

Iniciando la modelización matemática temprana en Educación Infantil: ¿Cómo razonan y qué hacen los niños de 3 años?

Beginning early mathematical modelling in Early Childhood Education: how do 3-year-olds reason and what do they do?

ÁNGEL ALSINA^A Y MARÍA SALGADO^B

^AUniversidad de Girona. ^BUniversidad de Santiago de Compostela

^A angel.alsina@udg.edu, ^B maria.salgado@usc.es

^A <https://orcid.org/0000-0001-8506-1838>, ^B <https://orcid.org/0000-0002-0309-241X>

Recibido: Febrero de 2022. Aceptado: Mayo de 2022.

Cómo citar: Alsina, Á. y Salgado, M. (2022). Iniciando la modelización matemática temprana en Educación Infantil: ¿Cómo razonan y qué hacen los niños de 3 años? *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 11(1), 1-38.



Este artículo está sujeto a una [licencia "Creative Commons Reconocimiento-No Comercial" \(CC-BY-NC\)](#).

DOI: <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2022.1-38>

Resumen: La modelización matemática temprana, entendida como un proceso que ayuda a crear los primeros modelos para analizar, explicar y comprender la realidad, es un marco idóneo para implementar un enfoque competencial de las matemáticas. Desde este punto de vista, se presenta la actividad "construimos casas con piezas de madera", que se ha implementado a 20 niños de 3 años. Para analizar cómo razonan y qué hacen durante la actividad, se han utilizado los indicadores específicos de Educación Infantil del instrumento "Rubric for the Evaluation of Mathematical Modeling Processes", que considera las diversas fases de un ciclo de modelización. Los resultados indican que los niños de 3 años empiezan a desarrollar habilidades de comprensión, estructuración, matematización, trabajo matemático, interpretación, validación y exposición, por lo que son capaces de crear los primeros modelos concretos. Se concluye que, en futuros estudios, es necesario determinar la influencia de diversas variables en las acciones de los niños, como el tipo de tarea o los conocimientos del profesorado de Educación Infantil para llevar a cabo actividades de modelización matemática temprana.

Palabras clave: Modelización matemática temprana, ciclo de modelización, modelo concreto, enseñanza de las matemáticas, Educación Infantil.

Abstract: Early mathematical modelling, defined as a process that helps to create the first models to analyse, explain and understand reality, is an ideal framework for developing mathematical competence. From this point of view, the activity "we build houses with pieces of wood", which has been implemented with 20 3-year-old children, is presented. In order to analyse how they

reason and what they do during the activity, the Childhood specific indicators of the "Rubric for the Evaluation of Mathematical Modelling Processes" instrument have been used, which considers the different phases of a modelling cycle. The results show that 3-year-olds begin to develop skills of comprehension, structuring, mathematization, mathematical work, interpretation, validation and exposition and, therefore, create the first concrete models. It is concluded that, in future studies, it is necessary to determine the influence of several variables on children's actions, such as the type of task or the knowledge of the Early Childhood Education teacher to carry out early mathematical modelling activities.

Keywords: Early mathematical modelling, modelling cycle, concrete model, mathematics teaching, Early Childhood Education.

INTRODUCCIÓN

Cada vez con mayor impulso, la educación matemática infantil promueve una enseñanza contextualizada que se focaliza en razonar y hacer (Alsina, 2020; Alsina et al., 2021a), en substitución de una enseñanza basada en la repetición, la reproducción, la mecanización o la memorización de definiciones y procedimientos. Este enfoque, que se caracteriza por una planificación y una gestión de la enseñanza de los contenidos matemáticos a través de los procesos o las habilidades matemáticas (NCTM, 2003), requiere que las prácticas de enseñanza se inicien a partir del planteamiento de una situación problemática o un reto que sea real o realista y que, durante el proceso de resolución, se activen otras habilidades imprescindibles para el desarrollo del pensamiento matemático como el razonamiento y la prueba, la argumentación, la comunicación, las conexiones o la representación de las ideas matemáticas que van emergiendo (Alsina, 2012, 2016).

Como se indica en Alsina (2020), algunos de los ejemplos más claros de este cambio de paradigma son, entre otros, los Estándares Comunes para las Matemáticas de Estados Unidos (CCSSI, 2010) o el currículo de matemáticas de Singapur (Ministry of Education Singapore, 2012). En el caso de Estados Unidos, los estándares mencionados describen ocho prácticas matemáticas para todas las etapas, que han sido adaptadas de los cinco estándares de proceso propuestos por el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2003) y de los cinco aspectos de competencia descritos en el informe *Adding It Up*, del *National Research Council* (NRC, 2001): 1) la resolución de problemas con sentido y la perseverancia para resolverlos; 2) el razonamiento abstracto y cuantitativo; 3) la construcción de argumentos viables y la escucha crítica del razonamiento de los demás; 4) la modelización matemática; 5) el uso

estratégico de herramientas apropiadas; 6) la atención a la precisión; 7) la búsqueda y el uso de la estructura; y 8) la búsqueda y la expresión de la regularidad en los razonamientos. En relación a Singapur, el foco del currículo de matemáticas se centra en la resolución de problemas y, desde este prisma, los procesos son imprescindibles. En la legislación educativa española de Educación Infantil (Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil), se observa también un avance, al substituir un currículo orientado a la adquisición de contenidos por un enfoque orientado al desarrollo de las competencias. Sin embargo, en lo que se refiere a la educación matemática, no se explicitan suficientemente las formas de adquisición y uso de los contenidos matemáticos a través de los procesos de resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación (Alsina, 2022).

Este artículo tiene en cuenta estos planteamientos preliminares, pero pretende afinar el papel que juega la modelización matemática en el desarrollo del pensamiento matemático infantil. Mientras que en los antecedentes mencionados que consideran la modelización, este proceso matemático se considera como un elemento más, aquí se asume que la modelización matemática es la habilidad que aglutina las demás prácticas o procesos, puesto que *cuando se propone una actividad de modelización matemática se ponen en juego el conjunto de prácticas o procesos matemáticos, como por ejemplo la resolución de un problema real o realista, el razonamiento y la prueba, la comunicación, las conexiones o la representación*. De este modo, la modelización matemática es un marco óptimo para llevar a cabo prácticas de enseñanza de las matemáticas a partir de una visión integrada de los conocimientos matemáticos (Alsina, 2012) ya que, durante un ciclo de modelización a través de la resolución de problemas reales, los niños movilizan contenidos matemáticos de distinta naturaleza y gestionan el conocimiento, las habilidades y las emociones a través de los distintos procesos matemáticos para conseguir un objetivo a menudo más cercano a situaciones funcionales y en contextos de vida cotidiana que a su uso académico (Figura 1).

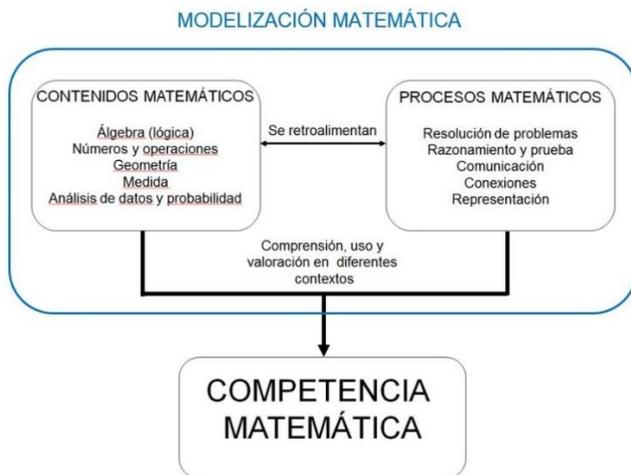


Figura 1. Papel de la modelización matemática en el desarrollo del pensamiento matemático infantil. Fuente: elaboración propia.

Partiendo de este enfoque, este artículo se focaliza en la modelización matemática y, más concretamente, en la modelización matemática temprana, término introducido por Alsina y Salgado (2021a, 2021b) para distinguir la modelización matemática de las actividades que permiten generar modelos iniciales en Educación Infantil:

concebimos la modelización matemática temprana como un proceso o ciclo que, en el marco de la resolución de problemas reales, ayuda a crear los primeros modelos para analizar, explicar y comprender la realidad, basado en un proceso de reflexión que implica constantes idas y venidas entre los contextos reales y las matemáticas que moviliza el alumnado de las primeras edades (Alsina y Salgado, 2021b, p. 2).

