NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 110, marzo de 2022, páginas 41-60

Una propuesta didáctica apoyada por GeoGebra para la enseñanza del Principio de Cavalieri

Renata Teófilo de Sousa
Francisco Régis Vieira Alves
Italândia Ferreira de Azevedo
(Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará. Brasil)

Fecha de recepción: 05 de junio de 2021
Fecha de aceptación: 02 de diciembre de 2021

Resumen El objetivo de este trabajo es presentar el desarrollo de una propuesta didáctica orientada a la enseñanza del Principio Cavalieri con el aporte de GeoGebra, guiada por la Teoría de Situaciones Didácticas y las Categorías del Razonamiento Intuitivo. Dadas las dificultades de los estudiantes en Geometría Espacial, buscamos apoyarlos en el desarrollo de su razonamiento geométrico a través de la visualización, percepción e intuición. La metodología adoptada fue la investigación cualitativa exploratoria. La aplicación se realizó de forma remota, debido al escenario de la pandemia COVID-19, con estudiantes de 2° año de secundaria en una escuela pública brasileña.

Palabras clave Teoría de Situaciones Didácticas; Razonamiento intuitivo; Geometría espacial; GeoGebra.

Title **A didactic proposal supported by GeoGebra for the teaching of the Cavalieri Principle**

Abstract The objective of this work is to present the development of a didactic proposal oriented to the teaching of the Cavalieri Principle with the contribution of GeoGebra, guided by the Theory of Didactic Situations and the Categories of Intuitive Reasoning. Given the difficulties of students in Spatial Geometry, we seek to support them in the development of their geometric reasoning through visualization, perception and intuition. The adopted methodology was the exploratory qualitative investigation. The application was carried out remotely, due to the scenario of the COVID-19 pandemic, with 2nd year high school students in a public school in Brazil.

Keywords Theory of Didactic Situations; Intuitive reasoning; Spatial geometry; 3D GeoGebra.

1. Introducción

La Geometría forma parte del componente curricular del Bachillerato, siendo un requisito para la evolución cognitiva de los estudiantes en esta etapa escolar. Según la Base Curricular Común Nacional (BNCC), creado por el Ministerio de Educación del Brasil, las habilidades necesarias para una comprensión global de la Geometría se refieren a la interpretación, construcción de modelos, resolución y formulación de problemas matemáticos que involucran nociones, conceptos y procedimientos espaciales (Ministerio de Educación del Brasil, 2018). La geometría está presente en muchos objetos cotidianos, pero incluso siendo visualizada de una manera concreta todavía, sigue siendo un ámbito en el que los estudiantes de secundaria enfrentan dificultades de comprensión, y así lo señalan autores como Alves y Neto (2011, 2012), Oliveira y Leivas (2017), Cunha y Aguiar (2019) y Gutiérrez (2020).

En cuanto al objeto matemático en estudio - el Principio de Cavalieri - existe un problema en el proceso de enseñanza y aprendizaje, en este aprendizaje, se há evidenciado que el estudiante, lo explora de manera mecanizada no explorando la visualización y percepción necesarias para su comprensión, en algunas ocasiones debido a falta de profundización por parte del docente. Según Paterlini (2010), el Principio de Cavalieri se presenta comúnmente sin demostración, como una forma de evitar los obstáculos a la evidencia temprana de esta teoría. Las dificultades se concentran en una sola afirmación, que es admitida como plausible a través de un buen argumento y explicación por parte del profesor.

Partiendo de esta premisa y teniendo en cuenta la importancia que tiene el Principio de Cavalieri para la comprensión de la Geometría por parte del alumno en el cálculo de volúmenes de sólidos geométricos, nos preguntamos: ¿Cómo puede el estudiante desarrollar competencias geométricas sobre volúmenes utilizando el Principio de Cavalieri, desde una perspectiva de visualización y razonamiento intuitivo? Para ello, se aprovechó el aporte de GeoGebra, ya que es un software de fácil acceso y uso, siendo eficiente para la enseñanza de la Geometría, entre otras áreas (Silva y Abar, 2016; Alves, 2019; Abar, 2020).

GeoGebra es un recurso que ayuda al docente a explicar contenidos que necesitan visualización práctica, siendo eficiente en la presentación de situaciones difíciles de asimilar, donde el entorno virtual permite la visualización y manipulación de sus elementos y construcciones, posibilitando la construcción del razonamiento geométrico y consecuente aprendizaje del estudiante. Mariotti y Fischbein (1997, p. 221) plantean que “las definiciones de figuras geométricas básicas no son meras convenciones en el campo de los hechos puramente arbitrarios; la geometría elemental y los conceptos geométricos están profundamente arraigados en la experiencia común”. Así, el software tiene el potencial de estimular la intuición y el razonamiento geométrico del estudiante, permitiendo la deducción y la interacción a través de la experimentación del contenido. Además, según Breda, Trocado y Santos (2013) con características 3D, GeoGebra hace más accesible la representación de elementos en el espacio, colaborando para la comprensión a través de la visualización.

El objetivo de este trabajo es presentar el desarrollo de una propuesta didáctica orientada a la enseñanza del Principio Cavalieri con el aporte de GeoGebra 3D, guiada por la Teoría de Situaciones Didácticas y las Categorías del Razonamiento Intuitivo. Así, este trabajo usa la Teoría de Situaciones Didácticas como pauta para la aplicación de la práctica docente, que busca enfatizar el rol del estudiante en la construcción de su propio conocimiento, y la Teoría de Categorías del Razonamiento Intuitivo, para observar cómo ocurre la comprensión geométrica del principio de Cavalieri por parte del estudiante.

La metodología adoptada para este trabajo fue la investigación cualitativa, de tipo exploratorio, como una forma de entender la visualización, percepción e intuición de los estudiantes a partir de situaciones didácticas propuestas para el aprendizaje del Principio de Cavalieri. Esta propuesta didáctica se dirigió a un grupo de estudiantes de 16-17 años de secundaria, de una escuela vocacional pública de la ciudad de Fortaleza - Ceará, Brasil, que se desarrolló en dos encuentros virtuales.

En las siguientes secciones, hablaremos sobre aspectos históricos, epistemológicos y didácticos sobre el Principio de Cavalieri, la Teoría de Situaciones Didácticas y Categorías del Razonamiento Intuitivo asociadas a GeoGebra y su relevancia para este artículo, así como la metodología aplicada con sus respectivos resultados y consideraciones de los autores.

2. Aspectos históricos, epistemológicos y didácticos del principio de Cavalieri

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) fue un matemático y sacerdote italiano, quien realizó diversas contribuciones al desarrollo de las Matemáticas, en las áreas de Trigonometría, Astronomía, Geometría y Óptica, siendo considerado uno de los precursores del Cálculo Integral (Hoffmann, 2018). Sin embargo, el núcleo de este trabajo se centra en el objeto de estudio que lleva su nombre, el postulado conocido como "Principio de Cavalieri", comúnmente utilizado en problemas que involucran el cálculo del volumen de sólidos.

El enunciado del Principio de Cavalieri establece que "Dos sólidos, en los que cada plano de secado, paralelo a un plano dado, determina superficies de áreas iguales (superficies equivalentes), son sólidos de volúmenes iguales (sólidos equivalentes)" (Dolce y Pompeo, 2005, p. 165). Cabe mencionar que si bien la demostración del Principio de Cavalieri no es fácil de entender para los estudiantes de secundaria (Cunha y Aguiar, 2019), se debe considerar la presentación de ejemplos prácticos para ilustrarlo y probar su veracidad, la comprensión de formas geométricas y razonamiento intuitivo, basado en la visualización. Al respecto, el autor Gonzalo Zubieta B, en un artículo sobre los indivisibles de Cavalieri, trae el aprendizaje sobre el cálculo de volúmenes bajo una perspectiva viable para el aula, explicando que:

> La introducción es de importancia para el profesor, ya que con frecuencia está más preocupado por los criterios y reglas de la matemática, actual, que por el aprendizaje de sus estudiantes, debido en gran parte a la influencia del Formalismo, que en este nivel de enseñanza poco sentido tiene para el estudiante. Esto es, consideramos más transcendente el mostrar la vinculación de la matemática con el entorno que rodea el estudiante, que presentar una matemática sistematizada para que el estudiante la aprecie, cuando no tiene elementos para ello. (Zubieta B., 1997, p. 69).

