021). En cambio, los alumnos son menos competentes resolviendo problemas de fracciones y decimales que, siendo matemáticamente simples, apenas aparecen en los libros de texto (Siegler y Oppenzato, 2021).

En relación con la resolución de problemas, es razonable pensar que los libros de texto de los países con mejores puntuaciones en evaluaciones internacionales podrían estar contribuyendo al mejor desarrollo de la competencia matemática de los alumnos, poniendo a disposición de maestros y alumnos una mayor variedad de problemas que los libros de otros países. En este sentido, algunos estudios han encontrado que, en general, en los países orientales (como Japón o China), cuyos alumnos han demostrado un elevado nivel de competencia matemática, se utilizan libros de texto que, además de presentar los problemas como tareas más cercanas a la vida de los alumnos (Vicente et al., 2021), contienen una distribución más diversificada y equilibrada de PAV aditivos y multiplicativos que países como Estados Unidos (Mayer et al., 1995; Stigler et al., 1986; Xin, 2007) y España (Vicente et al., 2018). De hecho, los libros españoles de las últimas dos décadas han incluido una variedad muy limitada de PAV tanto en relación con las estructuras semántico-matemáticas, centrándose en las más fáciles (Orrantía et al., 2005; Tárraga et al., 2021; Vicente et al., 2018), como en los dominios cognitivos a los que se referían (Vicente y Manchado, 2017).

Esta falta de variedad no es exclusiva de los libros españoles ni de la tarea de resolución de PAV. Por ejemplo, los libros de los primeros cursos de primaria de México parecen mostrar la misma falta de variedad de PAV que los libros de España (Rodríguez-Nieto et al., 2019). Asimismo, los libros mexicanos de primaria no parecen proporcionar suficientes oportunidades para promover el pensamiento algebraico de los niños (Ake y Godino, 2018), y en los de secundaria los problemas de límites apenas se presentan en contextos no matemáticos, lo cual dificulta que los alumnos doten de sentido ese concepto (Hernández et al., 2020). Finalmente, en los libros de secundaria de Ecuador y Venezuela los problemas de ecuaciones de dos incógnitas suelen aparecer con demasiadas ilustraciones, presentar tareas de respuesta cerrada y de bajo nivel de exigencia cognitiva (Mosquera, 2018).

Considerando todo lo anterior, dado que existen diferencias en el nivel de rendimiento en matemáticas entre los alumnos españoles y singapurenses, y que los libros de texto pueden influir en el desarrollo de la competencia matemática, el presente estudio pretende comparar el nivel de dificultad de los problemas verbales -comenzando por los PAV- de los libros de España y Singapur. Esto permitirá ampliar la descripción de los libros más usados en España y Singapur realizada por Vicente et al., (2020, 2021), añadiendo el nivel de dificultad de los problemas verbales al nivel de autenticidad de los PAV y los modelos de resolución analizados por esos autores. Además, teniendo en cuenta que los libros de Singapur están diseñados para que los alumnos aprendan a resolver tanto PAV como otros tipos de problemas verbales, describir las diferencias de esos libros y los españoles puede orientar el diseño de nuevas ediciones de los libros en España y en otros países.

Antes de describir el diseño del primer estudio del presente trabajo conviene señalar que, al comparar los libros de texto de distintos países, es necesario examinar algunos aspectos de los sistemas

educativos en los que se utilizan. De acuerdo con los objetivos de nuestro estudio, deben tenerse en cuenta tres aspectos de los currículos de matemáticas de Singapur y España. En primer lugar, en ambos sistemas educativos el currículo está diseñado en forma de espiral, de manera que los conceptos y habilidades de cada contenido se revisan y se enriquecen en cada nivel para lograr una mayor profundidad y comprensión (Kelly et al., 2020). En segundo lugar, mientras que en el currículo español se establece un único itinerario general para todos los alumnos a lo largo de toda la escolaridad primaria, en Singapur este itinerario común solo llega hasta 4.º curso. A partir de 5.º se establecen dos itinerarios: un currículo estándar, que continúa el desarrollo del currículo normativo, y otro de matemáticas básicas, que repasa algunos de los conceptos y habilidades más importantes del currículo de 1.º a 4.º, y reduce la introducción de contenidos nuevos. En tercer lugar, en los currículos de Singapur y de España los contenidos matemáticos se agrupan de manera diferente. De acuerdo con los currículos vigentes en el momento de publicación de los libros objeto de análisis en el presente estudio (en nuestro país, ver Ley Orgánica 2/2006, y Real Decreto 1513/2006) el aprendizaje de la aritmética y la resolución de PAV se enmarcaría en el bloque “números” del currículo español, y en el de “números y álgebra” en el de Singapur. En ambos países, el bloque relacionado con los números y la aritmética incluye diferentes apartados. Por ejemplo, en el currículo español se incluyen los apartados “números enteros, decimales y fracciones”, “operaciones”, “porcentajes” y “cálculo”, mientras que en el currículo estándar de Singapur incluye “números enteros”, “moneda”, “fracciones” (a partir de 2.º), “decimales” (a partir de 4.º), “porcentaje”, “ratio” y “razón y velocidad” (los tres últimos, a partir de 5.º); y “álgebra” (en 6.º). Siendo esto así, es necesario señalar que, para el presente trabajo, se han analizado los libros de Singapur que se corresponden con el currículo estándar. Cabe destacar que mientras que en Singapur aún sigue vigente el mismo currículo desde 2013, en nuestro país el currículo se rige en la actualidad de acuerdo con la Ley Orgánica 3/2020 y Real Decreto 157/2022, en el cual se recoge la necesidad de desarrollar el sentido algebraico de los alumnos, lo cual incluye entre sus criterios de evaluación el proceso pautado de modelización usando representaciones matemáticas (gráficas, tablas...) para facilitar la comprensión y la resolución de problemas de la vida cotidiana.

6. Estudio 1

El objetivo del primer estudio es determinar si los libros de la editorial singapurense Marshall Cavendish (2015, en adelante MC,) incluyen PAV más difíciles que los de la editorial española Santillana (2010), considerando para ello los niveles de dificultad inherentes a las estructuras semántico-matemáticas de los PAV, tanto a nivel general como en cada nivel escolar. Las editoriales elegidas han sido las más utilizadas en las clases de cada país; los libros de Marshall Cavendish se han utilizado en más del 85% de las escuelas de Singapur (Clark, 2013), mientras que, en España, los libros de Santillana, se han utilizado en el 43% de las escuelas (Vicente et. al., 2018). Se analizaron los libros y cuadernillos complementarios de todos los cursos de primaria (1.º a 6.º) de estas dos editoriales. Dada la naturaleza y la cantidad de datos generados, se realizó un análisis cuantitativo de documentos, ya que, de acuerdo con López (2002) es más objetivo e independiente que los análisis cualitativos.

6.1. Procedimiento

Las tareas analizadas fueron aquellos PAV que pudieran resolverse aplicando, al menos, una de las cuatro operaciones aritméticas básicas, y cuya estructura semántico-matemática coincidiera con alguna de las estructuras aditivas o multiplicativas descritas en la literatura, y que se han presentado en las Figuras 1 y 2. Por este motivo, no se consideraron otros tipos de problemas (álgebra, ratio, estadística o geometría) que no pudieran incluirse en ninguna de esas estructuras. Para asegurar la fiabilidad de la categorización de los PAV, se hizo un primer análisis en el que dos de los autores seleccionaron y

analizaron por separado los PAV de los dos primeros cursos de la misma editorial. Las dudas que surgieron en ese análisis preliminar (menos del 2% de los casos) se resolvieron mediante discusión. El resto de la selección fue realizada por el primer autor. En total se analizaron 4680 PAV, de los cuales 2350 correspondieron a los libros de Singapur y 2330 a los de Santillana.

6.1.1. Categorías de análisis. Estructura semántico-matemática

Se utilizaron dos clasificaciones diferentes: una para los PAV de estructura aditiva y otra para los de estructura multiplicativa. Los PAV que contenían dos o más estructuras se descompusieron en estructuras individuales para su categorización.