Desde este marco, en este nuevo estudio nos preguntamos cómo se inicia el desarrollo de esta habilidad y, más concretamente, nuestro objetivo consiste en determinar con mayor precisión cómo razonan y qué son capaces de hacer los niños de 3 años cuando se plantea una actividad de modelización. Para ello, el artículo se estructura en dos partes: en la primera parte, se presenta una breve fundamentación teórico-metodológica de la modelización matemática temprana que se apoya en recomendaciones internacionales (CCSSI, 2010; Ministry of Education

Singapore, 2012; NCTM, 2003) y, en la segunda parte, se describe y analiza, a partir del ciclo de modelización, el resultado de una actividad que se ha propuesto a un grupo de 20 niños de 2-3 años de edad

1. LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA TEMPRANA: ¿QUÉ PRETENDE Y CÓMO SE PUEDE TRABAJAR EN EDUCACIÓN INFANTIL?

La modelización matemática temprana, como se ha indicado, pretende enfatizar el conocimiento inicial de los niños de las primeras edades para crear los primeros modelos, en el proceso de traducción entre los contextos del mundo real y las matemáticas (Alsina y Salgado, 2021a, 2021b). De acuerdo con la Real Academia de la Lengua Española, un modelo se refiere a una representación ideal de un aspecto concreto de la realidad física –un objeto o fenómeno real– usada con finalidades de interpretación. Un modelo, pues, simplifica la realidad subrayando los elementos fundamentales y eliminando los aspectos secundarios. En el marco de la educación matemática, el NCTM (2003) define un modelo como una representación matemática de un objeto o un fenómeno real que sirve para mostrar una determinada manera de resolver una situación problemática real.

Desde entonces, algunos estudios han empezado a analizar desde distintos enfoques teóricos si los niños de Educación Infantil son capaces de desarrollar procesos de modelización y crear modelos. Desde la Teoría Antropológica (Chevallard, 1999), por ejemplo, Ruiz-Higueras y García (2011) y Ruiz-Higueras et al. (2013) confirman que los niños de 3-6 años son capaces de empezar a desarrollar estas habilidades. Más adelante, desde los principios de la Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1991) y el enfoque competencial del NCTM (2003), Alsina y Salgado (2021a, 2021b), Alsina et al. (2021b) y Toalongo-Guamba et al. (2021) tratan de identificar tanto los elementos que intervienen durante el proceso de modelización como las características específicas de los modelos que pueden crear los niños de Educación Infantil. Estos estudios se han realizado partiendo de que la modelización matemática es un proceso no lineal e iterativo, por lo que los procesos de modelización matemática se desarrollan a través de ciclos (Carreira et al., 2011; Geiger, 2011; Girnat y Eichler, 2011; Greefrath, 2011; Kaiser, 1995). Actualmente, no existe todavía un consenso en la literatura sobre las fases que intervienen en un ciclo de modelización, por lo que coexisten diversos modelos (Figura 2):

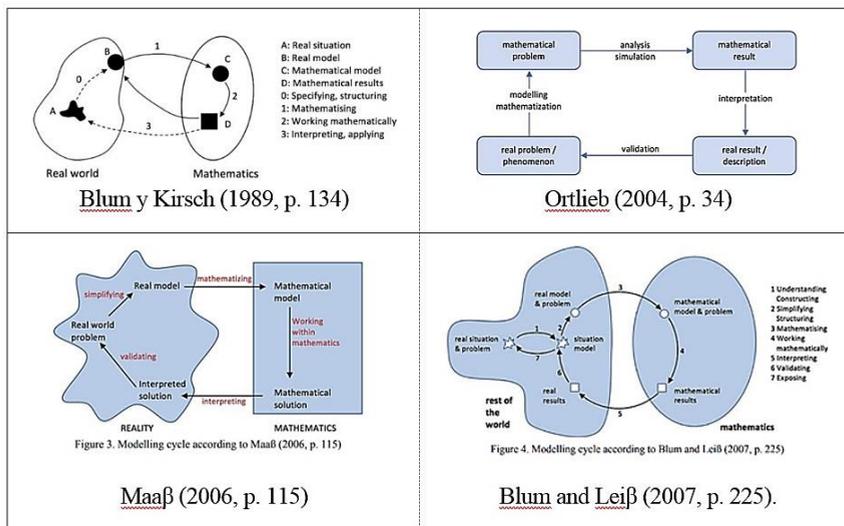


Figura 2. Distintos ciclos de modelización matemática. Fuente: Greefrath (2019)

Para implementar y analizar actividades de modelización matemática temprana en Educación Infantil y ayudar a los niños a crear sus primeros modelos, en nuestros estudios (Alsina y Salgado, 2021a, 2021b; Alsina et al., 2021b; Toalongo-Guamba et al., 2021) se ha considerado el ciclo de modelización de Blum y Leiß (2007), principalmente por dos motivos:

1. Los niños pueden partir de un punto del ciclo sin necesidad de seguir un orden establecido. Este ir y venir es lo que les permite perfeccionar progresivamente el modelo buscado.
2. En la fase final del ciclo (*Exposing*) los niños comunican el modelo con sus compañeros, pueden recoger las observaciones pertinentes y realizar los ajustes necesarios con el objetivo de mejorar/afinar progresivamente el modelo. Esta es una característica especialmente relevante en la Educación Infantil, donde los procesos de interacción, negociación, diálogo están muy presentes para la co-construcción y reconstrucción del conocimiento matemático.

Adicionalmente, para analizar el proceso de resolución de una actividad de modelización se ha partido de una rúbrica previamente diseñada y validada, denominada *Rubric for the Evaluation of Mathematical Modeling Processes* (REMMP, por su acrónimo en inglés).

En la Figura 3 se muestran los indicadores específicos para la Educación Infantil:

Componentes	Indicadores de Educación Infantil (3-6 años)
1. Comprensión	1.1 Relaciona el contenido de la situación problemática con sus conocimientos previos.
	1.2 Plantea preguntas referentes a la situación problemática.
	1.3 Enuncia el tipo de solución que generaría la situación problemática, por ejemplo: un patrón, un número, un gráfico, etc.
	1.4 Representa a través de dibujos las características principales de la situación problemática.
2. Estructuración	2.1 Identifica los principales elementos de la situación problemática.
	2.2 Propone ideas y/o supuestos que contribuyen a la simplificación de la situación problemática.
3. Matematización	3.1 Sustituye los elementos reales por objetos matemáticos.
	3.2 Explica la utilización de objetos matemáticos.
4.Trabajo matemático	4.1 Emplea diversas estrategias acordes a su edad que permitan proponer soluciones a la situación problemática.
	4.2 Utiliza objetos matemáticos acordes a su edad para solucionar la situación problemática.
	4.3 Obtiene un modelo matemático inicial como consecuencia del trabajo previo.
5. Interpretación	5.1 Compara la solución con la situación problemática inicial.
	5.2 Argumenta la validez de los resultados obtenidos.
6. Validación	6.1 Justifica el modelo propuesto mediante argumentos válidos.
	6.2 Valora si el modelo obtenido proporciona una solución parcial o total a la situación problemática inicial.
7.Exposición/ presentación	7.1 Explica el porqué de las decisiones tomadas a lo largo de cada una de las fases del proceso.
	7.2 Explica el modelo obtenido aplicado en la situación del contexto real, sus alcances y limitaciones mediante un lenguaje acorde a su edad.
	7.3 Utiliza diferentes tipos de ejemplos, representaciones, esquemas, dibujos, gráficas, tablas de valores, lenguaje simbólico, etc.
	7.4 En caso de uso de tecnología en alguna o varias fases del proceso expone claramente en qué momento, cómo y para qué la utilizó.

	7.5 Escucha observaciones y/o sugerencias planteadas por compañeros y/o profesor.
	7.6 Responde a las observaciones y/o sugerencias de compañeros y profesor utilizando un lenguaje acorde a su edad.

Figura 3. Indicadores del instrumento REMMP para la Educación Infantil.

Fuente: Toalongo-Guamba et al. (2020).