Las geometrías planas y espaciales están directamente relacionadas, ya que los postulados de una sirven de base para comprender la naturaleza de la otra. A partir de esta relación, Alves y Neto (2011) señalan que el sujeto (alumno) se apoya en imágenes mentales, vividas en su cotidianidad a partir de objetos del mundo físico para comprender la Geometría. Por otro lado, cuando este sujeto se somete a algún entrenamiento formal, se espera que manifieste percepciones geométricas como linealidad, regularidad, profundidad de las figuras. En cuanto a la profundidad, esto merece ser destacado, pues, a pesar de exhibir un sesgo intuitivo, en general, en la enseñanza de la Geometría Espacial, las representaciones se despliegan en el plano, transmitiendo una ilusoria impresión de pertenencia a un espacio tridimensional.

Partiendo de una mirada epistemológica, se sabe que muchos estudiantes tienen dificultades para comprender problemas geométricos (Oliveira y Leivas, 2017; Cunha y Aguiar, 2019), debido a que no tienen una visualización y percepción bien desarrollada de las representaciones geométricas. Oliveira y Leivas (2017, p. 110) afirman que "La Geometría requiere la actividad de mirar con el entendimiento de que una imagen dibujada en un plano es la representación de un objeto tridimensional". Así, se advierte que existe un obstáculo a superar, en cuanto a la articulación entre las dimensiones bidimensional (2D) y tridimensional (3D), es decir, la articulación de la figura en el espacio y su representación.

Cunha y Aguiar (2019) mencionan que el exceso de pensamiento algebraico dentro de la Geometría termina creando barreras cognitivas para el alumno, pues en varias ocasiones dicho razonamiento puede desconectarse. Es importante tener en cuenta que la visualización geométrica es también un ejercicio que desarrolla el razonamiento del alumno, ayudándole a comprender las propiedades geométricas y a resolver problemas. También según los autores, el Principio de Cavalieri no está bien explorado en los libros de texto para el bachillerato, siendo insuficiente en varios aspectos, como la presentación de fórmulas prefabricadas, por ejemplo.

Didácticamente, al explorar el Principio de Cavalieri, los estudiantes podrían desarrollar una perspectiva diferente sobre el espacio y la forma. Al comprender la idea de Cavalieri geométricamente y al aceptar estos principios como intuitivamente evidentes, se pueden resolver muchos problemas de medición que normalmente requieren técnicas de cálculo más avanzadas (Cunha y Aguiar, 2019).

Así, Gutierrez (2020) señala que la dificultad de entender la Geometría es una de las razones para el uso de GeoGebra. La capacidad de ver la geometría de forma dinámica es una característica del software y puede ayudar en el desarrollo de habilidades geométricas en estudiantes de secundaria, para que mejoren en el aprendizaje de la geometría.

Reflexionando sobre tales aspectos, se decidió desarrollar una situación didáctica para trabajar el razonamiento geométrico del alumno a partir de la visualización e intuición sobre el Principio de Cavalieri, utilizando el dinamismo de GeoGebra. Para este desarrollo, los siguientes apartados exploran la Teoría de Situaciones Didácticas, que se utilizaran para organizar la situación didáctica, así como las categorías intuitivas de Efraim Fischbein (1987), para apoyar la comprensión del razonamiento geométrico del alumno desde el campo visual.

3. Teoría de Situaciones Didácticas

La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), de Guy Brousseau sugiere un formato para entender la relación entre el trinomio: alumno, docente y saber, teniendo en cuenta también el medio (*milieu*) en el que se produce la situación didáctica. Según Brousseau (2008) el alumno aprende adaptándose a un *milieu* que funciona como agente causante de dificultades, contradicciones y desequilibrios. En otras palabras, “el medio es el sistema antagónico del sistema enseñado o enseñado previamente” (Ingar, 2014, p. 69).

Brousseau (2008) perfila el trinomio mencionado como Triángulo Didáctico, donde cada uno de sus vértices representa las relaciones existentes entre alumno-profesor, profesor-saber y alumno-saber. Según Santos y Alves (2017, p. 6), “Las relaciones entre profesor-saber, alumno-saber y profesor-alumno se establecen en el triángulo, en función de sus vértices, que son asimétricos y conflictivos”, lo que nos permite inferir que TSD permite una reflexión sobre las relaciones entre docente, alumno y saber establecido, apuntando a un *milieu* expresamente formulado por el docente para instigar al alumno a buscar el conocimiento, a medida que se adapta a las situaciones propuestas. La autonomía del alumno se desarrolla en este sentido, a través de la toma de decisiones, la reflexión, la organización de ideas y estrategias en base a sus conocimientos previos. De esta forma, el alumno, al actuar, puede transformar la información que le brinda en conocimiento para sí mismo, convirtiéndose en el protagonista de su aprendizaje.

Brousseau (2008) señala que cada conocimiento está vinculado, a través de la interacción entre dos o más personas, a un tipo de situación y estas interacciones pueden ocurrir a través de un juego, problema / desafío o dispositivo con sus propias reglas de interacción, donde el desarrollo de la situación hace que el estudiante aprehenda el conocimiento. El autor define que “una 'situación' es un modelo de interacción entre un sujeto y un entorno determinado" (Brousseau, 2008, p. 20). Así, el término "situaciones didácticas" se refiere a modelos que describen la relación de actividades entre alumno, docente y *milieu*.

La situación didáctica, para funcionar eficazmente, debe salvaguardarse en lo que trae Brousseau como contrato didáctico. Brousseau (2008) define el contrato didáctico como un contrato verbal que determina el rol de los sujetos - docente y alumno -, lugares y funciones de todos los involucrados en la situación didáctica, en un sistema de obligaciones cuya reciprocidad es necesaria, y esta relación está mediada por el saber.

Según Brousseau (2008) la preparación de una situación didáctica requiere que el docente elija un problema que incite al alumno a pensar, provocando la interacción entre el alumno y el entorno. Así, existe lo que Brousseau llama una situación adidáctica, en la que el alumno establece una relación con el problema y, sin ninguna ayuda, lo resuelve en base a sus conocimientos previos. Cabe mencionar que las situaciones adidácticas se formulan para que coexistan con situaciones didácticas, caracterizando y obedeciendo a un proceso didáctico predeterminado por objetivos, métodos, recursos y conceptos. Las cuatro fases o dialécticas de una situación didáctica, sintetizadas según Brousseau (2008), son:

Situación de acción: inicialmente, es la toma de posición frente al problema propuesto, reflejando y simulando intentos de resolverlo, a través de la interacción con el *milieu*;

Situación de formulación: en esta fase se produce un intercambio de información entre los alumnos, junto con la verbalización de ideas y conjeturas, con el uso de un lenguaje más adecuado, sin embargo, sin la obligación de utilizar explícitamente el lenguaje matemático formal;

Situación de validación: el alumno presenta su estrategia de solución a la clase e intenta argumentar en base a su razonamiento, comprobando si lo que conjetura es, de hecho, válido, mediante un lenguaje matemático adecuado (demostraciones);

Situación de institucionalización: la figura del docente sintetiza todo lo expuesto en los pasos anteriores, de manera formal y con lenguaje matemático adecuado, orientado a establecer convenciones sociales y develar su intención con el problema propuesto, definiendo los objetos de estudio por a través de la formalización y generalización.

La situación didáctica es pensada por el profesor para que el alumno desarrolle el saber. Además de posibilitar la participación efectiva de los estudiantes en sus clases, les brinda la oportunidad de desarrollar su autonomía, construir conocimientos, formular estrategias y resolver problemas de manera creativa, posibilitando su evolución intelectual. Según Gutiérrez (2020, p. 172) "La formación del profesor debe empezar por la transformación del pensamiento docente espontáneo en un sentido análogo a la necesidad de transformar el pensamiento del estudiante, sus preconceptos y errores conceptuales, para posibilitar su aprendizaje". Por tanto, la situación didáctica se percibe como algo en lo que prima la dialéctica de la circunstancia y el contexto, y es fundamental que el docente haga el vínculo entre sus etapas y la Transposición Didáctica (Chevallard, 1985) como una forma de asegurar que se logren los objetivos planificados para la clase.