PAV de estructura aditiva. Los problemas de estructura aditiva (aquellos que pueden resolverse mediante una suma o una resta) se clasificaron como problemas de cambio, comparación, combinación e igualación (Heller y Greeno, 1978; Carpenter y Moser, 1984). Se establecieron 20 subcategorías diferentes en función del conjunto desconocido y de las relaciones (aditivas o sustractivas) existentes entre los conjuntos implicados (ver la Figura 1). Cada subcategoría se clasificó según su nivel de dificultad, siguiendo el modelo de estrategias de resolución propuesto por Riley y Greeno (1988), descrito más arriba. El primer nivel -dificultad baja o problemas fáciles- incluía los problemas de cambio 1 y 2, comparación 1 y 2, igualación 1 y 2, y combinación 1. El segundo nivel -dificultad media- incluía los PAV de cambio 3 y 4, comparación 3 y 4, e igualación 5 y 6. Finalmente, el tercer nivel -dificultad alta o problemas difíciles-, incluye los PAV de cambio 5 y 6, comparación 5 y 6, e igualación 3 y 4. Respecto a los problemas de combinación 2, algunos estudios señalan que no son tan difíciles como, por ejemplo, comparación 5 y 6 (Rathmell, 1986; Riley et al., 1983; Riley y Greeno, 1988). Esto puede deberse a que los problemas de combinación 2 ya poseen una estructura parte-todo, por lo que no requieren la reestructuración mental que requieren los PAV aditivos más difíciles. Siendo esto así, los problemas de combinación 2 fueron considerados de dificultad media.

PAV de estructura multiplicativa. Se distinguieron cuatro tipos de PAV (Greer, 1992; Vergnaud, 1991): razón (o grupos iguales), comparación multiplicativa (o escalares), producto cartesiano y matriz rectangular. Dependiendo de si se necesita multiplicar o dividir, y de cuál sea el conjunto desconocido, se pueden establecer las categorías que se muestran en la Figura 2. Respecto a los niveles de dificultad, se consideraron de dificultad baja o problemas fáciles los PAV de razón simple, los más próximos a los problemas de estructura aditiva. Se consideraron de dificultad media los PAV de: a) razón múltiple, ya que la razón en estos PAV no es tan evidente como en los problemas de razón simple (Vergnaud, 1991); y b) de comparación multiplicativa, siempre que fueran consistentes, es decir, cuando la expresión “veces más” o “veces menos” coincidiera con la operación a realizar (una multiplicación y una división, respectivamente). Los PAV de comparación multiplicativa entrañan una doble dificultad. Por un lado, la dificultad inherente a la comprensión de los términos comparativos que lleva a algunos alumnos a transformar la comparación, por ejemplo, modificando el enunciado “Alex tiene 8 veces más galletas”, por “Alex tiene 8 galletas” (Cummins et al., 1988). Por otro lado, los alumnos deben diferenciar este tipo de problemas de los problemas de comparación aditiva (Chapin y Johnson, 2000). Por estos motivos los problemas de comparación multiplicativa son más difíciles de resolver que los problemas de razón (Xin, 2007). Por último, se consideraron difíciles tanto los PAV de comparación multiplicativa inconsistentes como los de matriz rectangular y producto cartesiano (los dos últimos tipos pertenecientes a la categoría de producto de medidas de Vergnaud, 1991).

6.1.2. Categorías de análisis. Niveles educativos

Además de los resultados generales, se realizaron análisis por niveles educativos, para lo cual se agruparon los resultados de los libros de los seis cursos de primaria en grupos de dos. De este modo, se

consideraron tres niveles educativos: nivel 1 (1.º y 2.º de primaria), nivel 2 (3.º y 4.º) y nivel 3 (5.º y 6.º).

6.1.3. Codificación y análisis de datos

Dado que las estructuras multiplicativas son intrínsecamente más difíciles que las aditivas (Verschaffel et al., 2007), ambos tipos de estructuras se analizaron por separado. Para codificar los problemas, cada problema de un paso se clasificó como aditivo o multiplicativo y se asignó a una subcategoría (Ver Figuras 1 y 2). Los PAV que incluían dos, tres, cuatro o más pasos se descompusieron en estructuras individuales, que se categorizaron por separado, por lo que el número de estructuras fue mayor que el número total de PAV analizados. Finalmente, a cada estructura identificada se le asignó un nivel de dificultad, siguiendo la categorización anteriormente descrita.

En relación con los resultados por niveles escolares, se realizaron dos análisis diferentes. En primer lugar, se analizaron las diferencias entre editoriales respecto al nivel de dificultad de las estructuras semántico-matemáticas de los PAV en cada uno de los niveles educativos considerados (niveles 1, 2 y 3). En segundo lugar, se analizó la evolución de la dificultad semántico-matemática de los PAV de una misma editorial a lo largo de los diferentes niveles escolares.

Para comprobar la significatividad de las diferencias encontradas se utilizaron estadísticos no paramétricos. En concreto, se utilizó el estadístico Chi cuadrado (o el estadístico exacto de Fisher cuando Chi cuadrado no era apropiado) para analizar las diferencias globales encontradas entre las dos editoriales o entre los niveles escolares de cada editorial, mediante tablas planificadas. Para comprobar el efecto de esas diferencias se utilizó el estadístico V de Cramer, que, según Murphy y Myors (1998), indica si el efecto de las diferencias es pequeño (.1), mediano (.3) o grande (.5). Para comparar las diferencias concretas, se realizaron pruebas de z con un nivel de significación de .05, utilizando comparaciones por pares de proporciones de columnas.

6.2. Hipótesis

Teniendo en cuenta que los resultados de las evaluaciones internacionales indican que los alumnos singapurenses obtienen mejores puntuaciones en la resolución de problemas de dificultad media y alta que los alumnos españoles, cabe esperar los resultados que se describen a continuación.

En primer lugar, los libros de Singapur incluirán más PAV de estructuras semántico-matemáticas de dificultad media y alta, tanto en los problemas de estructura aditiva (hipótesis 1a) como multiplicativa (hipótesis 1b). Estos resultados se encontrarán en los diferentes niveles (hipótesis 1c): tanto en el nivel 1 (hipótesis 1c1), como en el nivel 2 (hipótesis 1c2) y en el nivel 3 (hipótesis 1c3).

En segundo lugar, dado que tanto en el currículo singapurenses como en el español los contenidos están diseñados en espiral, se encontrarán más problemas de dificultad media y alta en los cursos superiores tanto en los libros de Singapur (hipótesis 2a) como en los españoles (hipótesis 2b).

6.3. Resultados

6.3.1. Problemas aritméticos de estructura aditiva

Resultados globales

Se encontraron diferencias significativas entre las dos editoriales en la distribución de estructuras de acuerdo con su nivel de dificultad, $\chi^2(2, n=4013) = 156,02, p < .001$, siendo pequeño el efecto de estas diferencias (.20). Los libros de Singapur incluyeron más problemas difíciles y de dificultad media que los españoles, mientras que estos incluyeron más problemas fáciles. Estos resultados, que se muestran en la Tabla 1 confirman nuestra hipótesis 1a.

Dificultad	MC		Santillana	
	N	%	N	%
Fácil	1244	60.7	1507	76.7*
Medio	668	32.6*	437	22.2
Difícil	136	6.6*	21	1.1
TOTAL	2048		1965	

Tabla 1. Frecuencia de niveles de dificultad de PAV de estructura aditiva por editorial.

Resultados por niveles

Diferencias inter-editorial. Se encontraron diferencias entre ambas editoriales en todos los niveles, N1: $\chi^2(2, n=726) = 34.84, p < .001$; N2: $\chi^2(2, n=1320) = 121.88, p < .001$; y N3: $\chi^2(2, n=1917) = 25.25, p < .001$. El efecto de las diferencias fue pequeño en N1 (.22) y mediano en N2 y N3 (.30 en ambos casos). En los niveles 1 y 2, los libros de MC incluyeron más estructuras de dificultad media y alta que Santillana, mientras que Santillana incluyó más problemas fáciles, confirmándose las hipótesis 1c1 y 1c2. En cambio, en el nivel 3 los libros de MC incluyeron más estructuras de dificultad media y los de Santillana más problemas fáciles, pero no se encontraron diferencias en las estructuras difíciles (ver Figura 3). Estos resultados no confirman nuestra hipótesis 1c3.