Por un lado, como puede apreciarse en la Figura 3, esta rúbrica se inspira en las fases del ciclo de modelización de Blum y Leiß (2007); y, por otro lado, tiene en cuenta los planteamientos de Andrade (2000) acerca de las rúbricas instruccionales, por lo que sirve tanto para describir cómo se desarrolla la modelización matemática como para analizar y evaluar los procesos de modelización matemática.

Tomando como base estos antecedentes, en los estudios publicados hasta el momento se han obtenido algunas primeras evidencias de las habilidades de los niños al implementar actividades de modelización en el aula (Alsina y Salgado, 2021a, 2021b; Alsina et al., 2021b; Toalongo-Guamba et al., 2021). Así, por ejemplo, se ha puesto de manifiesto que las fases del ciclo de modelización más frecuentes en niños de 3 años son las de Comprensión e Interpretación. Ello parece indicar que, en este primer nivel y con el apoyo y la guía de la maestra, los niños empiezan a desarrollar habilidades como, por ejemplo, vincular el contenido del problema con sus conocimientos previos (comprensión) o comparar la solución con el problema inicial de manera que, con base en el trabajo previo, son capaces de responder a lo que pregunta la maestra.

En menor medida, también se han encontrado otras evidencias, como simplificar el problema (Estructuración), o bien empezar a utilizar objetos matemáticos para la representación (Matematización). En cambio, no se han encontrado evidencias sobre otras fases como el Trabajo Matemático o bien la Validación y la Exposición/Presentación. Estos datos son relevantes, en el sentido de que insinúan que los niños de 3 años todavía no tienen la suficiente madurez para utilizar de forma sistemática el trabajo matemático para proponer soluciones del problema y obtener un modelo matemático inicial.

En niños de 5 años se ha identificado que las fases del ciclo modelización correspondientes a la Comprensión y la Estructuración están ya más consolidadas, de manera que son capaces de utilizar de forma sistemática sus conocimientos previos, buscar alternativas, etc. Además,

se ha observado también una presencia mucho mayor de habilidades asociadas a la Matematización y el Trabajo Matemático, de manera que los niños de esta edad son ya capaces de substituir los elementos del contexto real por objetos matemáticos, explican su uso y los empiezan a usar para proponer soluciones del problema y obtener un modelo matemático inicial. Además, a diferencia de los niños de menos edad, a finales de la Educación Infantil aparecen habilidades asociadas a las fases de Interpretación, Validación y Presentación/exposición, de manera que empiezan a comparar la solución con el problema inicial, argumentando los resultados obtenidos; justifican el modelo propuesto, identificando si es siempre válido o si requiere cambios; y comunican las decisiones tomadas a lo largo del proceso de modelización y el modelo concreto obtenido, utilizando diferentes lenguajes y/o representaciones (dibujos, esquemas, tablas de valores, etc.). Además, escuchan las observaciones y/o sugerencias de sus compañeros y/o de la maestra para afinar el modelo entre todos.

Otro dato relevante que han aportado estos estudios preliminares es el tipo de modelos que pueden generar los niños de Educación Infantil. En concreto, en Alsina et al. (2021b) se concluye que estos primeros modelos son todavía poco generalizables ya que el pensamiento de los niños es eminentemente concreto y, por lo tanto, los modelos que son capaces de crear también lo son. Por esta razón, los denominan modelos concretos.

2. PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE UNA ACTIVIDAD DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA TEMPRANA EN EDUCACIÓN INFANTIL: “CONSTRUIMOS CASAS CON PIEZAS DE MADERA”

En primer lugar, se fundamenta y contextualiza la actividad “construimos casas con piezas de madera” implementada en un grupo de 20 niños de 3 años de edad; en segundo lugar, se describe la actividad, que se ha llevado a cabo en tres sesiones diferentes; y, finalmente, se analiza la actividad usando los indicadores del instrumento REMMP para la Educación Infantil (Toalongo-Guamba et al., 2020), para responder al objetivo principal de este estudio: determinar con mayor precisión cómo razonan y qué son capaces de hacer los niños de 3 años cuando se plantea una actividad de modelización.

En relación a los principios éticos, la escuela en la que se implementa la actividad tiene un protocolo de actuación sistematizado: antes de iniciar

la implementación, se informa por escrito a las familias del procedimiento y de la necesidad de registro fotográfico y audiovisual de las sesiones, así como de la confidencialidad de los datos obtenidos, y se obtiene su consentimiento informado. Adicionalmente, a lo largo de toda la intervención se respeta el deseo de los niños de participar o no en las propuestas y de ser grabados y fotografiados.

2. 1. Fundamentación y contextualización de la actividad

La actividad se lleva a cabo en el Colegio Público de “Sigueiro” (A Coruña, Galicia) con un grupo de 20 niños de 3 años (12 niños y 8 niñas) que llevan escolarizados dos meses y medio, y dos de ellos aún tienen 2 años.

La maestra-tutora se replantea diariamente cómo hacer que su alumnado observe, piense y construya el conocimiento. Desde este punto de vista, durante los primeros meses de escolarización, el principal objetivo es la adaptación y la adquisición de normas y rutinas, y entre ellas está la Asamblea, la observación y la escucha a los demás.

Considerando que, entre los objetivos del bloque de Conocimiento del Entorno, se encuentra construir la serie numérica a partir de la unidad, la maestra introduce un material compuesto por troncos y rodajas de “madera” para trabajar este concepto. Este material forma parte del rincón de construcción: el alumnado hace torres altas, muy altas, y su único fin es ver cuando se caen. En alguna ocasión algún niño se hace daño y, por esta razón, la maestra propone construir casas en lugar de torres.

Durante una semana, todo el alumnado pasa por el rincón y se observan diferencias a la hora de construir: hay quién realiza chalets, casas pequeñas... en función de la maduración, de su ambición, etc. Debido a su edad, juegan en paralelo, cada uno construye su casa, pero en ningún equipo surge la idea de construir una casa entre varios niños. Es en este punto donde la maestra detecta la posibilidad de plantear un reto, una actividad de modelización: cada uno puede construir, pero en equipo y con una finalidad.

Para planificar la actividad de modelización, la maestra tiene en cuenta diversas cuestiones que son imprescindibles para llevar a cabo actividades de modelización en el aula de infantil (Alsina y Salgado, en prensa):

1. *El punto de motivación*: selecciona el cuento “Los tres cerditos” y los niños empiezan a situarse en el problema: observan los elementos que

- debe tener una casa para diferenciarlo de una torre, que era la construcción “preferida” del alumnado. Después de la lectura del cuento, los elementos significativos de una casa surgen a partir del elemento “lobo”: tejado, puerta y paredes para que no entre el lobo.
2. *La pregunta reto enmarcada en un problema:* al igual que los cerditos, la maestra plantea que tienen que construir casas, el mayor número de casas con las piezas de madera, ya que por cada casa nos van a pagar una moneda: ¿cuál será la mejor forma de conseguir más dinero?
 3. *Las fases de un ciclo de modelización:* para guiar a los niños en las fases de comprensión, estructuración, matematización, trabajo matemático, interpretación, validación y exposición y, de esta forma, ayudarlos a crear los primeros modelos concretos. Para acompañarlos durante este proceso de modelización, la maestra considera los siguientes aspectos:
 - Los niños se organizan en equipos: se establecen cuatro equipos, los cuatro equipos que hay en clase previamente, con los que juegan y trabajan en rincones, viendo si de este modo impulsando una actividad cooperativa trabajan en equipo y toman decisiones de grupo.
 - El número de piezas: cada equipo dispone de dieciséis troncos y cinco rodajas de madera.
 - El mayor número de casas que se pueden construir: en total, cuatro casas. De este modo, los números que movilizan los niños son los cinco primeros números dígitos.
 - Las monedas: se usan monedas de 1 euro para realizar la correspondencia “una casa – una moneda” y, de este modo, reforzar con el 1 que está inscrito en la moneda.
 4. *La evaluación:* para conocer tanto el nivel de desarrollo de los niños como para promover la generalización. En asamblea, a partir de construcciones aleatorias, la maestra pregunta si es casa o no y porqué; adicionalmente, la maestra planifica una actividad *a posteriori* en gran grupo que consiste en construir la mejor casa para que los niños sigan consolidando los conocimientos previos y ella pueda observar el nivel de adquisición.