La TSD presenta momentos en los que prevalece la intuición y el razonamiento implícito, como la dialéctica de la acción y la formulación, por ejemplo. En un intento por apropiarse de los conocimientos, el alumno recurre a sus conocimientos previos, buscando construir modelos mentales que le ayuden a resolver el problema. Para una mejor comprensión de la situación didáctica propuesta en este trabajo, la siguiente sección ilustra brevemente el concepto de intuición, su relación con la Geometría y cómo GeoGebra puede ayudar al proceso de intuición, percepción y visualización geométrica de los estudiantes.

4. Categorías del Razonamiento Intuitivo y GeoGebra

Según Pais (1996), existen cuatro elementos fundamentales que influyen directamente en el aprendizaje de la Geometría Euclidiana, ya sea plana o espacial, que son el objeto, el concepto, el diseño y la imagen mental. Con respecto a estos cuatro elementos, es crucial agregar la semántica presente en el lenguaje geométrico dentro de los problemas. Por tanto, según el autor, dichos objetos y sus respectivas representaciones gráficas interfieren en el razonamiento procedimental y en la construcción del conocimiento geométrico del alumno.

Fischbein (1993) señala que los objetos geométricos tienen dos componentes esenciales, que son el concepto y la imagen, que conciben el aprendizaje de la Geometría de manera considerable. Además, la transición de la etapa de experimentación a la abstracción requiere un equilibrio entre dichos componentes, que a su vez puede ser proporcionado por el uso de software matemático, como es el caso de GeoGebra, presentado en este trabajo.

Alves y Neto (2011) también señalan desde la perspectiva de Fischbein que las figuras geométricas se constituyen en un ente mental, elaborado a partir de un razonamiento geométrico, en el que una figura es diferente tanto de su definición formal como de su definición mental y a su vez, es apoyado por una percepción sensorial de una representación particular proporcionada. Los autores también afirman que:

> [...] podemos concebir y comparar el camino de evolución del razonamiento de un alumno con el de un profesor. El primero, al conocer un tema por primera vez, aún no tiene la familiaridad suficientemente desarrollada para afrontar definiciones formales de este contenido. Por lo tanto, se basará principalmente en el razonamiento intuitivo. Durante la evolución y en el sucesivo avance de sus etapas mentales de aprendizaje, el alumno, gradualmente, generaliza, sistematiza y sintetiza las ideas fundamentales involucradas en esa materia. De esta forma, el sujeto pasa al razonamiento lógico y matemático. (Alves y Neto, 2011, p. 42).

En otras palabras, el razonamiento geométrico sobre un nuevo aprendizaje, parte inicialmente de sus ideas previas y de sus percepciones comienza a conjeturar sus ideas, formalizándolas en una línea de razonamiento que tenga sentido para él. Aún con respecto a la intuición, Fischbein y Gazit (1984) afirman que el término 'intuición' significa, “básicamente, una evaluación global, sintética, no explícitamente justificada o predicción. Un sujeto siente tal cognición global como evidente, coherente y duramente cuestionable” (Fischbein y Gazit, 1984, p. 2). Así, en lo que respecta a la Geometría, los teoremas existentes son enunciados que pueden demostrarse, en los que su veracidad (o no) está garantizada por una secuencia de inferencias lógicas, sustentadas en la estructura que inicia el modelo y en otros teoremas previamente demostrados.

Para Fischbein (1982) la intuición o el razonamiento intuitivo en Geometría puede ocurrir en la resolución de problemas, ya que el estudiante debe analizar, experimentar, evolucionar, abstraer y sistematizar, y luego construir su conocimiento matemático, donde las estructuras intuitivas son componentes esenciales de toda forma de comprensión activa y pensamiento productivo. En estos comportamientos o actitudes de los estudiantes se puede visualizar la dialéctica de la TSD - acción, formulación y validación - que configuran la situación adidáctica, haciendo un paralelo con lo que aporta Brousseau en su teoría.

En este sentido, Fischbein (1987) clasifica la intuición en categorías, considerando la relación entre intuición y solución, dividiéndose en intuiciones afirmativas, conjeturales y anticipatorias, descritas a continuación en la perspectiva de este autor.

Las intuiciones afirmativas se refieren a una representación, una explicación o una interpretación directamente aceptada por las personas como algo natural, evidente, intrínsecamente significativo, por ejemplo, si alguien le pregunta a un alumno qué es una línea recta, lo más probable es que intente trazar una línea recta o mostrará el ejemplo de una línea recta (Fischbein, 1987).

Con respecto a las intuiciones conjeturales, el aspecto de la solución es explícito, pero no está claramente involucrado en un esfuerzo de resolución. Representan declaraciones sobre eventos futuros o sobre el curso de un evento determinado. Esta categoría representa una visión global preliminar que precede a una solución analítica y completamente desarrollada a un problema (Fischbein, 1982). El autor ejemplifica en su obra *Intuition and Proof:*

> Parece intuitivamente claro que las diagonales en un rectángulo son las mismas, que el camino más corto entre un punto y una línea es la perpendicular trazada desde el punto a la línea, etc. Al mismo tiempo, estas afirmaciones pueden probarse, aunque no es necesaria ninguna prueba y, de hecho, parece bastante superflua. (Fischbein, 1982, p. 11).

Con respecto a las intuiciones anticipatorias, Fischbein (1982) señala que esta categoría de intuición proporciona una comprensión global de una posible forma de resolver un problema y, por lo tanto, influye y dirige los pasos de búsqueda y construcción de la solución. En este caso, el alumno se encuentra "en la fase de aplicación concreta de estrategias, uso de fórmulas, elaboración de dibujos que ayuden efectivamente a la identificación de una solución". (Alves y Neto, 2011, p. 44).

Fischbein (1987) en sus estudios analiza a fondo el proceso de enseñanza y aprendizaje afirmando que, a menudo, los estudiantes enfrentan dificultades en su aprendizaje, comprensión y resolución de problemas en niveles más avanzados, debido a que sus técnicas y estrategias de razonamiento están impulsadas por modelos implícitos, a veces inadecuados. Así, el docente debe buscar identificar dichos modelos y brindar apoyo al alumno en la corrección de sus modelos mentales, para que su razonamiento se construya adecuadamente.

En este sentido, el *software* GeoGebra tiene un gran potencial para desarrollar la intuición y el razonamiento geométrico del alumno a través de la percepción visual. Al ser un *software* de geometría dinámica con una ventana 3D disponible en su interfaz, permite la visualización de figuras. Según Alves y Neto (2012) la exploración de GeoGebra como herramienta tecnológica permite la visualización de situaciones inimaginables, cuando se restringe a lápiz y papel.

Para hacer factible la construcción del razonamiento geométrico, Hohenwarter y Jones (2007) afirman que GeoGebra proporciona una conexión más cercana entre las capacidades simbólicas, de manipulación y visualización de CAS - *Computer Algebra Systems* -, así como la mutabilidad dinámica de DGS - *Dynamic Geometry Systems* dentro de su interfaz y dicen:

> GeoGebra hace esto proporcionando no solo la funcionalidad DGS (donde el usuario puede trabajar con puntos, vectores, segmentos, líneas y secciones cónicas), sino también CAS (donde las ecuaciones y coordenadas se pueden ingresar directamente y las funciones se pueden definir algebraicamente y luego dinámicamente cambiado), por ejemplo. (Hohenwarter y Jones, 2007, p. 127).

Mariotti y Fischbein (1997) afirman que existe un vínculo entre la Geometría y la realidad, porque la Geometría necesita la realidad para que pueda servir de modelo para demostrar sus diversos aspectos. Es un hecho que la Geometría está presente en todas partes, lo que refuerza la necesidad de su comprensión para comprender el mundo que nos rodea. Así, según Oliveira y Leivas (2017) es conveniente trabajar con situaciones de aprendizaje que estimulen el pensamiento del alumno para relacionar figuras planas y espaciales, buscando desarrollar, a partir de sus observaciones, diferentes puntos de vista, construyendo e interpretando sus representaciones. Breda, Trocado y Santos (2013) señalan que la alternativa de una visualización tridimensional se presenta como una forma de facilitar la comprensión de conceptos por parte del alumno, lo que favorece su aprendizaje.