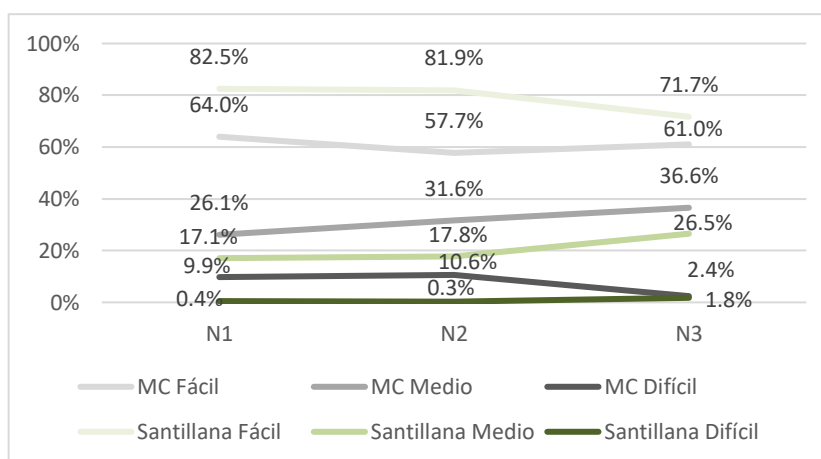


Figura 3. Frecuencia de niveles de dificultad de PAV de estructura aditiva en cada uno de los niveles de las dos editoriales analizadas (MC y Santillana).

Diferencias intra-editorial. Se encontraron diferencias significativas en la distribución de los problemas de estructura aditiva a lo largo de los cursos tanto en los libros de MC, $\chi^2(4, n=2048) = 60.31, p < .001$, como en los de Santillana, $\chi^2(4, n=1965) = 34.01, p < .001$, siendo pequeño el efecto de la diferencia en ambos casos (.12 y .09, respectivamente). En el caso de MC, en contra de nuestra hipótesis 2a, los libros de MC incluyeron más estructuras difíciles en los niveles 1 y 2 que en el nivel 3, y más estructuras de dificultad media en el nivel 3 que en el 1 (ver Figura 3). Por su parte, los libros de

Santillana incluyeron más estructuras fáciles en los niveles 1 y 2 que en el 3, más problemas de dificultad media en el nivel 3 que en los niveles 1 y 2, y más estructuras difíciles en el nivel 3 que en el nivel 2. De este modo, los resultados de Santillana confirmaron parcialmente la hipótesis 2b.

6.3.2. Problemas aritméticos de estructura multiplicativa

Resultados globales

Al igual que en los problemas de estructura aditiva, se encontraron diferencias significativas entre ambas editoriales, $\chi^2(2, n=3138) = 128.12, p < .001$, siendo pequeño el efecto de estas (.20). En la Tabla 2 se observa que, de nuevo, los libros de MC incluyeron más estructuras de dificultad media y alta que los de Santillana, que incluyeron más problemas fáciles, confirmándose así la hipótesis 1b.

Dificultad	MC		Santillana	
	N	%	N	%
Fácil	1026	72.3	1504	87.5*
Medio	302	21.3*	134	7.8
Difícil	91	6.4*	81	4.7
TOTAL	1419		1719	

Tabla 2. Frecuencia de niveles de dificultad de PAV de estructura multiplicativa por editorial

Resultados por niveles

Diferencias inter-editorial. Comparando la distribución del grado de dificultad de los problemas de estructura multiplicativa en cada uno de los niveles, el estadístico exacto de Fisher mostró diferencias significativas entre ambas editoriales en todos los niveles: N1 ($n=288, p < .001$); N2 ($n=931, p < .001$); y N3 $\chi^2(2, n=1919) = 159.53, p < .001$. Los tamaños de estas diferencias fueron medianos en los niveles 1 y 2 (.37 y .41, respectivamente) y pequeño en el nivel 3 (.29). La Figura 4 muestra que en N1 todas las estructuras de los problemas de los libros de MC fueron fáciles, mientras que el 16.4% de los problemas de Santillana fueron de dificultad media. Estos resultados no confirman la hipótesis 1c1. En N2 los libros de Singapur incluyeron más problemas de dificultad media y alta que Santillana, que incluyó más estructuras fáciles confirmándose nuestra hipótesis 1c2. Finalmente, en contra de nuestra hipótesis 1c3, en N3 los libros de Singapur incluyeron más problemas de dificultad media que los de Santillana, pero menos de dificultad alta (y también menos de dificultad baja).

Diferencias intra-editorial. En MC se encontraron diferencias entre los 3 niveles educativos, ($n=1419, p < .001$), siendo pequeño el efecto de éstas (.29). En contra de nuestra hipótesis 2a, estos libros incluyeron más estructuras difíciles en N2 que en N3, y más problemas de dificultad media en N3 que en N2. En Santillana también se encontraron diferencias significativas entre los tres niveles analizados ($n=1719, p < .001$) siendo pequeño el efecto de éstas (.13). En este caso, se encontraron más problemas fáciles en N2 que en N1 y N3, más medios en N1 que en N2 y más estructuras difíciles en N3 que en N2. Estos resultados, que se observan en la Figura 4, no confirman la hipótesis 2b.

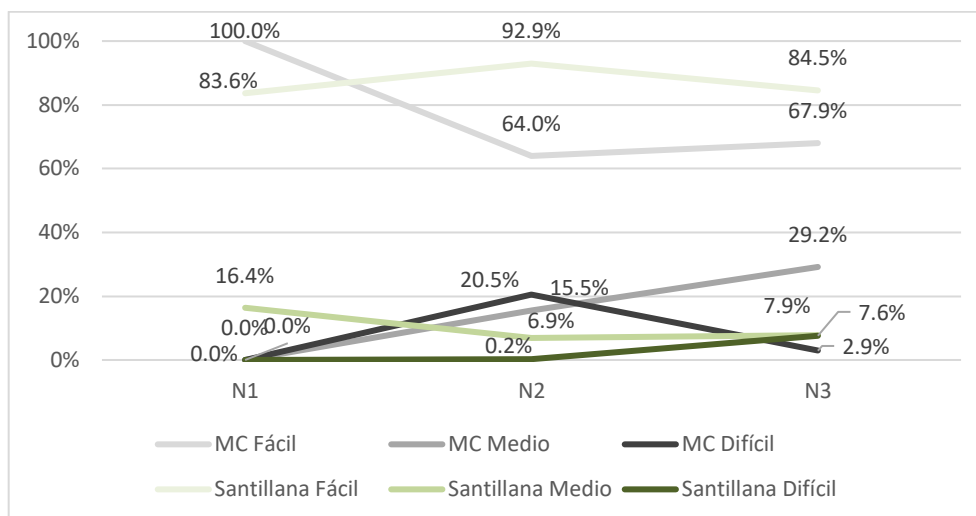


Figura 4. Frecuencia de niveles de dificultad de PAV de estructura multiplicativa en cada uno de los niveles de las dos editoriales analizadas (MC y Santillana).