2. 2. Descripción de la actividad

Como se ha indicado, la actividad se desarrolla durante tres días con un grupo de 20 niños de 3 años. Las sesiones tienen una duración de unos 70-90 minutos:

Día 1. Motivación inicial, presentación del reto y primeras construcciones por equipos.

Se inicia la asamblea presentando el cuento “Los tres cerditos” apoyándose en unas casas de juguete y unos muñecos. Al finalizar el cuento se establece un diálogo a partir de preguntas que la maestra formula con el fin de poner el foco en las partes importantes de las casas que aparecen en el cuento: por ejemplo, ¿qué construyeron los cerditos?; ¿cómo eran las casas?, ¿a dónde llamaba el lobo?, ¿por dónde pretendía entrar el lobo en la casa de ladrillos?, etc. A continuación, en gran grupo, se les presenta la situación problemática:

“Nos han encargado la construcción de casas con piezas de madera. Por cada casa nos pagarán una moneda: ¿cuál será la mejor forma?, ¿con la que se conseguirá más dinero?”

Los niños comienzan a hablar entre ellos:

Maestra.- Entonces, tenéis que construir casas en equipo y buscar la manera de conseguir el mayor número, muchas. Pero recordad, tienen que ser casas, sino, no nos pagan. Porque si hacéis una casa... ¿cuánto os pagarán?

Alison.- Una moneda.

Maestra.- Muy bien, y si hacéis dos...

Emma P. Dos.

Maestra.. Y si hicierais cinco casas.

Lucas.- Cinco euros.

Maestra.- Muy bien, Lucas, ¡Cuánto dinero! Pero tienen que ser casas, ¿qué tienen que tener para ser “casa”?

Alison.- Tejado.

Maestra.- Claro para taparse, para que no se moje.

Lucas.- Y para que no entre el lobo.

Maestra.- Muy bien, ¿y qué más?

Thiago.- Paredes.

Maestra.- Paredes también es muy importante. ¿Cuántas paredes?, ¿dos? (y coge dos troncos)

Alison.- No.

Maestra.- ¿Cuántos?

Thiago.- Uno y uno, uno y uno.

Maestra.- ¿Y cuántos son?

Luna.- uno, dos, tres, cuatro. Cuatro.

Maestra.- Pues claro, uno para cada esquina, así no entra el lobo.

Thiago.- También ventanas.

Maestra.- Muy bien... Una casa tiene paredes, tejado, ventanas...

Pablo.- Y puerta.

Maestra.- ¡Cuántas cosas! Pues tenéis que tener en cuenta todas las partes para construir las casas, porque tenemos que ver cuál es la mejor opción, qué equipo va a ganar más dinero, recordar por cada casa, que tenga todo tejado, paredes y que pueda entrar, se os dará un euro. ¿Qué equipo ganará?, ¿Haréis el mismo número de casas?

Alison.- Yo más. Yo voy a hacer muchas.

Pablo.- Y yo.

Mestra.- Pues comenzamos, os voy a dar a cada equipo vuestra caja... todos tenéis el mismo número de piezas... y a ver qué ocurre... a ver que buenos constructores sois!!!

Como se puede observar en el anterior diálogo, la maestra va ofreciendo algunas explicaciones y/o planteando algunas preguntas que se focalizan en el problema planteado con el propósito de ir situando y ayudando al alumnado a comprender la situación. A continuación, se divide el grupo aula en cuatro equipos (azul, amarillo, verde y rojo). Cada equipo tiene una caja con el mismo número de piezas y de formas: concretamente dieciséis troncos alargados de forma aproximadamente cilíndrica y cinco rodajas de madera de forma aproximadamente circular con 3cm de grosor (Figura 4).



Figura 4. Material de cada equipo para la construcción de las casas. Fuente: elaboración propia.

Después de recordar que el equipo que haga más casas tendrá más monedas, cada equipo empieza a construir. Durante el proceso de construcción, la maestra interviene haciendo algunas preguntas sobre el tamaño de las casas o los elementos que contienen y, al finalizar, pregunta a cada equipo cuántas casas han construido y cuántas monedas han ganado:

1. Equipo Azul

Construyen tres casas de distintos tamaños con los troncos (pequeña, mediana y grande), y a la casa de mayor tamaño la denominan “chalet” (Figura 5). Al finalizar, algunos niños del equipo presentan todavía alguna dificultad para hacer la correspondencia entre las casas construidas y el número de monedas:

Maestra.- ¿Qué hacéis?

Alison.- Muchas casas.

Maestra.- Pero tenéis que hacerlo en equipo, no os olvidéis, tenéis que ponerlos de acuerdo.

(.../...)

Maestra.- Tenéis que hacer muchas casas si queréis ganar mucho dinero.

Alison.- Vale, esto es un chalet.

Maestra.- Muy bien.

Alison.- Es muy grande.

(.../...)

Maestra.- ¿Qué hizo el equipo azul?

Alison.- Tres casas.

Maestra.- Saínza, ¿las cuentas?

Saínza.- Uno, y uno y dos.

Rodrigo.- Uno, dos, cuatro.

Alison.- Uno, dos y tres, son tres.

Maestra.- Entonces, ¿Cuántas monedas os tienen que dar?, ¿cuántas monedas ganasteis?

Alison.- tres

Mateo G.- (Señala tres dedos)

Maestro.- Rodrigo coges las monedas.

Rodrigo.- (Coge dos monedas)

Maestra.- ¿Cuántas cogiste?

Rodrigo.- Una, dos.

Maestra.- Entonces, ¿cuántas faltan?, porque construisteis tres casas.

Rodrigo.- Dos.

Maestra.- Cogiste dos, pero construisteis tres. Entonces, ¿Cuántas monedas tienes que coger para tener tres? Mira uno, dos..... y
Rodrigo.- Otra
Maestra.- Cógela, y coloca cada moneda al lado de una casa. ¡Tres casas!
Alison.- Sí, una grande, una mediana y una pequeña.
Maestra. ¿cómo?
Alison.- Una casa es grande, otra que hicimos mediana y otra pequeña.



Figura 5. Construcciones del equipo azul. Fuente: elaboración propia

2. Equipo Rojo

Construyen cuatro casas de tamaño pequeño (Figura 6), y no presentan dificultades para contar las monedas que han ganado:

Maestra.- ¡Qué bonito esto que hicisteis!, ¿Pero es una casa?
Candela.- le falta tejado.
Maestra.- ¿Y dónde?
Candela.- Aquí (señalando), aquí arriba.
Maestra.- Pues venga...
Candela.- (Coge una pieza plana y la pone encima)
Maestra.- ¡Qué bien!, ¡una casa!, ¿y ahí cabe un cerdito dentro?
Candela.- Sí.
Maestra.- Pues seguid, muy bien.
(.../...)
Maestra.- Esa casa... ¿cómo es?
Candela.- Pequeña, son las dos pequeñas.
(.../...)
Maestra.- ¿Cuántas casas hicisteis?
Candela.- Una, dos, tres y cuatro.
Maestra.- ¿cuántas?

Candela.- Cuatro.
 Maestra.- Pero, ¿son todas casas?
 Candela.- Si tienen tejado y paredes.
 Maestra.- ¡Qué bien!
 Maestra.- ¿Y cómo son?
 Marco.- Así. (Imita con las manos el tamaño)
 Maestra.- ¿cómo?
 Candela.- Pequeñas.
 Maestra.- Entonces, ¿cuántas monedas?
 Lucas.- Cuatro (las cuenta usando el conteo a partir de la secuencia numérica).
 Maestra.- ¿Las cogéis?
 Lucas.- Vale.



Figura 6. Construcciones del equipo rojo. Fuente: elaboración propia

3. Equipo Verde

Construyen tres casas, dos de tamaño grande y una pequeña (Figura 7). Algunos niños del equipo presentan dificultades para hacer la correspondencia entre el número de casas y las monedas, pero con la ayuda de la maestra acaban resolviéndolo.

Maestra.- ¿Cuántas casas construisteis?
 Elsa.- Una, una, dos, cuatro...
 Maestra.- Emma D. dime tú...
 Emma D.- Una, y una...
 Maestra.- Pero, ¿cuántas?, contadlas...
 Dámaris.- Señala las tres.
 Emma D.- Tres.
 Maestra.- Ah.... Tres... ¿Y cómo son?
 Emma D.- Grandes y pequeña.