De lo que se ha mostrado en este apartado, este estudio se basa en la relación entre la intuición, el razonamiento geométrico y la Geometría Espacial, ya que la intuición de la Geometría a través de la visualización puede desarrollar el razonamiento geométrico del alumno, ayudándole a construir modelos mentales adecuados a su evolución cognitiva. El siguiente apartado ilustra de forma práctica el desarrollo de la propuesta didáctica.

5. Metodología

Para este artículo se adoptó una metodología cualitativa exploratoria, perfilada por un estudio de caso, como una forma de observar los experimentos aplicados y anclar datos que verifican la relevancia de este estudio para mejorar la comprensión de la Geometría Espacial por parte del alumno. Según Gil (2002) los resultados de un estudio de caso se presentan como hipótesis y no como conclusiones.

La investigación se realizó con un grupo de veinte estudiantes, en el grupo de edad de 16-17 años, de una escuela vocacional pública de la ciudad de Fortaleza - CE. La aplicación se llevó a cabo en dos reuniones extra-clase, en las que se invitó a los estudiantes a participar en un momento de experimentación utilizando geometría dinámica utilizando el *software* GeoGebra. Las reuniones se realizaron de forma remota, debido al escenario actual de la pandemia del Nuevo Coronavirus (COVID-19), utilizando la plataforma *Google Meet*.

La estructuración de la situación didáctica siguió: (i) Presentación de los temas que componían la situación didáctica y establecimiento del contrato didáctico; (ii) Disponibilidad de construcciones en GeoGebra; (iii) Manipulación de construcciones por parte de los estudiantes, en busca de soluciones y construcción de conocimiento sobre el Principio de Cavalieri; (iv) institucionalización basada en las respuestas de los estudiantes, corrigiendo conclusiones erróneas y presentando una conceptualización formal del Principio de Cavalieri.

Para la recolección de datos se utilizaron dos formularios electrónicos, un cuestionario inicial para encuestar a la clase sobre sus conocimientos de GeoGebra y un cuestionario final para capturar sus impresiones sobre los encuentros, un archivo de grabación de video desde el momento del encuentro y registro fotográfico. Para preservar la identidad de los participantes en esta aplicación, los nombres de los estudiantes han sido representados por Alumno 1, Alumno 2, etc.

Se eligió la Teoría de Situaciones Didácticas para orientar los pasos en el desarrollo de la secuencia didáctica, mientras ocurren observaciones y descripciones de las categorías del razonamiento intuitivo de Fischbein, analizando las manifestaciones de la intuición a partir de la visualización geométrica con el apoyo de GeoGebra.

Las construcciones en GeoGebra se pusieron a disposición de los estudiantes, como una alternativa para optimizar el tiempo y enfocarse en la manipulación y comprensión de las propiedades geométricas que ayudan en la construcción del concepto sobre el Principio de Cavalieri.

5.1. Aplicación de la situación didáctica

En la dinámica del primer encuentro, se estableció el contrato didáctico con la clase, presentando el conjunto de pautas para la realización de los dos momentos. Según Brousseau (2008), el contrato didáctico consiste en un conjunto de comportamientos esperados por parte del profesor y los alumnos, mediados por el saber.

En el contrato didáctico con la clase, se explicó que resolverían una situación didáctica, parte de una investigación, reforzando que la participación de todos era de gran importancia. Se pidió al grupo que registrara las reuniones mediante fotografías o una pantalla de impresión de la pantalla del teléfono celular, tanto de los cálculos anotados en sus cuadernos como de las manipulaciones en GeoGebra. Se instruye a los estudiantes para que realicen cálculos utilizando el software y escribiendo en el cuaderno, como una forma de comparar y reflexionar sobre las respuestas. Además, se les indicó que utilizaran el chat o el micrófono de la plataforma para dialogar, preguntar y / o validar sus respuestas. Además, se explicó que responderían dos formularios, uno inicial y otro final y se estableció que todos recibirían las construcciones 1, 2 y 3 como archivos GeoGebra (.ggb) a través del grupo de WhatsApp.

Luego, se presentaron las preguntas de la situación didáctica, como se muestra en la Tabla 1:

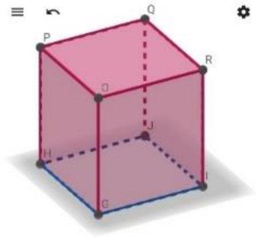
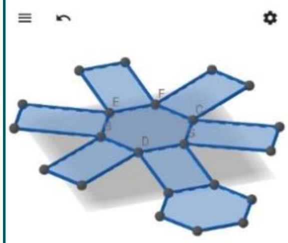
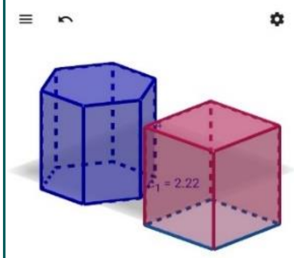
Pregunta 1: Dada la construcción 1, determine lo que se solicita en los siguientes elementos: **Construcción 1**	**Pregunta 2:** Dada la construcción 2, determine lo que se solicita en los siguientes elementos: **Construcción 2**	**Pregunta 3:** Analizando las construcciones 1 y 2: **Construcciones 1 e 2**
		
a) Identifique las medidas de los bordes. b) Calcule el área de la base y el volumen de esta construcción. c) Presente los cálculos escritos a mano y luego use las herramientas de GeoGebra, verificando sus hallazgos.	a) Identifique las medidas de los bordes. b) Calcule el área de la base y el volumen de esta construcción. c) Muestre los cálculos escritos a mano y luego use las herramientas de GeoGebra.	a) Manipula la medida de la altura de las construcciones con las herramientas de GeoGebra. b) ¿Qué tienen estas construcciones en común?

Tabla 1. Preguntas de la situación didáctica propuesta

El conjunto de preguntas trabaja sobre la situación didáctica de TSD - acción, formulación y validación para resolver los problemas presentados, desarrollando habilidades como la percepción geométrica y la intuición a través de la visualización y manipulación de construcciones en GeoGebra - Calculadora 3D. Según Breda *et al.* (2013, p. 64) “La posibilidad de visualizar en 3D parece ser una forma de facilitar la aprehensión de conceptos y favorecer el aprendizaje de los estudiantes”.

Para familiarizar la clase con respecto a GeoGebra, la docente proyectó la pantalla de su teléfono celular (Figura 1) en el aula remota, presentando la aplicación Calculadora 3D en su versión para *smartphones*. Así, mostró algunas funcionalidades básicas de la aplicación, la ventana de álgebra y la ventana 3D.

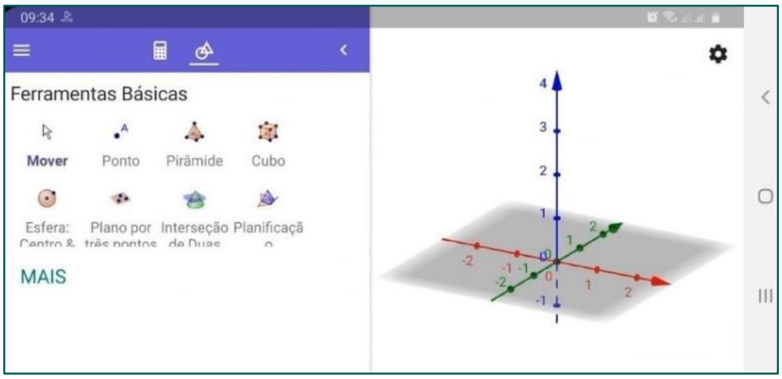


Figura 1. Presentación de la aplicación Calculadora 3D, para *smartphones*. Fuente: elaboración propia

La Figura 1 muestra la interfaz inicial de la aplicación Calculadora 3D, explorada por la clase. A continuación, se propuso la primera pregunta de la situación didáctica, donde la construcción 1 se puso a disposición en formato (.ggb) para el grupo de alumnos.