6.4. Discusión Estudio 1

Las diferencias en la habilidad para resolver problemas entre los alumnos de primaria de Singapur y de España observadas en evaluaciones de rendimiento como TIMSS, parecen deberse fundamentalmente a determinadas variables sociales y políticas (Rao et al., 2010). También podrían deberse, en algún grado, a las diferencias en el diseño de los libros de texto que se utilizan en las clases de matemáticas de ambos países, por dos motivos principalmente. Primero, porque los libros son uno de los recursos más utilizados por los profesores en sus clases (Depaepe et al., 2009; Hiebert et al., 2003); y segundo, porque los alumnos aprenden mejor los contenidos y tareas que se presentan con mayor frecuencia en los libros (Heinze et al., 2009, Sievert et al., 2019, 2021; Törnroos, 2005). Puesto que, para aprender a resolver PAV a través del razonamiento, los alumnos necesitan enfrentarse a una variedad amplia de problemas (Siegler y Oppenzato, 2021), que incluyan diferentes estructuras semántico-matemáticas (Carpenter y Moser, 1984; Greer, 1992; Heller y Greeno, 1978; Vergnaud, 1991) y niveles de dificultad (Carpenter et al., 1981; Verschaffel et al., 2000), cabría pensar que los libros de los países como Singapur incluyen problemas de mayor dificultad que otros países, como España. Además, puesto que tanto el currículo de matemáticas de Singapur como el de España están estructurados en espiral, cabría esperar que la proporción de problemas difíciles fuera mayor en los cursos superiores en los libros de ambos países. Por este motivo, se ha comparado el nivel de dificultad semántico-matemática de los problemas incluidos en los libros más utilizados en las clases de Singapur y España, ya que la estructura semántico-matemática es uno de los aspectos que más influye en el nivel de dificultad de un PAV. Además, se ha analizado la evolución del nivel de dificultad de las estructuras semántico-matemáticas a lo largo de los diferentes niveles escolares.

Los resultados del estudio permiten concluir que, si bien los PAV incluidos en los libros de Singapur contenían más estructuras semántico-matemáticas de dificultad media y alta que los libros españoles, la evolución de los niveles de dificultad en los libros de Singapur a lo largo de los cursos no se corresponde con el diseño que cabría esperar de un currículo en espiral. Es decir, si comparamos la proporción de estructuras incluidas en los libros de Singapur y de España, los primeros incluyen significativamente más estructuras de nivel de dificultad medio o alto que los segundos, tanto aditivas como multiplicativas, y en todos los niveles educativos analizados, con dos excepciones: primero, en las estructuras multiplicativas en el nivel 1 (1.º y 2.º de primaria), donde los libros españoles incluyeron

más estructuras de dificultad media; y segundo, en los problemas de dificultad alta en el nivel 3 (5.º y 6.º de primaria), ya que no se encontraron diferencias entre editoriales en las estructuras aditivas y los libros españoles incluyeron más problemas difíciles de estructura multiplicativa que los singapurenses. La primera de estas excepciones se debe al modo en el que los libros españoles introducen, en 2.º de primaria, los conceptos de doble, triple y mitad a través de la resolución de PAV de estructura multiplicativa comparativa, de dificultad media, y que no se encontraron en los libros de Singapur. La segunda excepción, que afectaba a las estructuras aditivas y multiplicativas difíciles en Singapur en el nivel 3, se debió en parte a que, en los libros españoles, las estructuras de dificultad alta (especialmente las aditivas) se incrementan a lo largo de los niveles escolares; pero sobre todo, se debió a que la proporción de estructuras difíciles en los libros de Singapur disminuye notablemente del nivel 2 al 3, tanto en las estructuras aditivas como (especialmente) en las multiplicativas. Este resultado es llamativo si tenemos en cuenta que los libros de Singapur analizados correspondían al currículo estándar, de modo que cabría esperar que los libros ofrecieran problemas con estructuras semántico-matemáticas de mayor dificultad en los cursos superiores. Siendo esto así, una de las posibles explicaciones del descenso de los problemas de dificultad alta en 5.º y 6.º de primaria en los libros de Singapur –descenso que no se observa en los libros españoles–, es que los libros de Singapur incluyan en esos cursos otros tipos de problemas verbales que, aun estando relacionados de algún modo con los PAV, no hayan podido categorizarse como tales y, por lo tanto, hayan quedado fuera de la muestra de nuestro primer estudio. Explorar esa posibilidad constituye el objetivo de nuestro segundo estudio.

7. Estudio 2

El objetivo del estudio 2 es comprobar, mediante un análisis cuantitativo de documentos (López, 2002), si en relación con las estructuras difíciles de los PAV, la ausencia de diferencias entre los libros de MC y Santillana de los niveles escolares superiores se debe a que, en los libros de Singapur de esos niveles (pero no en los españoles), se incluyen problemas verbales diferentes a los PAV, de un nivel de dificultad alto. Para ello, es necesario revisar el modo en el que se organizan los contenidos en los currículos de Singapur y España. En este sentido, conviene recordar que, en última instancia, los libros no son sino una concreción de ese currículo.

En los cursos superiores del currículo estándar de Singapur, en el bloque de contenidos “números y álgebra” se incluyen dos contenidos que no aparecen en el currículo español: ratio y álgebra. El currículo de Singapur define el contenido “ratio” como la notación, representación e interpretación de las relaciones proporcionales entre dos o más cantidades en términos $a:b:c$, en los que a , b y c pueden ser números enteros o fracciones, por ejemplo: “Roy cortó un rollo de cinta en tres trozos, X, Y y Z, con una ratio de 4:2:1. La longitud del trozo más largo es de 28 m. Encuentra la longitud total de los tres trozos” (MC, libro 5A, p. 175). La estructura semántico-matemática de estos problemas no puede enmarcarse en ninguna de las categorías de PAV multiplicativos descritos en la Figura 2; de hecho, estos problemas tienen sus propias estructuras semántico-matemáticas (Musa y Malone, 2012). Además, a pesar de que las relaciones entre las cantidades de una situación de ratio son de naturaleza multiplicativa, el currículo de Singapur diferencia los problemas de “ratio” de los problemas de “razón y velocidad” (aquellos que adoptan la forma $U \times R = T$; siendo U = número de unidades, R = razón, y T = total, correspondiente a los problemas multiplicativos de razón descritos en la Figura 2). Finalmente, cabe señalar que en el currículo de Singapur se propone como objetivo resolver problemas de hasta 2 operaciones que impliquen ratios, utilizando modelos gráficos parte-todo y de comparación.

En relación con el álgebra, este contenido también tiene su propio sub-apartado en el bloque de “números y álgebra” del currículo de Singapur, concretamente en 6.º de primaria. Uno de los objetivos de aprendizaje que se plantea en ese sub-apartado es que los alumnos sean capaces de generar y resolver

ecuaciones lineales en problemas verbales y establecer vínculos explícitos con sus correspondientes modelos gráficos. La presencia de este sub-apartado en el bloque de contenidos en el que, hasta 5.º, se han venido trabajando contenidos aritméticos, puede ser de especial relevancia para comprender el éxito de Singapur en el desarrollo de la competencia matemática de los alumnos. Esto podría ser así porque, para aprender a resolver problemas de álgebra, el alumno debe sincronizar dos esquemas cognitivos diferentes: el aritmético y el algebraico (Linchevski y Livneh, 1999). El esquema aritmético se define como el conocimiento que se centra en procedimientos y relaciones entre cantidades conocidas, mientras que el esquema algebraico se define como el conocimiento que permite al alumno conceptualizar conjuntos de cantidades, tanto conocidas como desconocidas, sobre las que puedan aplicarse diferentes operaciones y estrategias (Moseley y Brenner, 2009). En el esquema algebraico, la cantidad desconocida aparece como una variable que puede representarse conceptualmente, pero cuyo valor numérico no es conocido inicialmente. El tránsito de los problemas aritméticos a los problemas de álgebra suele ser una fuente de dificultades persistentes para muchos alumnos, puesto que en los problemas de álgebra, las representaciones de las relaciones entre las cantidades son más simbólicas. De hecho, diferentes estudios han mostrado que a los alumnos les resulta muy complicado adaptar sus conocimientos previos a situaciones nuevas en las que tengan que trabajar con variables y ecuaciones algebraicas, incluso para aquellos alumnos que han trabajado durante años con representaciones aritméticas y conceptos concretos (Knuth 2000).