Maestra.- Entonces, ¿cuánto ganaréis?, ¿cuántas monedas tenéis que coger?
Elsa.- Muchas.
Dámaris.- Una y dos.
Maestra.- ¿Dos? Recordáis cuántas casas tenéis.
Emma D.- Tres.
Maestra.- Entonces. Si por cada casa os dan una moneda, tres casas...
¿cuántas monedas?
Emma D.- (Levanta tres dedos, pero no dice “tres”).



Figura 7. Construcciones del equipo verde. Fuente: elaboración propia

4. Equipo amarillo

Construyen tres casas pequeñas, pero no utilizan todos los troncos (Figura 8). Cuando la maestra pregunta cuántas monedas han ganado, no tienen dificultades en responder:

Maestra.- ¿Cuántas hicisteis?
Luna.- Una, dos y tres.
Maestra.- ¿Cuántas?
Luna.- Tres.
Maestra.- Pero, ¿esas piezas?
Thiago.- Esas no...
Maestra.- ¿No?
Thiago.- Nos sobraron...
Pablo.- no hicimos casa.
Maestra.- O sea hicisteis tres, y os sobró madera. Y vuestras casas, ¿son casas?, ¿tienen todos los elementos?
Pablo.- Si y caben los cerditos.
Maestra.- Que bien.... Entonces, ¿cuántas monedas os darán por vuestras casas?
Luna.- Tres



Figura 8. Construcciones del equipo amarillo. Fuente: elaboración propia

Seguidamente, en asamblea, los distintos equipos comparten sus producciones:

Maestra.- Vamos entonces a recontar... Tres equipos hicieron tres casas y uno, el rojo, construyó cuatro casas. ¿Quién hizo más casas?

Alison.- El rojo.

Candela.- Nosotros.

Maestra.- Entonces un equipo ganó más monedas... Y yo me pregunto, para ganar más monedas ¿cómo construyó las casas?, ¿cómo son las casas? Para construir mayor número...

Alison.- pequeñas.

Lucas.- Todas.

Maestra.- Si las hacemos todas pequeñas, podemos construir más casas.

Alison.- Y ninguna grande.

Maestra. Claro, porque si no, no se pueden construir más.

Alison.- Solo tres.

Maestra.- Claro si son pequeñas, nos sobra madera para hacer más.

Pero fijaros, el equipo amarillo las hizo pequeñas, pero no ganó cuatro monedas, ¿por qué?

Thiago.- Porque sobró.

Maestra.- Claro hay que utilizarlos todos, igual con esos podáis construir otra casa.

Luna.- Y ya tenemos cuatro.

Candela.- Pero ganamos nosotros.

Maestra. Claro, porque ellos solo hicieron tres.

Como se puede observar en el diálogo anterior, a partir de las preguntas que va planteando la maestra y los andamios que ofrece, los niños crean un modelo concreto inicial que ofrece una primera solución al

reto planteado: se dan cuenta de que, *para ganar más monedas, todas las casas tienen que ser pequeñas*. Este modelo, sin embargo, todavía no está suficientemente afinado ya que algunos grupos, como el amarillo, ha construido todas las casas pequeñas y, sin embargo, no ha ganado más monedas. A raíz de esto, la maestra plantea nuevas preguntas para que tomen consciencia de que es necesario utilizar todos los troncos y rodajas para conseguir más monedas.

Para finalizar la primera sesión, la maestra inicia un diálogo para evaluar qué han aprendido los niños acerca de las partes de una casa y, a la vez, promover la generalización. Para ello, en asamblea, parte de una construcción aleatoria y pregunta a los niños si es una casa o no para que respondan sí o no y lo argumenten. Esto se planifica de este modo para que el alumnado escuche e imite acciones y argumentaciones de compañeros, aprendiendo a observar, a justificar... aprendiendo a través de los iguales:

Maestra.- Ya sabemos que “ser casa” significa tener tejado, tener paredes...

Thiago.- Y puerta y ventanas.

Maestra.- Entonces, os voy a colocar aquí... (4 troncos), ¿es casa? (primera imagen de la Figura 9)

Thiago.- No,

Maestra.- ¿Por qué?

Thiago.- No tiene tejado, le falta tejado.

Maestra.- Y si construyo así... ¿es casa?

Candela.- No tiene paredes. Todas las paredes

Lucas.- El lobo puede entrar por detrás.

Marco.- Y no tiene tejado..

Maestra.- Entonces, no es casa, muy bien.

Maestra.- ¿Y esto? (segunda imagen de la Figura 9)

Alison.- Tiene dos tejados, no es una casa.

Candela.- Tampoco tiene paredes.

Pablo.- Faltan...

Thiago.- Y ventanas.

Maestra.- Entonces no es una casa.



Figura 9. Comprobando los conocimientos acerca de los elementos de una casa.
Fuente: elaboración propia.

A partir de esta evaluación, la maestra se da cuenta de que algunos niños todavía no tienen claros todos los elementos que debe tener una construcción con troncos y rodajas de madera para ser considerada “casa”, por lo que incide de nuevo en ello en la siguiente sesión.

Día 2. Consolidación de aprendizajes sobre las partes de una casa.

La maestra inicia un diálogo con los niños con el propósito de ir consolidando los aprendizajes realizados en la sesión anterior, con el foco puesto también en los conocimientos numéricos que los niños de 3 años pueden movilizar: reconocimiento de las primeras cantidades discretas de elementos, conteo, etc. Para lograr estos propósitos, en el contexto de la asamblea plantea diversas preguntas previamente pensadas al gran grupo:

Maestra.- Recordáis lo que hicimos ayer?

Alison.- Casas.

Maestra.- Sí, pero ¿cómo sabemos que es una casa?, ¿qué tienen las casas?

Candela.- Puerta.

Lucas.- Tejado.

Thiago.- Y paredes, muchas paredes.

Alison.- Así no entra el lobo.

Maestra.- Voy a hacer como el cerdito y voy a construir una casa (coloca cuatro troncos en vertical).

Alison.- No es casa. Falta el tejado.

Maestra.- ¿Lo colocas?

Alison.- Se levanta y pone una pieza plana circular encima.

Maestra.- Y ahora, ¿es casa?

Rodrigo.- Falta la puerta.

Alison.- Está ahí (señalando el espacio entre dos troncos).
Rodrigo.- Así no hay puerta, así entra el lobo.
Maestra.- Entonces, ¿cómo Rodrigo?
Rodrigo.- (Se levanta y coloca una pieza plana en vertical entre los dos troncos a modo de puerta) Así, así abre y cierra.
Maestra.- ¡Qué buena idea!
Thiago.- Y las paredes tienen huecos, así entra el lobo.
Maestra.- - ¿Y cómo harías?
Thiago.- (Se levanta y coloca más troncos entre los cuatro que delimitaba la estructura). Así está todo cerrado y no entra nadie.
Maestra.- Muy buena idea, tienes razón.
Alison.- Gastamos muchos troncos.
Maestra.- Así que aquí hay muchos troncos... ¿cuántos hay?
Lucas.- uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, cinco seis, cinco, ocho, diez.
Maestra.- ¿Estáis de acuerdo?
Rodrigo.- Sí, son muchos.
Alison.- Pero es una casa muy bonita.

Como se puede apreciar en el diálogo anterior, los niños van interiorizando cada vez con mayor precisión los elementos imprescindibles para que una construcción con los troncos y las rodajas de madera pueda ser considerada una casa.

Día 3. Construcción y representación de la mejor casa.

Es tal la motivación por los troncos y las rodajas de madera que, en el rincón de las construcciones de madera, los niños siguen construyendo casas. En sus diálogos, hablan de la más bonita, la más grande, esta es cerrada, la más alta... etc., razón por la que la maestra planifica una nueva actividad en gran grupo con el propósito de que los niños sigan aprendiendo a observar, a argumentar y a justificar: la construcción y posterior representación de la mejor casa.

La maestra hace una construcción para provocar que los niños contrasten sus conocimientos y, con base en ello, aporten argumentos (Figura 10):

Maestra.- Ahora que ya sabemos cómo son las casas, ¿qué os parece si construimos la mejor casa?, ¿la casa más bonita?
Niños.- Siiiiii
Maestra.- ¿Lo hacemos entre todos?

Maestra.- Voy a comenzar yo y voy a poner así (dos troncos en vertical con una rodaja plana encima de uno). Ya está, ya tenemos la mejor casa.