En la situación de acción, los estudiantes manipularon y exploraron la construcción 1 presentada dentro de la aplicación Calculadora 3D, mediante rotación, ampliación y reducción, buscando la información necesaria para resolver la pregunta propuesta.

Al preguntar a la clase: "¿Qué poliedro es este?", La respuesta inicial, posiblemente intuitiva, fue decir "¡es un cubo, profesora!", incluso sin que se hayan presentado las medidas de los lados. Después de burlarse y durante la manipulación, algunos estudiantes del grupo se dieron cuenta de que no era un cubo. El extracto de algunas declaraciones fue:

"No es un cubo, porque los 'lados' no son todos iguales" (Alumno 1)
"Ahora vi que no es un cubo, porque la altura es diferente a la base" (Alumno 2)
"Parece un cubo, pero no lo es. Es un adoquín" (Alumno 3).

Según Fischbein (1982), la experiencia mental es una reproducción del proceso práctico basado en ensayo y error orientado a objetivos. La prueba perfecta no tiene sentido para la forma de pensar empírica natural, justificando por qué los estudiantes se refirieron a la construcción como un cubo inmediato, en base a sus vivencias, sin recurrir a una demostración. "Para comprender realmente lo que significa una prueba matemática, la mente del estudiante debe sufrir una modificación fundamental" (Fischbein, 1982, p. 17).

A partir de la manipulación de la construcción, utilizando el comando "distancia, longitud o perímetro", los alumnos pudieron encontrar las medidas de los bordes, tanto del polígono base como de los bordes laterales, que corresponden a la altura del prisma. Esto se puede ver en la Figura 2, que corresponde a la presentación del Alumno 4:

Con base en las medidas encontradas en la Figura 2, los estudiantes comenzaron a buscar los resultados del área base y el volumen de la construcción, a partir de sus conocimientos y percepciones previas sobre la construcción, configurando la dialéctica de formulación TSD.

La validación se produjo tras el diálogo y la participación en clase. Algunos alumnos del grupo compartieron sus ideas con los presentes, exponiendo sus percepciones, conjeturas y sus notas sobre la construcción, escuchando a los demás y construyendo sus conocimientos.

Cabe mencionar que la validación presentada por el Alumno 2 fue incorrecta, ya que presentó el área de la base de la construcción usando uno de los bordes de la base y la medida del borde lateral (3.58 * 4 = 14.32). Incluso demostrar el valor de esta área en GeoGebra, no fue la respuesta que pedía la pregunta. Fischbein (1993) en su perspectiva, señala que, en el razonamiento matemático, los objetos materiales -sólidos o dibujos- son solo modelos materializados de las entidades mentales con las que trata el matemático. Por tanto, una figura geométrica no es un mero concepto, sino una imagen visual. Entonces, el error del Alumno 2 provino de una observación errónea de la imagen.

Luego de la discusión, el Alumno 3 mostró su pantalla con la vista superior de la construcción en GeoGebra, comprobando que la base es un cuadrado y expuso las medidas respectivas, como se muestra en la Figura 3:

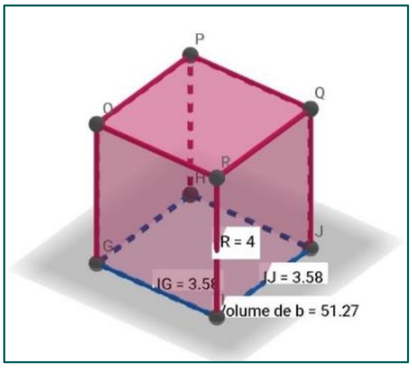


Figura 2. Respuesta del alumno 4

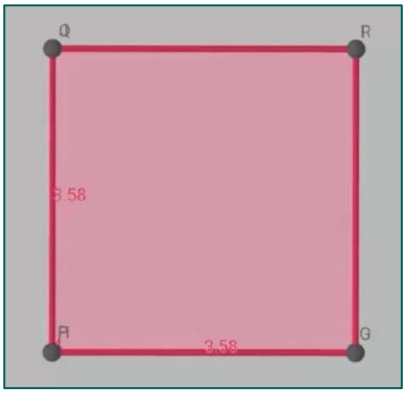


Figura 3. Vista superior de la construcción 1 elaborada y presentada por el Estudiante 3.

El elemento de la Figura 4 es una comparación entre los cálculos no rutinarios y la verificación de la respuesta basada en la manipulación que no es de GeoGebra:

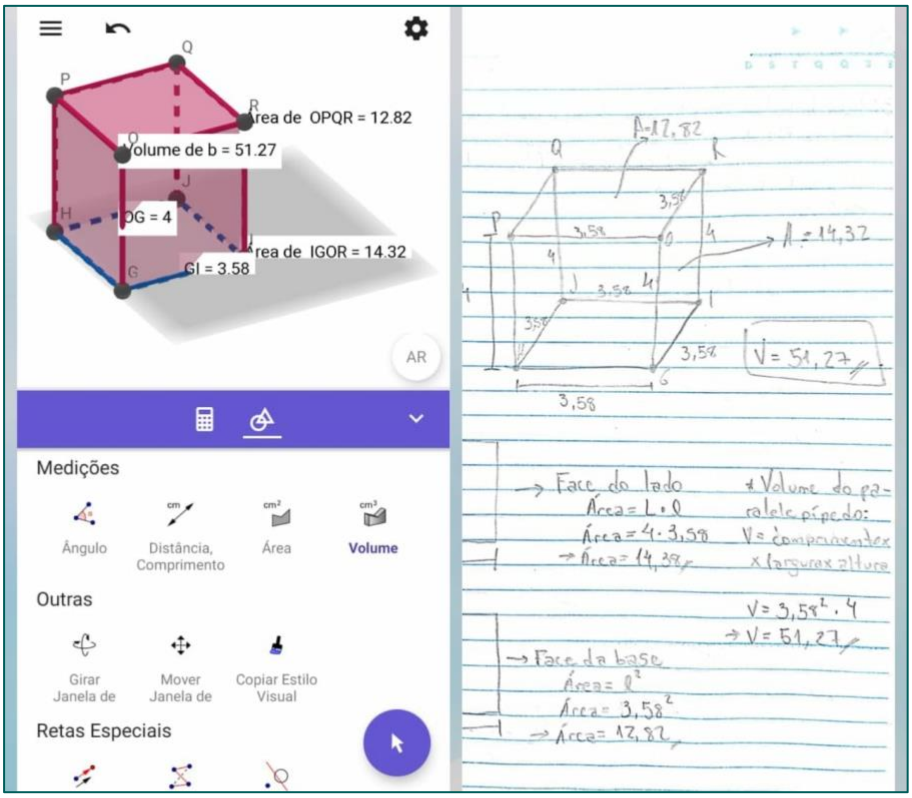


Figura 4. Comparación entre respuestas escritas y GeoGebra del Alumno 3.

En la Figura 4, se puede observar que el Alumno 3, al realizar los cálculos manualmente, sintió la necesidad de visualizar la imagen del adoquín de la construcción 1, tanto es así que garabateó un dibujo para su mejor comprensión. En este caso, según Fischbein (1982), se da un nivel de aceptación intuitiva en esta Figura 4, refiriéndose al hecho de entender la validez universal de la declaración como garantizada e impuesta por la validez de la prueba.