En resumen, los PAV analizados en nuestro estudio 1 son una parte importante de los problemas verbales incluidos en los libros de texto, pero no son los únicos. Los problemas verbales de ratio y de álgebra pueden considerarse problemas que, basándose en los procedimientos aritméticos previamente aprendidos por los alumnos al resolver PAV, son más difíciles que los PAV. Siendo esto así, y para comprobar si el descenso de la proporción de estructuras semántico-matemáticas difíciles en los PAV de los libros de Singapur en 5.º y 6.º se compensa con una mayor presencia de problemas más difíciles, de ratio y álgebra, en el estudio 2 se analizará la presencia de problemas verbales de ratio y álgebra en los mismos libros analizados en el estudio 1.

7.1. Procedimiento

7.1.1. Categorías de análisis. Tipos de problemas verbales

Se consideraron tres tipos de problemas verbales. En primer lugar, se incluyeron los mismos PAV que en el Estudio 1. En segundo lugar, se consideraron problemas de ratio todos aquellos en los que, o bien la relación entre las cantidades implicadas en los problemas estaban expresadas en términos de ratio, como en el ejemplo de Roy y los trozos de cinta (expuesto unas líneas más arriba), o bien pedían que se calculara la ratio existente entre las cantidades del problema, como el siguiente: “En un día de lluvia, el señor Chew vendió 56 productos entre paraguas y chubasqueros. Ese día vendió 24 chubasqueros. Halla la ratio del número de paraguas vendidos respecto al número de chubasqueros vendido” (MC, libro 5A, p. 163). Finalmente, se consideraron problemas de álgebra aquellos problemas verbales cuya resolución requiriera el manejo de cantidades desconocidas. En este sentido, nuestro interés era analizar el carácter algebraico del problema, y no tanto si se pedía a los alumnos una solución algebraica o aritmética (ver Khng y Lee, 2009). De este modo, se consideraron dos tipos de problemas de álgebra. El primer tipo eran aquellos problemas en los que se pedía una respuesta numérica y podían resolverse de manera algebraica, pero también de manera aritmética (p.ej. haciendo listados, estimando y comprobando, resolviendo hacia atrás, agrupando o representando con modelos de barras, ver Fong et al., 2006). Un ejemplo de este tipo de problema de álgebra es el siguiente: “Leire, Ignacio y Fernando son hermanos. Leire es la menor de los tres, Ignacio tiene 4 años más que Leire y Fernando tiene 3 años más que Ignacio. La suma de las edades de los tres es 32 años. ¿Cuántos años tiene cada uno? (Santillana, 6.º, p. 90). El segundo tipo de problemas considerados fueron aquellos que incluían incógnitas en su

enunciado, independientemente de si pedían encontrar un valor numérico concreto o no, por ejemplo: “Después de comprar 3 latas de bebida, Jerry le dio al cajero 50\$. Si recibió n \$ como cambio, ¿cuánto le costó cada bebida? Da tu respuesta en términos de n ” (MC, libro 6A, p. 27).

7.1.2. Codificación y análisis de datos

Se reanalizaron de nuevo todas las tareas contenidas en los libros de MC y Santillana correspondientes a los 6 cursos de primaria, categorizando los problemas verbales como PAV, de ratio o de álgebra, de acuerdo con los criterios expuestos más arriba. Aquellos problemas algebraicos que estaban expresados en forma de ratio (un total de 28) recibieron una doble codificación, de modo que el recuento final de problemas categorizados es ligeramente superior al de problemas verbales analizados. Un ejemplo de este tipo de problemas es el siguiente: “Raja gastó 5 veces más dinero que Hamid. Raja gastó 13448\$ más que Hamid. ¿Cuál es la ratio entre la cantidad de dinero que gastó Raja respecto a la cantidad que gastó Hamid y respecto al total de dinero que gastaron?” (MC, libro 6A, p. 111).

Para el análisis de los datos se siguió el mismo procedimiento que en el estudio 1 para determinar la fiabilidad de la categorización y se utilizaron los mismos estadísticos: Chi cuadrado para comparar las diferencias globales entre las editoriales o entre los niveles escolares de una misma editorial, o el estadístico exacto de Fisher, en caso necesario. El efecto de las diferencias se analizó con el estadístico V de Cramer (efecto pequeño .1; mediano .3 y grande .5). Para comparar las diferencias concretas, se realizaron pruebas de z con un nivel de significación de .05.

7.2. Hipótesis

Teniendo en cuenta que en el currículo de Singapur (pero no en el español en 2010) se planteaba como objetivo que los alumnos aprendan a resolver problemas verbales más difíciles que los PAV, -de “ratio” a partir de 5.º curso y del “álgebra” a partir de 6.º curso-, cabe formular tres hipótesis. En primer lugar, se espera que los libros de Singapur contengan problemas de ratio y álgebra (hipótesis 3a). En segundo lugar, cabe esperar que, de acuerdo con el diseño del currículo de Singapur, estos problemas aparezcan en el nivel 3 (hipótesis 3a1). En tercer lugar, se espera que los libros españoles no contengan problemas de ratio ni de álgebra (hipótesis 3b). Finalmente, en el caso de encontrarse algún problema de estos tipos en los libros de Santillana, cabría esperar que se concentraran en el nivel 3 (hipótesis 3b1)

7.3. Resultados

7.3.1. Resultados globales

Tal y como puede observarse en la Tabla 3, en los libros de Singapur tanto los problemas de álgebra como los de ratio representaban en torno al 10% del total en cada caso, mientras que la práctica totalidad de los problemas analizados en Santillana fueron PAV. Se encontraron diferencias significativas en la distribución de los problemas entre las dos editoriales ($n = 5279$, $p > .001$), siendo mediano el efecto de esas diferencias (.30). Los libros de Santillana contenían más PAV que los de MC, los cuales, a su vez, contenían más problemas de álgebra y ratio, confirmándose así la hipótesis 3a. Por otra parte, los libros de Santillana incluyeron una proporción testimonial de problemas de álgebra, confirmando parcialmente la hipótesis 3b.

Tipos	MC		Santillana	
	N	%	N	%
Aritméticos	2350	80	2330	99.4
Álgebra	287	9.8	13	0.6
Ratio	299	10.2	0	0
TOTAL	2936		2443	

Tabla 3. Frecuencia de PV aritméticos, de álgebra y ratio por editorial.

7.3.2. Resultados por nivel educativo

Diferencias inter-editorial

Como se observa en la Figura 5, se encontraron diferencias en la proporción de los diferentes tipos de problemas verbales entre los libros de MC y Santillana en los niveles 2 y 3 ($n = 1635$, $p < .001$; $n = 2749$, $p < .001$), siendo el tamaño de los efectos pequeño (.21) y mediano (.41), respectivamente. En el nivel 2, los libros de MC contenían más problemas de álgebra y menos PAV que Santillana, mientras que en el nivel 3, en MC se encontraron más problemas de álgebra y ratio y menos PAV que en Santillana. Estos resultados confirman la hipótesis 3a1.

Diferencias intra-editorial

En relación con la distribución de los PAV y los problemas de ratio y álgebra a lo largo de los cursos, se encontraron diferencias significativas en la distribución de los diferentes tipos de problemas verbales a lo largo de los niveles escolares tanto en MC ($n = 2936$, $p < .001$), como en Santillana ($n = 2343$, $p < .02$), siendo pequeño el tamaño de los efectos en ambos casos (.27 y .07, respectivamente). En el caso de MC, en el nivel 2 ya se encuentran problemas de álgebra, si bien en un número significativamente menor respecto al nivel 3, donde se concentran la mayor parte de esos problemas y todos los problemas de ratio. En Santillana aparece un solo problema de álgebra en el nivel 2, y el resto en el nivel 3. Tomados en conjunto, estos resultados confirman la hipótesis 3a1, aunque con un pequeño matiz ya que, en los libros de MC, los problemas de álgebra se empiezan a presentar en el nivel 2, esto es, 3.º y 4.º de primaria. Por su parte, en los libros de Santillana, prácticamente todos los (escasos) problemas de álgebra incluidos se concentraron en el nivel 3, confirmándose la hipótesis 3b1.