Figura 10. Contrastando conocimientos y aportando argumentos. Fuente: elaboración propia.

A partir de la construcción de la maestra, los niños aportan diversos argumentos sobre si es o no una casa y porqué:

Niños.- No.

Maestra.- ¿Por qué no?

Rodrigo.- No es casa.

Maestra.- ¿Por qué?

Martíño.- Porque le falta la puerta.

Candela.- Y paredes.

Marco.- Sino, viene el lobo.

Rodrigo.- Una puerta para que no entre el lobo.

Thiago.- Más paredes.

Maestra.- ¿Alguien tiene más ideas?

Candela.- Un techo.

Maestra.- Pues genial, ¿le ponemos más paredes entonces?, ¿Quién quiere empezar?

Thiago.- (Sale y va colocando más troncos, pero cuando lleva seis no le caben y decide ponerlos sobre el suelo).

Maestra.- ¿Ya está?, ¿Dime Martíño?

Martíño.- No.

Maestra.- ¿Por qué?

Martíño.- Porque le falta la puerta ahí y paredes.

Maestra.- Ven a ayudarle.

La maestra, además de plantear preguntas que inciden en diversos atributos mensurables de los troncos como el tamaño, va guiando la construcción (Figura 11):

Maestra.- ¿Y el tejado?, ¿cómo hacemos?

Candela.- Encima le ponemos.

Maestra.- Ven y colócalo (Candela se acerca y junta los troncos y comienza a poner rodajas planas encima de los troncos en vertical).

Maestra.- Yo no veo el tejado.

Alison.- Hay que poner dos tejados.

Rodrigo.- Y la puerta.

Alison.- Dos tejados para que no llueva.



Figura 11. Construyendo las paredes de la mejor casa. Foto: elaboración propia

Progresivamente, van colocando todos los elementos para construir la mejor casa (Figura 12).

Maestra.- ¡Qué casa más bonita! Tiene tejado y paredes.

Rodrigo.- Le falta una puerta...

Maestra.- ¿La vienes a poner?

Maestra.- Me encanta

Candela.- Es muy bonita.

Emma P.- La más bonita.

Lucas.- Muy, muy, muyyyyyy

Maestra.- Sí es verdad.

Rodrigo.- La mejor.

Thiago.- La más mejor.

Martíño.- No va entrar el lobo.

Alison.- Nadie, ni el lobo, ni nadie.

Maestra.- Pues yo creo que como después vamos a recoger los troncos y la vamos a deshacer, ¿qué os parece si la dibujamos?, registrando como es, si es grande o pequeña, los troncos que tiene, sus paredes, el tejado, la puerta... vamos todo lo que tiene, y así después cualquier otro día la podemos repetir...



Figura 12. Construcción de la mejor casa, con paredes, tejado y puerta. Fuente: elaboración propia.

Seguidamente, a partir de la idea de la maestra de representar la casa, cada niño la dibuja de forma individual. Para ello, se colocan delante de la casa y van registrando los elementos que para ellos son más característicos. Además, cuando finalizan su dibujo explican a la maestra qué es y dónde está cada elemento (Figura 13). Como puede apreciarse, las representaciones externas de los niños se caracterizan por ser imprecisas: si bien la mayoría distinguen oralmente todos los elementos importantes de una casa (paredes, ventanas y puerta), en los dibujos hacen representaciones inexactas, principalmente por tanteo, usando uno o más elementos perceptivos como el tamaño, la longitud, etc.



Figura 13. Distintas representaciones de la mejor casa. Fuente: elaboración propia.

2.3. Análisis de la actividad de modelización matemática temprana

Con el propósito de dar respuesta a nuestro objetivo, se han utilizado los indicadores del instrumento REMMP para la Educación Infantil para tratar de comprender mejor cómo razonan y qué hacen los niños de 3 años al enfrentarse a una actividad de modelización. Para realizar el análisis, se ha seguido el siguiente proceso: 1) la segunda autora del estudio, que a su vez es la maestra que ha llevado a cabo la actividad, la ha registrado en vídeo y posteriormente la ha transcrito; 2) los dos autores del estudio han identificado por separado episodios en los que se evidencian los distintos componentes de la rúbrica, que coinciden a su vez con las fases del ciclo de modelización de Blum y Leiß (2007). En este punto, teniendo en cuenta

que ambos autores están familiarizados con los indicadores de los diversos componentes del instrumento utilizado, han ido señalando mediante códigos los fragmentos de la transcripción en los que han detectado alguno de los indicadores (por ejemplo, “C/1.1.a” significa que el episodio forma parte de la fase de Comprensión y, más concretamente, se vincula con el indicador 1.1.a de este componente); 3) finalmente, los episodios identificados han sido contrastados por ambos autores para asegurar que realmente sirven de evidencia de los distintos indicadores de cada componente de la rúbrica, discutiendo y llegando a acuerdos sobre los aspectos no coincidentes (en la mayoría de los casos, se han desechado las evidencias en las que no había acuerdo entre ambos autores, puesto que se ha considerado que quizás no eran los mejores ejemplos de lo que se pretende mostrar); adicionalmente, cuando se han identificado diversas evidencias de un determinado indicador, se ha seleccionado la más representativa para evitar repeticiones.

A continuación, se presentan de forma lineal los datos obtenidos para cada fase del ciclo, aun teniendo en cuenta que en el transcurso de la actividad desarrollada hay idas y venidas entre las distintas fases:

1. Comprensión

En la Tabla 1 se muestra que los niños de 3 años empiezan a relacionar el contenido de la situación problemática con sus conocimientos previos (indicador 1.1.a.). Asimismo, algunos niños enuncian el tipo de solución que generaría la situación problemática, por ejemplo: un patrón, un número, un gráfico, etc. (indicador 1.3.a)

Tabla 1. Fase de comprensión

1.1.a	<p>Maestra.- ...Pero tienen que ser casas, ¿qué tienen que tener para ser casa”?</p> <p>Alison.- Tejado.</p> <p>Maestra.- Claro para taparse, para que no se moje.</p> <p>Lucas.- Y para que no entre el lobo.</p> <p>Maestra.- Muy bien, ¿y qué más?</p> <p>Thiago.- Paredes.</p> <p>Maestra.- Paredes también es muy importante. ¿Cuántas paredes?, ¿dos? (y coge dos troncos)</p> <p>Alison.- No.</p> <p>Maestra.- ¿Cuántos?</p> <p>Thiago.- Uno y uno, uno y uno.</p> <p>Maestra.- ¿Y cuántos son?</p> <p>Luna.- uno, dos, tres, cuatro. Cuatro.</p> <p>Maestra.- Pues claro, uno para cada esquina, así no entra el lobo.</p> <p>Thiago.- También ventanas.</p> <p>Maestra.- Muy bien,... Una casa tiene paredes, tejado, ventanas...</p> <p>Pablo.- Y puerta.</p> <p>Maestra.- ¡Cuántas cosas! Pues tenéis que tener en cuenta todas las partes para construir las casas, porque tenemos que ver cuál es la mejor opción, que equipo va a ganar más dinero, recordar por cada casa, que tenga todo tejado, paredes y que pueda entrar, se os dará un euro. ¿Qué equipo ganará?, ¿Haréis el mismo número de casas?</p>
1.3.a	<p>Alison.- Yo más. Yo voy hacer muchas.</p> <p>Pablo.- Y yo.</p>

Como se puede apreciar en la tabla anterior, a partir del planteamiento del reto, los niños comparten sus conocimientos previos acerca de los elementos de una casa y aportan algunas soluciones, pero todavía no plantean preguntas sobre la situación problemática (indicador 1.2.a) ni hacen dibujos para representar las características principales (indicador 1.4.a).

2. Estructuración

En la Tabla 2 se observa que algunos niños identifican los principales elementos de la situación problemática (indicador 2.1.a) y son capaces, en consecuencia, de identificar los elementos que faltan en la construcción (p. ej., el tejado), pero todavía no se observan habilidades para simplificar la situación planteada (indicador 2.2.a).