En cuanto al segundo problema propuesto, como la clase ya conocía GeoGebra, se optimizó el proceso de manipulación de la construcción y solución de la situación propuesta. El descubrimiento de la herramienta de planificación generó entusiasmo e interés. Uno de los estudiantes usó la expresión "¡Qué genial!" como demostración de la reacción al ver el edificio en movimiento, abriendo y cerrando el patrón. Las figuras 5, 6 y 7 intentaron registrar este movimiento, así como el reconocimiento del sólido formado:

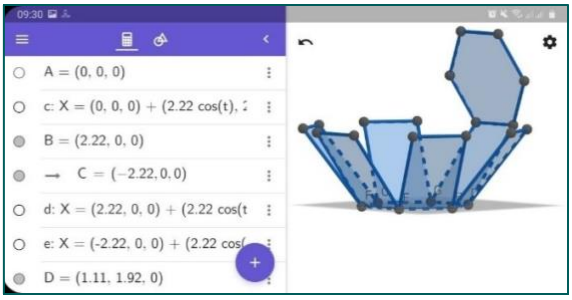


Figura 5. Movimiento de la planificación de la construcción 2. Fuente: elaboración propia

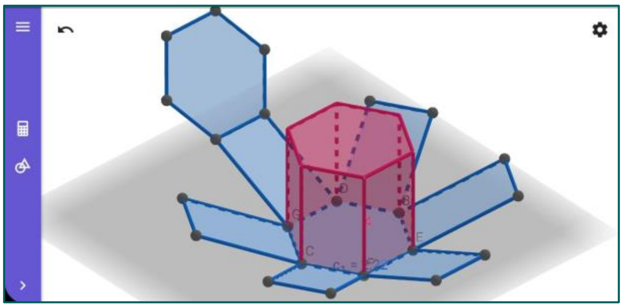


Figura 6. Movimiento de planificación, con el prisma central destacado. Fuente: elaboración propia

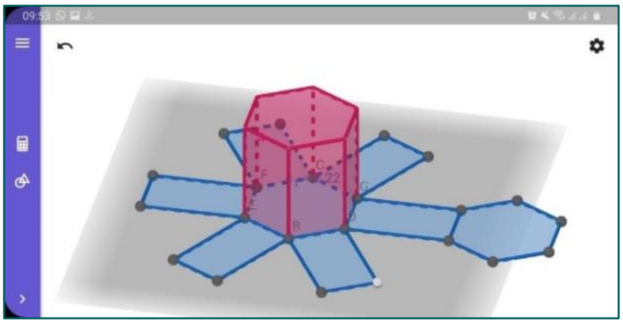


Figura 7. Construcción del prisma planificado y su croquis 3D. Fuente: elaboración propia

Al manipular la construcción 2, los estudiantes la reconocieron como un prisma de base hexagonal y realizaron los mismos procedimientos realizados en la situación de la pregunta 1, donde descubrieron las medidas de la base y los bordes laterales, configurando la dialéctica de la acción. Así, algunos estudiantes del grupo recurrieron a lo que Fischbein (1987) clasifica como intuición anticipatoria, donde hay una noción de los pasos a seguir para resolver el problema y la estrategia a utilizar para ello.

Sin embargo, en la formulación, al elaborar las conjeturas para realizar los procedimientos de cálculo manual, los alumnos no recordaban cómo calcular el área de un hexágono. Hasta que una intuición conjetural del Alumno 2 facilitó el *insight* del grupo:

> "Un hexágono está formado por seis triángulos equiláteros. Si sé cómo calcular el área de un triángulo equilátero, simplemente multiplique el área por 6" (Alumno 2).

El discurso del alumno 2 describe la dialéctica de la formulación, que a su vez está marcada por la elaboración de conjeturas. En la perspectiva de Fischbein (1987) parece que el Alumno 2 presentó una intuición conjetural, ya que los elementos necesarios para la solución ya estaban explícitos en la construcción, pero el estudiante aún no podía ver la solución.

Después de una discusión y una comprensión estructural intuitiva de las fórmulas matemáticas para calcular el área del triángulo equilátero y, posteriormente, el área del hexágono, los estudiantes demostraron la veracidad de sus cálculos manuales con la calculadora (por contener aproximaciones decimales) e interactuando con la construcción en GeoGebra, lo que da la dialéctica de validación, verificada en la Figura 8:

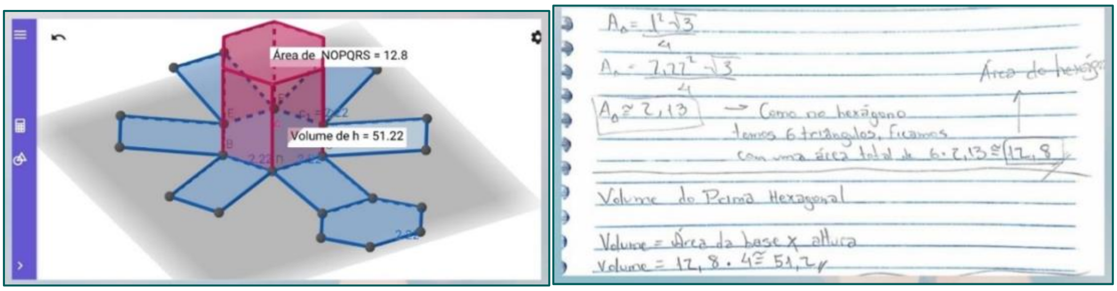


Figura 8. Comparación entre cálculo escrito y resultado en GeoGebra del Alumno 3.

Fischbein (1993, p. 141) señala que "las propiedades de las figuras geométricas son impuestas o derivadas de definiciones en el dominio de un sistema axiomático dado". Desde este punto de vista, una figura geométrica también es de naturaleza conceptual. En la Figura 8, al asumir conceptualmente que la construcción corresponde a un prisma de base hexagonal, verificando las medidas de la base y aristas laterales, se encontró mediante un conjunto de procedimientos, valores del área de la base y volumen, con mismos resultados numéricos, considerando el redondeo de decimales.

Y finalmente, se presentó la tercera pregunta de la situación didáctica, que busca estimular la concepción de la generalización del Principio Cavalieri. Al visualizar las construcciones 1 y 2 (una al lado de la otra), se instruyó a los estudiantes para que las observaran y manipularan, modificando las medidas del borde de la base y la altura, siempre dando el mismo valor a estos bordes en ambas construcciones y viendo sus resultados. Vea el ejemplo de esta modificación en la Figura 9, donde el Alumno 2 manipula la altura:

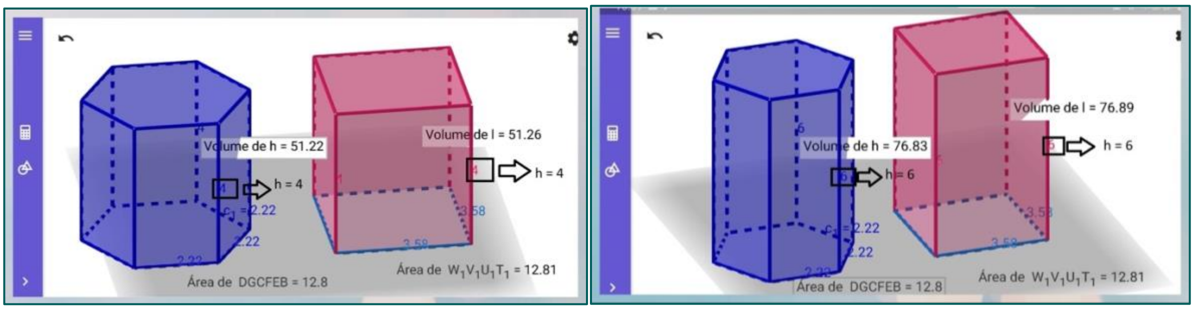


Figura 9. Manipulación de las construcciones 1 y 2 por el Alumno 2.

En la Figura 9, los estudiantes observaron que, al manipular la medida de altura en ambas construcciones, pero dejando la misma medida en los dos sólidos, el volumen también era el mismo, con mínimas diferencias derivadas del truncamiento de decimales. La pregunta "¿qué tienen en común estas construcciones?", planteada por el docente, fue respondida por 3 participantes:

> "Profesora, el área base es la misma" (Alumno 1).
> "Ah, recuerdo que en la última clase habíamos hecho los cálculos y la altura era la misma" (Alumno 2).
> "Profesora, el área de la base es la misma, ¡la altura y el volumen también!" (Alumno 3).

Tras solicitar la manipulación y modificación de las medidas de las dos construcciones, algunos alumnos llegaron a la conclusión de que "el volumen siempre permanece igual". Verificadas estas observaciones, se inició la dialéctica de la institucionalización. Para Brousseau (2008), este es el momento en que el docente sintetiza significativamente todo lo expuesto en los pasos anteriores, formalizando el carácter matemático de lo validado por los estudiantes.