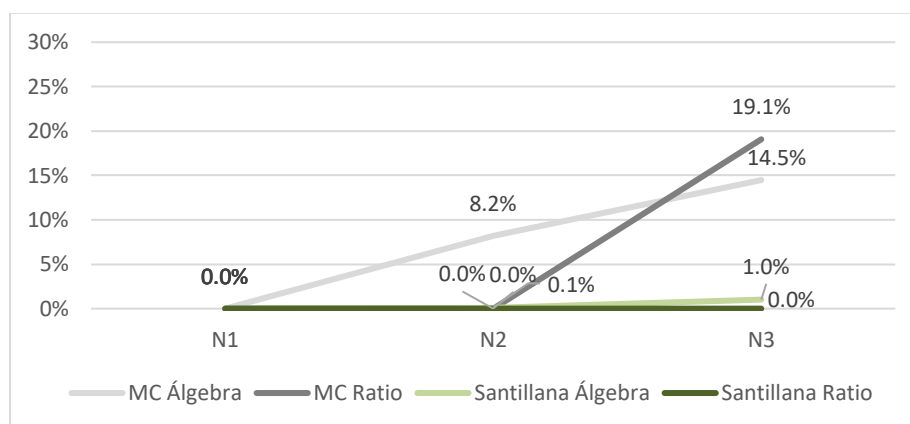


Figura 5. Frecuencia de PV de álgebra y ratio en cada uno de los niveles de las dos editoriales analizadas (MC y Santillana).

8. Discusión general

El objetivo del presente trabajo era comprobar si el diseño de los problemas verbales de los libros de texto de Singapur y España podría ayudar a comprender las diferencias de rendimiento de los alumnos de primaria de ambos países en evaluaciones internacionales como TIMSS. En este sentido, se buscaba comprobar si los libros de texto que más se han utilizado en Singapur contenían problemas verbales de un mayor nivel de dificultad que los libros que más se han utilizado en España, y si el modo en que se distribuían las estructuras más difíciles a lo largo de los niveles escolares estaba en consonancia con el diseño en espiral de los currículos de ambos países. Los resultados del primer estudio, centrado en el análisis de las estructuras semántico-matemáticas de los PAV, mostraron que los PAV de los libros de Singapur, en general, sí incluían más estructuras de dificultad media y alta que los españoles. Sin embargo, los resultados por nivel educativo mostraron que estos resultados generales se reproducían en los libros de 1.º a 4.º, pero no en los de 5.º y 6.º, cursos en los que las diferencias entre los libros de ambos países desaparecían. Así, en lo que respecta a los PAV, los libros de Singapur no parecían sustentar adecuadamente un currículo en espiral (los libros españoles parecen también mejorables en ese aspecto). Para comprobar si este descenso de PAV semántico-matemáticamente difíciles en los cursos superiores de los libros de Singapur se debía a la aparición de otros tipos de problemas verbales, en el estudio 2 se analizó la presencia, en los libros, de problemas verbales de ratio y álgebra. Ambos tipos de problemas verbales son diferentes a los PAV, ya que tienen sus propias estructuras semántico-matemáticas, requieren de razonamientos adicionales a los aritméticos, y los alumnos aprenden a resolverlos partiendo de los conocimientos aritméticos adquiridos, en buena medida, al resolver PAV.

Los resultados del segundo estudio, unidos a los del primero, permiten concluir que los libros de Singapur sí contienen problemas verbales más difíciles que los españoles, tanto en general, como en cada uno de los niveles. Además, el modo en el que se distribuyen esos problemas verbales más difíciles en los libros de Singapur se corresponde en mayor medida con el diseño en espiral del currículo que los libros españoles. Los PAV de los cursos inferiores de los libros de Singapur contenían más estructuras semántico-matemáticas de dificultad media y alta que los españoles; esos problemas pueden considerarse como una preparación para que los alumnos aprendan a resolver problemas de ratio y álgebra en los cursos superiores, cuya presencia en esos cursos compensa la bajada del nivel de dificultad de las estructuras semántico-matemáticas de los PAV.

Esta distribución de los problemas verbales difíciles en los libros de Singapur cobra aún más sentido si tenemos en cuenta que el *bar modelling* (es decir, el uso de representaciones esquemáticas de la estructura matemática de los problemas como ayuda al razonamiento), acompaña el proceso de aprendizaje de resolución de problemas de los niños de Singapur a lo largo de toda su escolaridad primaria (Kaur, 2015). De los resultados de nuestro estudio se desprende que los alumnos de aquel país comenzarían aprendiendo a utilizar el *bar modelling* para resolver muchos PAV de dificultad semántico-matemática baja en los cursos inferiores, para aplicarlo posteriormente en la resolución de PAV con estructuras de dificultad creciente a lo largo de los cursos, y problemas de ratio y álgebra en los cursos superiores. Los libros españoles, al no incluir problemas de ratio y álgebra en los cursos superiores, ni ayudas al razonamiento como las que proporciona el *bar modelling* (ver Vicente et al., 2020), están mucho más lejos de sustentar adecuadamente el aprendizaje de problemas verbales difíciles, asociados a los niveles más altos de competencia matemática tal y como se definen en TIMSS. Para ilustrar esta idea, volvamos al IL4 descrito en el marco teórico (cambiar 8 cromos de dibujos animados por cromos de deportes, a razón de 2 cromos de dibujos por cromo de animales, y de 3 cromos de animales por cada 2 de deportes). Este problema podría entenderse como una combinación de un problema de división por agrupamiento y uno de multiplicación razón múltiple, de niveles de dificultad semántico-matemática baja y media. Pero también puede entenderse como un problema de ratio, en el que la cantidad de cromos de dibujos animados, de animales y de deportes se relacionan en una ratio de 4 : 2 : 3. Esta ratio, que

puede extraerse del enunciado del problema, permite establecer las relaciones matemáticas entre las cantidades del problema, deducir que la ratio entre los cromos de dibujos y los de deportes es de $4 : 3$, y resolver el problema con una regla de tres ($8 : 4 = 2$; $2 \times 3 = 6$). Cabe recordar que la mitad de los alumnos de Singapur de 4.º resolvieron con éxito este ítem (incluso sin haber tenido aún contacto con la enseñanza formal de los problemas de ratio), mientras que solo uno de cada diez alumnos españoles lo resolvió con acierto. Quizá, el modo en el que los alumnos de Singapur aprenden a resolver PAV en los primeros cursos, y las ayudas que reciben para ello, les permita tanto resolver problemas de ratio y álgebra en los cursos superiores, como obtener buenas puntuaciones en TIMSS.

9. Implicaciones educativas

Desentrañar el diseño de los problemas verbales de los libros de Singapur permite resaltar algunos aspectos susceptibles de mejora de los libros españoles. Primero, parece necesario incrementar la proporción de problemas de dificultad semántico-matemática media y alta. Para ilustrar cómo puede llevarse a cabo este cambio, tomemos como ejemplo el siguiente problema de comparación multiplicativa y combinación 1: “Lourdes ha recibido en su quiosco un paquete de libros que pesa 14 kilos y un paquete de revistas que pesa el doble. ¿Cuánto pesan los dos paquetes juntos? (Santillana, 2º, p. 173). Este PAV puede transformarse en un problema de álgebra modificando los datos: “Un paquete de libros y otro de revistas pesan 42 kilos. Si el paquete de revistas pesa el doble que el de libros, ¿cuánto pesa cada uno?”. En segundo lugar, este incremento del nivel de dificultad de los problemas debería intensificarse en los cursos superiores, potenciando así el diseño en espiral del currículo de matemáticas español. Finalmente, probablemente fuera necesario acompañar los problemas más difíciles de modelos de resolución que, como los de Singapur, incluyan ayudas al razonamiento (Vicente et al., 2020) y representaciones gráficas que ayuden a los alumnos a enfrentarse a cualquier problema (Kaur, 2015).