Tabla 2. Fase de estructuración

2.2.a	Maestra.- ¡Qué bonito esto que hicisteis!, ¿Pero es una casa? Candela.- le falta tejado. Maestra.- ¿Y dónde? Candela.- Aquí (señalando), aquí arriba.
--------------	--

3. *Matematización*

Se han identificado algunas evidencias de esta fase, sobre todo referentes a la substitución de elementos reales por objetos matemáticos (Indicador 3.1.a), como por ejemplo atributos mensurables referentes al tamaño o bien cantidades discretas de elementos, pero todavía no explican suficientemente la utilización de estos objetos (Indicador 3.1.b).

Tabla 3. Fase de matematización

3.1.a	Maestra.- Esa casa... ¿cómo es? Candela.- Pequeña, son las dos pequeñas. Maestra.- Pero, ¿cuántas?, contadlas... Dámaris.- Señala las tres. Emma D.- Tres. Maestra.- Ah.... Tres... ¿Y cómo son? Emma D.- Grandes y pequeña. Maestra.- Cogiste dos, pero construisteis tres. Entonces, ¿Cuántas monedas tienes que coger para tener tres? Mira uno, dos..... y Rodrigo.- Otra Maestra.- Cógela, y coloca cada moneda al lado de una casa. ¡Tres casas!
--------------	---

4. *Trabajo matemático*

Tal como se muestra en la Tabla 4, los niños de 3 años que han llevado a cabo la actividad empiezan a usar estrategias acordes a su edad para proponer soluciones a la situación problemática (Indicador 4.1.a) y son capaces de proponer un modelo concreto inicial (Indicador 4.3.a).

Tabla 4. Trabajo matemático.

4.1.a	Maestra.- ¿Cuántas casas hicisteis? Candela.- (Cuenta) Una, dos, tres y cuatro. Maestra.- ¿cuántas? Candela.- Cuatro.
--------------	--

4.3.a	Maestra.- ¿Cuántas casas hicisteis? Candela.- Una, dos, tres y cuatro. Maestra.- ¿cuántas? Candela.- Cuatro. Maestra.- Pero, ¿son todas casas? Candela.- Si tienen tejado y paredes. Maestra.- ¡Qué bien! Maestra.- Entonces, ¿cuántas monedas? Lucas.- Cuatro. Maestra.- ¿Y cómo son? Marco.- Así. (Imita con las manos el tamaño) Maestra.- ¿cómo? Candela.- Pequeñas.
-------	--

5. Interpretación

Se han identificado pocas evidencias de esta fase, que se caracteriza por desarrollar habilidades para comparar la solución con la situación problemática inicial (Indicador 5.1.a) y argumentar la validez de los resultados obtenidos (Indicador 5.2.a). En la Tabla 5 se muestran algunos episodios breves en los que se insinúan estos indicadores: se observa, por ejemplo, que un niño (Thiago) interpreta que el hecho de que sobren troncos impide poder ganar más monedas, o bien otro niño (Alison) argumenta su solución: la construcción de tres casas (una grande, una mediana y otra pequeña).

Tabla 5. Interpretación

5.1.a	Pero fijaros, el equipo amarillo las hizo pequeñas, pero. No ganó 4 monedas, ¿por qué? Thiago.- Porque sobró.
5.1.b	Rodrigo.- Tres. Maestra. ¿cómo? Alison.- Una casa es grande, otra que hicimos mediana y otra pequeña.

6. Validación

Durante esta fase, algunos niños han justificado el modelo propuesto mediante argumentos válidos (Indicador 6.1.a) y son capaces de valorar, de acuerdo con los conocimientos que movilizan, si dicho modelo aporta una solución parcial o global al reto planteado (Indicador 6.2.a): en concreto, después de que la maestra pregunte cuántas casas han construido, una niña (Luna) responde “tres” y otro niño (Pablo) aclara que su solución

es válida porque caben los cerditos, sin darle mucha importancia al hecho de que les hayan sobrado piezas.

Tabla 6. Fase de validación

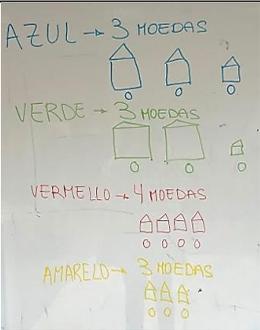
6.1.a/6.1.b	<p>Luna.- Tres. Maestra.- Pero, ¿esas piezas? Thiago.- Esas no... Maestra.- ¿No? Thiago.- Nos sobraron... Pablo.- no hicimos casa. Maestra.- O sea hicisteis tres, y os sobró madera. Y vuestras casas, ¿son casas?, ¿tienen todos los elementos? Pablo.- Si y caben los cerditos.</p>
--------------------	---

7. Exposición/presentación

Durante esta última fase del ciclo de modelización, los equipos describen sus modelos concretos iniciales a partir de la pregunta de la maestra (Indicador 7.2.a) y son capaces de responder a las observaciones y/o sugerencias de compañeros y de la maestra (Indicador 7.6.a), utilizando en ambos casos un lenguaje acorde a su edad. Además, a sugerencia de la maestra, describen oralmente sus soluciones y la maestra las registra en un papel (Indicador 7.3.a). En cambio, no se han identificado evidencias que pongan de manifiesto que los niños de 3 años tengan la habilidad de describir las decisiones tomadas a lo largo del ciclo de modelización (Indicador 7.1.a), usar tecnología (Indicador 7.4.a) o bien escuchar observaciones y/o sugerencias planteadas por compañeros y/o la maestra (Indicador 7.5.a).

Tabla 7. Exposición/presentación

7.2.a	<p>Maestra.- Pero fijaros, el equipo amarillo las hizo pequeñas, pero no ganó 4 monedas, ¿por qué? Thiago.- Porque sobró. Maestra.- Claro hay que utilizarlos todos, igual con esos podáis construir otra casa. Luna.- Y ya tenemos cuatro. Candela.- Pero ganamos nosotros. Maestra. Claro, porque ellos solo hicieron 3.</p>
--------------	---

<p>7.3.a</p>	 <p>(Representación elaborada por la maestra)</p>
<p>7.6.a</p>	<p>Maestra.- Vamos entonces a recontar... Tres equipos hicieron 3 casas y uno, el rojo construyó cuatro casas. ¿Quién hizo más casas? Alison.- El rojo. Candela.- Nosotros. Maestra.- Entonces un equipo ganó más monedas... Y yo me pregunto, para ganar más monedas ¿cómo construyó las casas?, ¿cómo son las casas? Para construir mayor número... Alison.- pequeñas. Lucas.- Todas. Maestra.- Si las hacemos todas pequeñas, podemos construir más casas. Alison.- Y ninguna grande.</p>

En síntesis, los datos de esta nueva investigación han puesto de manifiesto que los niños de 3 años, cuando se enfrentan a una actividad de modelización matemática temprana, se inician en habilidades correspondientes a todas las fases de un ciclo de modelización (Comprensión, Estructuración, Matematización, Trabajo Matemático, Interpretación, Validación y Exposición/Presentación), lo cual les permite definir un primer modelo, de naturaleza concreta. Se quiere remarcar aquí la idea de “inicio” porque, sin duda, se trata de unas primeras habilidades que deberán ir entrenando y consolidando durante toda la etapa de infantil a partir del planteamiento de otras actividades de modelización que, a su vez, van a permitir que emerjan otras habilidades.

3. Consideraciones finales

En este artículo se ha descrito y analizado una actividad de modelización matemática temprana, denominada “construimos casas con piezas de madera”, que han llevado a cabo 20 niños de 3 años, con la finalidad de comprender mejor cómo razonan y qué son capaces de hacer

los niños de esta edad cuando se enfrentan a una actividad de modelización matemática.

Como se ha indicado en la introducción, la modelización matemática es un marco idóneo para implementar un enfoque competencial de las matemáticas, en el que los contenidos se aprenden a través de los procesos y prácticas matemáticas de resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones, representación, etc. (Alsina, 2012; Alsina et al., 2021a; CCSSI, 2010; Ministry of Education Singapore, 2012; NCTM, 2003). Por esta razón, resulta fundamental conocer con precisión cómo se inician las habilidades asociadas a la modelización y cómo se puede promover su desarrollo ya desde la Educación Infantil, en el marco de la modelización matemática temprana (Alsina y Salgado, 2021a, 2021b; Alsina et al., 2021b; Toalongo-Guamba et al., 2021).