El docente presentó una definición formal sobre el objeto propuesto en la pregunta, que en este caso era el Principio de Cavalieri. Esta definición fue tomada del libro de texto adoptado por la escuela (Leonardo, 2016), ilustrado en la Figura 10:

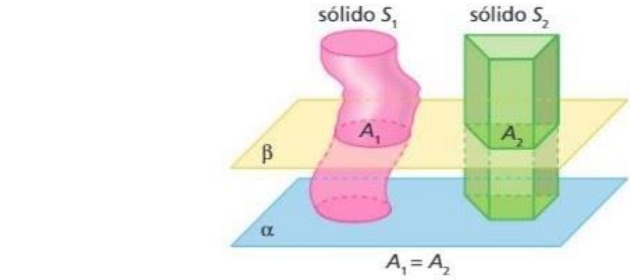

Dois sólidos, S_1 e S_2, apoiados em um plano α e contidos em um mesmo semi-espaço, terão o mesmo volume V se todo plano β, paralelo a α, secciona os dois sólidos segundo regiões planas de mesma área (A).

Figura 10. Institucionalización realizada por el docente. Fuente: Leonardo (2016).

Luego de presentar la definición del Principio Cavalieri, el docente se refirió a la situación didáctica propuesta, considerando que la intención de esta aplicación era brindar una oportunidad para una investigación, vivida por los estudiantes, a través de la visualización y percepción que GeoGebra hizo posible en el construcción del razonamiento geométrico y comprensión de este tema.

6. Resultados y Discusión

Los resultados presentados buscan respuestas para la pregunta ¿Cómo puede el estudiante desarrollar competencias geométricas sobre volúmenes utilizando el Principio de Cavalieri, desde una perspectiva de visualización y razonamiento intuitivo? y en este apartado, los datos se recogieron de la aplicación de la propuesta didáctica realizada en los encuentros, caracterizando las impresiones de los estudiantes sobre el uso de GeoGebra y su utilidad para la comprensión de la Geometría, culminando en el aprendizaje sobre el Principio de Cavalieri. Luego de ser recibidos, se aplicó el cuestionario inicial, el cual nos brindó los siguientes resultados:

- En la pregunta "¿Conoce GeoGebra?" 15 de los estudiantes participantes dijeron que sí, mientras que 5 dijeron que no sabían;
- Cuando se les preguntó si alguna vez habían usado GeoGebra para resolver ejercicios matemáticos, 15 estudiantes dijeron que nunca lo habían usado, mientras que 5 habían usado el software;
- En total, 16 estudiantes participantes expresaron dificultades para dibujar figuras espaciales a mano;
- Todos los participantes dijeron que estaban interesados en estudiar Geometría de una manera más dinámica.

Las respuestas de los estudiantes nos muestran que un número significativo conoce o ha oído hablar de GeoGebra. Sin embargo, un número significativo de estudiantes nunca utilizó el software para resolver ejercicios. A partir de las respuestas dadas y las interacciones de los estudiantes con la construcción durante las reuniones, nos dimos cuenta de que los estudiantes desarrollaron el razonamiento geométrico de manera intuitiva.

En cuanto al cuestionario final, se buscó una visión subjetiva sobre la manipulación en GeoGebra. Al recoger la opinión de los alumnos, obtuvimos que el 75% de los alumnos marcó la opción "Me pareció muy interesante", mientras que el 25% marcó "Me pareció razonable". Ningún alumno marcó las alternativas "Me resultó muy difícil" y "Me resultó poco interesante". Así, se puede inferir que GeoGebra fue un recurso que llamó la atención y despertó el interés de una parte importante de los estudiantes participantes. Al solicitar que justifiquen su respuesta sobre esta propuesta didáctica con el GeoGebra, aparece un fragmento de algunos discursos:

> "Encontré un tema interesante, una herramienta que ayuda mucho" (Alumno 1).
> "Crea conocimiento dinámico, que hace que el aprendizaje sea efectivo" (Alumno 2).
> "Lo encontré un poco difícil, porque nunca había usado" (Alumno 3).
> "GeoGebra para dispositivos móviles es un poco difícil" (Alumno 4).
> "Disfruté mucho la clase y logré absorber muchas cosas, aprendí mucho" (Alumno 5).
> "Es muy práctico y sencillo, muy fácil de usar y muy útil también" (Alumno 6).

> “Me pareció muy interesante descubrir áreas, volúmenes, aristas y bases” (Alumno 7).
> “Nunca lo usé, lo encontré INCREÍBLE” (Alumno 8).
> “Creo que después de que aprendes a manejarlo, es muy práctico y ciertamente ayuda y fomenta muchos estudios matemáticos” (Alumno 9).
> “Lo encontré muy simple, pero necesito más tiempo usando el programa para mejorarlo fue algo nuevo, fue interesante después del entrenamiento” (Alumno 10).

El informe de estos estudiantes muestra la importancia de tener en cuenta en el proceso de aprendizaje elementos subjetivos como la atención, el interés, la emoción e incluso la memoria, que constituyen su contexto cognitivo. En este sentido, los procesos cognitivos en el aprendizaje de los estudiantes se constituyeron como supuestos teóricos originados a partir de la propia movilización del estudiante en el aprendizaje. Así, como forma de potenciar las condiciones de aprendizaje, es importante fomentar una participación del alumno, buscando desarrollar su rol en la construcción de su conocimiento.

Con esta aplicación y recolección de datos, se notó que la situación didáctica de la TSD permitió la construcción de este nuevo conocimiento adquirido desde la autonomía del alumno, el cual comenzó a investigar, buscando la solución de la situación didáctica a través de sus conocimientos matemáticos. Sobre el contenido revisado o aprendido en esta aplicación, algunas de las respuestas más comunes recopiladas fueron:

> “Revisé el área del triángulo equilátero, el volumen del prisma y también aprendí el Principio de Cavalieri” (Alumno 1).
> “Principio de Cavalieri, área del triángulo equilátero y mucho más” (Alumno 2).
> “Área, volumen, figuras espaciales, planificación” (Alumno 3).
> “Manejo de GeoGebra” (Alumno 4).

En un análisis de sus discursos, se advierte que GeoGebra posibilitó el desarrollo de la capacidad de razonamiento del alumno, ya que éste pensaba, simulaba y elaboraba estrategias, verbalizaba ideas y conjeturas y aprendía de sus propias percepciones. Según Alves (2019) se puede incentivar a los estudiantes a investigar y determinar propiedades extraídas de la geometría a partir de las configuraciones de la construcción realizada en GeoGebra. Así, se entiende que se han movilizado categorías intuitivas y, en una perspectiva futura, se pueden mejorar a medida que se fomente el uso del *software*.

Brousseau (2008) explica que el momento en que el alumno construye conocimiento se da en la situación adidáctica, y en este caso la propuesta didáctica de este trabajo se construyó para que el alumno pudiera interactuar con un entorno sin la intervención del docente, que de hecho ocurrió.

Fischbein (1987) nos muestra que podemos identificar modelos mentales inadecuados desde una base intuitiva, basada en el conocimiento sobre las formas de manifestación del razonamiento intuitivo, adaptando nuestros modelos de transmisión didáctica. También de acuerdo con Fischbein (1987), en cualquier actividad matemática se puede identificar la dimensión intuitiva, que se refiere principalmente a la dinámica de la aceptación subjetiva de una idea matemática, lo cual también ocurrió cuando los estudiantes percibieron las relaciones geométricas entre las figuras con el soporte del GeoGebra.

Al concluir que los volúmenes de cualquier prisma, con igual área de base y altura, también eran iguales, los estudiantes alcanzaron el objetivo de la propuesta didáctica. Así, la búsqueda de una solución generó un resultado satisfactorio, proporcionando la construcción de conocimiento.