Por último, conviene resaltar que los libros de texto son herramientas a disposición de los maestros, quienes podrían compensar –al menos en parte– las carencias de los libros de texto en los tres mismos aspectos que acabamos de señalar para el diseño de estos materiales: primero, modificando parte de los problemas propuestos por los libros para aumentar el nivel de dificultad de los problemas que resuelven con los alumnos; segundo, proporcionando ayudas al razonamiento de los alumnos (manipulativos, representaciones gráficas o planteando problemas próximos a su vida cotidiana); y tercero, incluyendo siempre un paso dedicado al razonamiento matemático en la secuencia de pasos de resolución de problemas en las actividades de aula que se dediquen a esa tarea.

10. Limitaciones y estudios futuros

El presente trabajo presenta una serie de limitaciones que invitan a tomar las conclusiones con cautela. En primer lugar, el análisis de los PAV realizado en este trabajo solo permite obtener una aproximación de los niveles de dificultad de esos problemas, ya que, al haberse analizado las estructuras semántico-matemáticas de los problemas de manera individual, no disponemos de una medida del nivel de dificultad global del problema (excepto en los problemas de una única estructura). Por otra parte, y como ya hemos señalado, la estructura semántico-matemática es solo una de las muchas variables que afectan al nivel de dificultad de los problemas. De este modo, serían necesarios análisis adicionales, tanto de la dificultad semántico-matemática global de los problemas de dos o más estructuras, como de otros aspectos de los problemas que influyen en su nivel de dificultad, así como las propiedades de los números del problema o las estrategias de resolución requeridas (Daroczy et al., 2015).

En segundo lugar, el análisis de los problemas de ratio y de álgebra también ha sido superficial, ya que no se ha profundizado en la descripción de la variedad y niveles de dificultad de esos problemas.



En este sentido, podría analizarse, por ejemplo, la categorización de estructuras semántico-matemáticas de los problemas de ratio según las clasificaciones propuestas por Musa y Malone (2012), y de los problemas de álgebra de acuerdo con las categorías propuestas por Mayer (1981).

En tercer lugar, si bien se han analizado las editoriales que se han usado con mayor frecuencia en las clases de Singapur y España, no son las únicas (especialmente en el caso de nuestro país), por lo que los resultados obtenidos pueden considerarse parciales y sería necesario ampliar la muestra de editoriales analizadas. Asimismo, sería recomendable replicar este estudio comparando los libros de otros países que también alcanzaron puntuaciones elevadas en TIMSS (p. ej. Corea, China o Japón) con los de países cuyos alumnos, como los españoles, muestran un rendimiento mejorable (p. ej. Chile o Francia).

Finalmente, sería necesario analizar otros tipos de problemas (p. ej. geometría, estadística) que no han sido analizados en nuestro estudio y que podrían matizar las conclusiones extraídas del mismo.

Bibliografía

- ANELE (2014). *La Edición de Libros de Texto en España. Octubre de 2014*. Asociación Nacional de Editores de Libros y material de Enseñanza. Recuperado de: <https://anele@anele.org>
- Ake, L. y Godino, J. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación Matemática*, 30(2), 171-201.
- Apple, M. (1992). The text and cultural politics. *Educational Researcher*, 21(7), 4-11. <https://doi.org/10.3102/0013189X021007004>
- Carpenter, T. P., Hiebert, J., & Moser, J. M. (1981). Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education* 12(1), 27–39. <https://doi.org/10.2307/748656>
- Carpenter, T.P. & Moser, J.M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *The acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 7–44). Academic Press.
- Chapin, S. H., & Johnson, A. (2000). *Math matters: Understanding the math you teach. Grades K-6*. Math Solutions Publications.
- Clark, A. (2013). *Singapore math: A visual approach to word problems*. Houghton Mifflin Harcourt.
- Cummins, D. D., Kintsch, W., Reusser, K., & Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive psychology*, 20(4), 405-438
- Daroczy G., Wolska M., Meurers W.D. & Nuerk H.C (2015). Word problems: a review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty. *Frontiers in Psychology*, 6, 348, 1-13. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.00348>
- Depaepe, F., De Corte, E. & Verschaffel, L. (2009). Analysis of the realistic nature of word problems in upper elementary mathematics education in Flanders. En L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren y S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situation* (pp. 245-263). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087909383_016
- Fagginger Auer, M., Hickendorff, M., van Putten, C. Beguin, A. & Heiser, W. (2016). Multilevel latent class analysis for large-scale educational assessment data. Exploring the relation between the curriculum and students' mathematical strategies. *Applied Measurement in Education*, 29(2), 144–159. <https://doi.org/10.1080/08957347.2016.1138959>
- Fong, N. S., Lee, K., Yin, A. S., & Khng, F. (2006). Model Method: Obstacle or bridge to learning symbolic algebra. En W. Bokhorst-Heng, M. Osborne y K. Lee (Eds.), *Redesigning Pedagogy* (pp. 225-242). Brill Sense.

- Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. En W. Bokhorst-Heng, M. Osborn D.A. Grouws, (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276–295). Macmillan.
- Hegarty, M., Mayer, R.E., & Monk, C.A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: a comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology*, 87(1), 18–32. <http://dx.doi.org/10.1037/0022-0663.87.1.18>
- Heinze, A., Marschick, F., & Lipowsky, F. (2009). Addition and subtraction of three-digit numbers. Adaptive strategy use and the influence of instruction in German third grade. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 41(5), 591–604. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-009-0205-5>
- Heller, J. & Greeno, J. (1978). *Semantic processing in arithmetic word problem solving*. Comunicación presentada en la Midwestern Psychological Association Convention, Chicago.
- Hernández, J., Zamora, R. y Lupiáñez, J. L. (2020). Estudio comparativo de los significados y expectativas de aprendizaje del límite en tres libros y el currículo oficial. *PNA*, 14(4), 241-269.
- Hiebert, J., Gallimore, R., Givvin, K.B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Chui, A.M. et al., (2003). *Teaching mathematics in seven countries. Results from the TIMSS 1999 Video Study*. Washington D.C.: National Center for Education Statistics (NCES). <https://doi.org/10.1037/e610352011-003>
- Kaur, B. (2015). The model method: A tool for representing and visualizing relationships. En X. Sun, B. Kaur y J. Novotna (Eds.), *Conference proceedings of ICMI Study 23: Primary mathematics study on whole numbers* (pp. 448-455). Recuperado de: http://www.umac.mo/fed/ICMI23/doc/Proceedings_ICMI_STUDY_23_final.pdf.
- Kelly, D.L., Centurino, V.A.S., Martin, M.O., & Mullis, I.V.S. (Eds.) (2020). *TIMSS 2019 Encyclopedia: Education Policy and Curriculum in Mathematics and Science*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College. Recuperado de: <https://timssandpirls.bc.edu/timss2019/encyclopedia/>
- Khng, K. H., & Lee, K. (2009). Inhibiting interference from prior knowledge: Arithmetic intrusions in algebra word problem solving. *Learning and Individual Differences*, 19(2), 262-268. <http://dx.doi.org/10.1016/j.lindif.2009.01.004>
- Knuth, E. (2000). Student understanding of the Cartesian connection: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 500–507. <http://dx.doi.org/10.2307/749655>
- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, 106, de 4 de mayo de 2006. <https://www.boe.es/eli/es/lo/2006/05/03/2/con>.
- Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, 340, de 30 de diciembre de 2020. <https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3>
- Linchevski, L., & Livneh, L. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 173–196.
- Lindquist, M., Philpot, R., Mullis, I. & Cotter, K.E. (2017). TIMSS 2019 Mathematics Framework. En I.V.S. Mullis y M.O. Martin (Eds.), *TIMSS 2019 Assessment Frameworks*. Recuperado de: <http://timssandpirls.bc.edu/timss2019/frameworks/>
- López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *Revista de educación*, 4, 167-179.
- López, E., Guerrero, A., Carrillo, J. y Contreras, L. (2015). La resolución de problemas en los libros de texto: un instrumento para su análisis. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8(1), 73-93.
- Mayer, R. E. (1981). Frequency norms and structural analysis of algebra story problems into families, categories, and templates. *Instructional science*, 10(2), 135-175. <http://dx.doi.org/10.1007/BF00132515>
- Mayer, R., Sims, V. & Tajika, H. (1995). A comparison of how textbooks teach mathematical problem solving in Japan and the United States. *American Educational Research Journal*, 32, 443–460.



- Moseley, B., & Brenner, M. E. (2009). A comparison of curricular effects on the integration of arithmetic and algebraic schemata in pre-algebra students. *Instructional Science*, 37(1), 1-20. <http://dx.doi.org/10.1007/s11251-008-9057-6>
- Mosquera, J. (2018). Estudio comparativo de Textos Escolares Oficiales de Matemáticas de Ecuador y Venezuela: los Sistemas de Ecuaciones Lineales. *Revista Iberoamericana de educación matemática*, 14(52), 91-117.
- Mullis, I., Martin, M., Foy, P., Kelly, D. & Fishbein, B. (2020). *TIMSS 2019 International Results in Mathematics and Science*. TIMSS and PIRLS International Study Center, Boston College. Recuperado de: <https://timssandpirls.bc.edu/timss2019/international-results/>
- Murphy, K.R. & Myers, B. (1998). *Statistical power analysis—A simple and general model for traditional and modern hypothesis tests*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Musa, N. & Malone, J. (2012). Problem Categorisation in Ratio. A Closer Look. En J. Dindyal, L. P. Cheng & S. F. Ng (Eds.), *Mathematics education: Expanding horizons, Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. MERGA.
- Oates, T. (2014). *Why textbooks count*. Cambridge assessments. Recuperado de: <https://www.cambridgeassessment.org.uk/Images/181744-why-textbooks-count-tim-oates.pdf>
- Orrantia, J., González, L.B., & Vicente, S. (2005). Un análisis de los problemas aritméticos en los libros de texto de Educación Primaria. *Infancia y Aprendizaje*, 28(4), 429-451. <http://dx.doi.org/10.1174/021037005774518929>
- Rao, N., Ng, S. S. N., & Pearson, E. (2010). Preschool pedagogy: A fusion of traditional Chinese beliefs and contemporary notions of appropriate practice. En C. Chan, & N. Rao (Eds.), *Revisiting the Chinese learner. CERC studies in comparative education* (pp. 255-279). Comparative Education Research Centre, The University of Hong Kong & Springer.
- Rathmell, E.C. (1986). Helping children learn to solve story problems. En A. Zollman, W. Speer y J. Meyer (Eds.), *The fifth Mathematics Methods Conference Papers*, (101-109). Bowling Green State University.
- Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. *Boletín Oficial del Estado*, 293, de 08 de diciembre de 2006. <https://www.boe.es/eli/es/rd/2006/12/07/1513/con>
- Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, 52, de 02 de marzo de 2022. <https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2022-3296>
- Riley, M. & Greeno, J. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities of solving problems. *Cognition and Instruction*, 5, 49-101. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0501_2
- Riley, N., Greeno, J. & Heller, J. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. En H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). Academic Press.
- Rodríguez-Nieto, C.A., Navarro, C., Castro-Inostroza, A.N. y García-González, M.S. (2019). Estructuras semánticas de problemas aditivos de enunciado verbal en libros de texto mexicanos. *Educación Matemática*, 31(2), 75- 104. <http://dx.doi.org/10.24844/EM3102.04>
- Schmidt, W., McKnight, C., Houang, R., Wang, H., Wiley, D., Cogan, L. & Wolfe, R. (2001). *Why schools matter: A cross-national comparison of curriculum and learning*. Jossey-Bass.
- Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 165-197). MacMillan.
- Siegler, R. & Oppenzato, C. (2021). Missing input: how imbalanced distributions of textbook problems affect mathematics learning. *Child Development Perspectives* 15(2), 76-82. <https://doi.org/10.1111/cdep.12402>

- Sievert, H., van den Ham, A.K. & Heinze, A. (2021). Are first graders' arithmetic skills related to the quality of mathematics textbooks? A study on students' use of arithmetic principles. *Learning and Instruction*, 71(101401), 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2020.101401>.
- Sievert, H., van den Ham, A. K., Niedermeyer, I. & Heinze, A. (2019). Effects of mathematics textbooks on the development of primary school children's adaptive expertise in arithmetic. *Learning and Individual Differences*, 74(101716), 1–13. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2019.02.006>
- Stigler, J., Fuson, K., Ham, M. & Kim, M. (1986). An analysis of addition and subtraction word problems in American and Soviet elementary mathematics textbooks. *Cognition and Instruction*, 3, 153–171. http://dx.doi.org/10.1207/s1532690xci0303_1
- Tárraga, R., Tarín, J. & Lacruz, I. (2021). Analysis of Word Problems in Primary Education Mathematics Textbooks in Spain. *Mathematics*, 9, 2123. <https://doi.org/10.3390/math9172123>
- Törnroos, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in Educational Evaluation*, 31(4), 315–327. <http://dx.doi.org/10.1016/j.stueduc.2005.11.005>
- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. Trillas.
- Verschaffel, L., Depaepe, F., y Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 908–911). Springer.
- Verschaffel, L., Greer, B. y De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Swets y Zeitlinger Publishers. <https://doi.org/10.1023/A:1004190927303>
- Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 557-628). Information Age Publishing Inc.
- Vicente, S. y Manchado, E. (2017). Dominios de contenido y autenticidad: un análisis de los problemas aritméticos verbales incluidos en los libros de texto españoles. *PNA*, 11(4), 253-279. <http://dx.doi.org/10.30827/pna.v11i4.6242>
- Vicente, S., Manchado, E. & Verschaffel, L. (2018). Resolución de problemas aritméticos verbales. Un análisis de los libros de texto españoles. *Cultura y Educación*, 30, 71-104, <https://doi.org/10.1080/11356405.2017.1421606>
- Vicente, S., Sánchez, R. & Verschaffel, L. (2020). Word problem solving approaches in mathematics textbooks: a comparison between Singapore and Spain. *European Journal of Psychology of Education*, 35, 567–587. <https://doi.org/10.1007/s10212-019-00447-3>.
- Vicente, S., Verschaffel, L., & Múñez, D. (2021). Comparison of the level of authenticity of arithmetic word problems in Spanish and Singaporean textbooks. *Culture and Education*, 33(1), 106-133. <https://doi.org/10.1080/11356405.2020.1859738>
- Xin, Y.P. (2007). Word problem solving tasks in textbooks and their relation to student performance. *The Journal of Educational Research*, 6, 347–359. <https://doi.org/10.3200/JOER.100.6.347-360>
- Yin, L., y Foy, P. (2021). TIMSS 2023 Assessment design. En I. Mullis, M. Martin y M. von Davier, (2021), *TIMSS 2023 assessment frameworks*. TIMSS and PIRLS International Study Center, Boston College. Recuperado de:
https://timssandpirls.bc.edu/timss2023/frameworks/pdf/T23_Frameworks.pdf

Santiago Vicente Martín. Universidad de Salamanca. Facultad de Educación. Es maestro, psicopedagogo y profesor titular en el Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación de la Universidad de Salamanca. Centra su investigación en la resolución de problemas y el análisis de libros de texto.
Email: sanvicente@usal.es

Lieven Verschaffel. Katholieke Universiteit Leuven. Facultad de Psicología y Pedagogía. Es doctor en Ciencias de la Educación y Catedrático de Universidad en el Departamento de Psicología y Ciencias de la Educación de la Universidad Católica de Leuven. Centra su investigación en la resolución de problemas, la educación matemática y el aprendizaje y la instrucción. Email: lieven.verschaffel@kuleuven.be



Rosario Sánchez Fernández. Universidad de Salamanca. Facultad de Educación. Es maestra de pedagogía terapéutica y profesora Ayudante doctor, en el Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación de la Universidad de Salamanca. Orienta su investigación hacia el estudio de los precursores del éxito académico en matemáticas y en el análisis de libros de texto. Email: mariarosario@usal.es