7. Consideraciones finales

Con esta aplicación podemos analizar que la propuesta didáctica desarrollada con uso del GeoGebra - Calculadora 3D permitió la construcción de conocimientos sobre el Principio de Cavalieri, obteniendo un resultado satisfactorio, ya que las preguntas exploradas permitieron una evolución de la percepción geométrica de los estudiantes sobre del contenido matemático en cuestión, alcanzando el objetivo de la investigación, ya que los estudiantes fueron capaces de construir nuevos conocimientos a partir de la exploración de la asociación entre GeoGebra y las preguntas presentadas.

Además, los testimonios de los estudiantes dan legitimidad respecto al aporte que hizo posible GeoGebra, a través de la manipulación de construcciones, permitiendo la experimentación y exploración de conceptos dentro de la Geometría Plana y Espacial, mostrándose como una herramienta dinámica e interactiva.

Es de destacar que la dialéctica brindada por TSD brindó mediación de manera focalizada, donde el apoyo brindado por GeoGebra en cuanto a la visualización y manipulación de construcciones permitió al alumno estructurar conjeturas y explorar conocimientos que componían la identificación de intuiciones verificadas en el desarrollo de la aplicación.

Así, GeoGebra en su versión para *smartphones* - Calculadora 3D - es un recurso alternativo más accesible para los estudiantes y que puede ser promovido en las escuelas como un aporte a la enseñanza, no solo sobre el Principio Cavalieri, sino también sobre varios temas relacionados con las matemáticas.

Agradecimiento
Agradecemos el apoyo financiero otorgado por el Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico - CNPq para el desarrollo de esta investigación en Brasil.

Bibliografía

Abar, C A. A. P. (2020). A Transposição Didática na criação de estratégias para a utilização do GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 9(1), 59-75. doi: https://doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p59-75.

Alves, F. R. V., y Neto, H. B. (2011) A contribuição de Efraim Fischbein para a Educação Matemática e a formação do professor. *Revista Conexão, Ciência e Tecnologia,* Fortaleza, 5(1), 38-54. doi: https://doi.org/10.21439/conexoes.v5i1.441.

Alves, F. R. V., y Neto, H. B. (2012). Engenharia Didática para a exploração didática da tecnologia no ensino no caso da regra de L'Hospital. *Educação Matemática Pesquisa*, 14(2), 337 - 367. Recuperado el 12 de octubre de 2020, de: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/9445/8147.

Alves, F. R. V. (2019). Visualizing the Olympic Didactic Situation (ODS): teaching mathematics with support of the GeoGebra software. *Acta Didactica Napocensia*, 12(2), 97-116. doi: https://doi.org/10.24193/adn.12.2.8.

Ministério de Educación del Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Recuperado el 02 de octubre de 2020, de: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/.

Breda, A., Trocado, A., y Santos J. (2013). O GeoGebra para além da segunda dimensão. *Indagatio Didactica*, 5(1), 61-84. doi: https://doi.org/10.34624/id.v5i1.4304.

Brousseau, G. (2008). *Introdução ao estudo das situações didáticas:* conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique :* Du savoir savant au savoir enseigné, La Pensée sauvage. Grenoble, deuxième édition augmentée.

Cunha, L. G., y Aguiar, R. (2019). *O cálculo de volume de sólidos usando o Princípio de Cavalieri mediado por materiais confeccionados em impressão 3D.* Anais… V COLBEDUCA – Colóquio Luso-Brasileiro de Educação, 4(1). Recuperado el 05 de febrero de 2021, de: https://www.revistas.udesc.br/index.php/colbeduca/article/view/17235/11264.

Dolce, O., y Pompeo, J. N. (2005). *Fundamentos da Matemática Elementar, volume 10*: geometria espacial, posição e métrica. 6 ed. São Paulo: Atual Editora.

Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics,* 3(2), 9-18,24, Recuperado el 11 de noviembre de 2020, de: https://www.jstor.org/stable/40248127?seq=1.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach.* Netherlands: D. Reidel Public, Mathematics Educational Library. Recuperado el 10 de noviembre de 2020, de: https://www.springer.com/gp/book/9789027725066.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics,* 24(2), 139-162. Recuperado el 05 de noviembre de 2020, de: http://www.jstor.org/stable/3482943.

Fischbein, E., y Gazit, A. (1984). Does the Teaching of Probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15(17), 1-24. Recuperado el 20 de noviembre de 2020, de: https://www.jstor.org/stable/3482454?seq=1.

Gil, A. C. (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa***.** 4 ed. São Paulo: Atlas.

Gutiérrez, A. J. (2020). GeoGebra: herramienta didáctica para fortalecer competencias geométricas em Educación Media. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 105, 165-188.

Hoffmann, M. (2018). *Explorando o Princípio de Cavalieri com o GeoGebra*. Tesis de maestria, Universidade do Estado de Mato Grosso, Mato Grosso, MT, Brasil.

Hohenwarter, M., y Jones, K. (2007). Ways of linking Geometry and Algebra: the case of GeoGebra. D. Küchemann (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics,* 27(3). Recuperado el 20 de enero de 2021, de: https://www.researchgate.net/publication/239830609_Ways_of_linking_geometry_and_algebra_The_case_of_GeoGebra.

Ingar, K. V. (2014). *A visualização na aprendizagem dos valores máximos e mínimos locais da função de duas variáveis reais*. Tesis (Doctorado en Educación Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC, São Paulo, 2014. Recuperado el 06 de octubre de 2020, de: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11013.

Leonardo, F. M. (Org.). (2016). *Conexões com a Matemática 2.* 3 ed. São Paulo: Moderna.

Mariotti, M. A., y Fischbein, E. (1997) Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics,* 34, 219–248. doi: https://doi.org/10.1023/A:1002985109323.

Oliveira, M. T., y Leivas, J. C. P. (2017). Visualização e Representação Geométrica com suporte na Teoria de Van Hiele. *Ciência e Natura*, 39(1), 108-117. doi: 10.5902/2179460X23170.

Pais, L. C. (1996). Intuição, experiência e teoria geométrica. *Revista Zetetiké*, 6. doi: https://doi.org/10.20396/zet.v4i6.8646739.

Paterlini, R. R. (2010). Os "Teoremas" de Cavalieri. *Revista do Professor de Matemática,* 72, 43-47. Recuperado el 15 de fevrero de 2021, de: https://www.dm.ufscar.br/~ptlini/paterlini_cavalieri.pdf.

Santos, A. A., y Alves, F. R. V. (2017). A Engenharia Didática em articulação com a Teoria das Situações Didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de Matemática. *Revista Acta Scientiae*, 19(3), 447-465. Recuperado el 29 de enero de 2021, de: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/2739/2373.

Silva, H. N., Abar, C. A. A. P. (2016). A utilização do GeoGebra na reconstrução de atividades do imagiciel. *Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM*, São Paulo. Recuperado em 21 julho, 2020, de http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6064_2835_ID.pdf.

Zubieta B., G. (1997). Los indivisibles de Cavalieri: una perspectiva plausible para el aprendizaje del cálculo de volúmenes. *Educación Matemática*, (9)1, 62-69. Recuperado el 22 de octubre de 2021, de: http://funes.uniandes.edu.co/10078/1/Indivisibles1997Zubieta.pdf.

Renata Teófilo de Sousa. Mestranda em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE). Especialista em Ensino de Matemática - UVA, Qualificação em Ensino de Matemática no Estado do Ceará - UFC. Pós-graduada em Didática e Metodologias Ativas na aprendizagem e MBA em Gestão Escolar - UniAmérica. Professora da Secretaria de Educação Básica do Estado do Ceará. Email: rtsnaty@gmail.com

Francisco Régis Vieira Alves. Doutor em Educação pela Universidade Federal do Ceará, Bolsista de produtividade do CNPQ – PQ2. Professor permanente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do IFCE, Professor permanente do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Educação profissional tecnológica. Professor titular do IFCE – departamento de Matemática e Física. Coordenador acadêmico do Doutorado em rede RENOEN, polo IFCE. Email: fregis@ifce.edu.br

Italândia Ferreira de Azevedo. Doutoranda em Ensino de Ciências e Matemática do Programa RENOEN pelo Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE campus Fortaleza – e Mestra em Ensino de Ciências e Matemática pela mesma instituição. Professora da Secretaria de Educacão Básica do Estado do Ceará. Email: italandiag@gmail.com