Desde este punto de vista, los datos obtenidos en este estudio confirman algunos de los resultados obtenidos en investigaciones anteriores con niños de la misma edad, pero a su vez aclaran otros aspectos que no se habían identificado hasta el momento, por lo que pueden tener un interés a nivel más general e incluso internacional.

Primero, se confirma que los niños de 3 años empiezan a desarrollar habilidades propias de las fases de Comprensión, Estructuración, Matematización e Interpretación. Así, por ejemplo, se ha constatado de nuevo que relacionan el contenido del problema con sus conocimientos previos, lo simplifican e incluso empiezan a utilizar objetos matemáticos (Alsina et al., 2021b). Adicionalmente, los datos obtenidos en este nuevo estudio afinan estos resultados preliminares en el sentido que se han identificado evidencias de algunos indicadores de estos componentes del ciclo de modelización que no se habían detectado anteriormente, como por ejemplo identificar los principales elementos de la situación problemática (indicador 2.1.a).

Segundo, cabe destacar que los datos más novedosos del estudio se han identificado en las últimas fases del ciclo de modelización: mientras que en Alsina et al. (2021b) no se habían encontrado evidencias sobre las demás fases del ciclo de modelización como el Trabajo Matemático o bien la Validación y la Exposición/Presentación, en esta nueva investigación se han identificado pequeños episodios de todas estas fases, lo cual pone en entredicho la afirmación de que los niños de 3 años no son capaces todavía de crear modelos. Aunque de una manera muy elemental, en la actividad desarrollada se ha puesto de manifiesto que los niños concluyen que, *para*

ganar el mayor número de monedas posible, hay que construir casas de tamaño pequeño, lo cual no deja de ser un modelo concreto que permite dar respuesta al reto planteado por la maestra.

Y tercero, aunque este es un dato revelador, es necesario cuestionarse qué aspectos pueden haber influenciado en estos resultados, como por ejemplo las características de la tarea planteada o incluso los conocimientos que moviliza la maestra para implementar actividades de modelización matemática temprana o la propia práctica docente, puesto que algunos de los indicadores de la rúbrica no dependen directamente de la acción espontánea de los niños sino de la planificación y la gestión de la enseñanza, como por ejemplo la decisión de utilizar tecnología, representar las soluciones a través de dibujos, etc.

Algunas de las principales limitaciones del estudio han sido que los resultados han sido descritos de forma lineal con base en los componentes de la rúbrica REMMP, a pesar de que el ciclo de modelización no se recorre de forma lineal, como se ha indicado. Por este motivo, en futuros trabajos puede ser interesante conjugar este instrumento con otras herramientas tecnológicas que permiten recoger en qué parte del proceso está el alumnado en cada momento (Albarracin et al., 2019; Pla-Castells et al., 2021; Schneider et al., 2021).

Desde este marco, por un lado, será necesario seguir diseñando estudios que permitan identificar con mayor precisión cómo influye el tipo de tarea en un ciclo de modelización matemática temprana y, sobre todo, qué conocimientos moviliza el profesorado de Educación Infantil y qué papel ejercen en el diseño, implementación y evaluación de este tipo de prácticas de enseñanza en las primeras edades; y, por otro lado, teniendo en cuenta los resultados obtenidos hasta el momento, se requiere diseñar programas de formación acerca de la modelización matemática temprana tanto durante la formación inicial como en la continua para que el profesorado de infantil pueda introducir de manera eficaz este tipo de actividades en el aula, sobre todo teniendo en cuenta que la presencia del enfoque competencial en la legislación educativa de Educación Infantil presenta todavía algunas lagunas respecto a las aportaciones que se vienen realizando en las diversas agendas de investigación en educación matemática infantil sobre dicho enfoque.

BIBLIOGRAFÍA

- Albarracín, L., Arleback, J., Civil, E., y Gorgorio, N. (2019). Extending Modelling Activity Diagrams as a tool to characterise mathematical modelling processes. *The Mathematics Enthusiast*, 16(1), 211-230. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1455>
- Alsina, Á. (2012). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1(1), 1-14. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2012.1-14>
- Alsina, Á. (2016). Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. *Épsilon, Revista de Educación Matemática*, 33(1), 7-29.
- Alsina, Á. (2020). Cinco prácticas productivas para una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos. *Saber & Educar*, 28, 1-13. <http://dx.doi.org/10.17346/se.vol0.374>
- Alsina, Á. (2022). Transformando el currículo español de Educación Infantil: la presencia de la competencia matemática y los procesos matemáticos. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 111, 33-48.
- Alsina, Á., y Salgado, M. (2021a). Introduciendo la Modelización Matemática Temprana en Educación Infantil: un marco para resolver problemas reales. *Modelling in Science Education and Learning*, 14(1), 33-56. <https://doi.org/10.4995/msel.2021.14024>
- Alsina, Á., y Salgado, M. (2021b). Understanding Early Mathematical Modelling: First Steps in the Process of Translation Between Real-world Contexts and Mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10232-8>
- Alsina, Á. y Salgado, M. (en prensa). Orientaciones didácticas para introducir la modelización matemática temprana en Educación Infantil. *Modelling in Science Education and Learning*.

- Alsina, Á., Maurandi-Lopez, A., Ferre, E., y Coronata, C. (2021a). Validating an Instrument to Evaluate the Teaching of Mathematics Through Processes. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19, 559–577. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10064-y>
- Alsina, Á., Toalongo-Guamba, X., Trelles-Zambrano, C., y Salgado, M. (2021b). Desarrollando habilidades de modelización matemática temprana en Educación Infantil: un análisis comparativo en 3 y 5 años. *Cuadrante*, 30(1), 74–93. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23654>
- Andrade, H. G. (2000). Using rubrics to promote thinking and learning. *Educational Leadership*, 57(5), 13-18.
- Blum, W. y Kirsch, A. (1989). The problem of the graphic artist. En W. Blum, J. S. Berry, R. Biehler, I. D. Huntley, G. Kaiser-Meßner, y L. Profke (Eds.), *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics* (pp. 129-135). Ellis Horwood.
- Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12). Education, engineering and economics* (pp. 222–231). Ellis Horwood.
- Carreira, S., Amado, N., y Lecoq, F. (2011). Mathematical Modeling of Daily Life in Adult Education: Focusing on the Notion of knowledge. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 199-210). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_21
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de los didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Common Core State Standards Initiative [CCSSI] (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Recuperado de http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

- Freudenthal, H. (1991), *Revising mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.
- Geiger, V. (2011). Factors Affecting Teachers' Adoption of Innovative Practices with Technology and Mathematical Modeling. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling ICTMA 14* (pp. 305-314). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_31
- Girnat, B., y Eichler, A. (2011). Secondary Teacher`s Beliefs on Modeling in Geometry and Stochastics. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling ICTMA 14* (pp. 75-84). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_9
- Greefrath, G. (2011). Using Technologies: New Possibilities of Teaching and learning Modeling - Overview. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modelling ICTMA 14* (pp. 301-304). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_30
- Greefrath, G. (2019). Mathematical modelling – Background and current projects in Germany. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 23-41). SEIEM.
- Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht - Ein Überblick über die aktuelle und. En G. Graumann, T. Jahnke, G. Kaiser, y J. Meyer (Eds.), *Materialen für einen realitätsbezogenen* (pp. 64-84). Franzbecker.
- Maaß, K. (2004). *Mathematisches Modellieren im Unterricht. Ergebnisse einer empirischen Studie*. Franzbecker.
- Ministry of Education Singapore (2012). *Mathematics Syllabus. Primary One to Six*. Curriculum Planning and Development Division.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Servicio de Publicaciones de la SAEM Thales.

National Research Council [NRC] (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. The National Academies Press.

Ortlieb, C. P. (2004). Mathematische Modelle und Naturerkenntnis. *Mathematica didactica*, 27(1), 23–40.

Pla-Castells, M., Melchor, C., y Chaparro, G. (2021). MAD+. Introducing Misconceptions in the Temporal Analysis of the Mathematical Modelling Process of a Fermi Problem. *Education Sciences*, 11(11), 747. <https://doi.org/10.3390/educsci11110747>

Ruiz-Higueras, L., García, F. J., y Lendínez, E. M. (2013). La actividad de modelización en el ámbito de las relaciones espaciales en la Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 95-118. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2013.95-118>

Ruiz-Higueras, L., y García, F. J. (2011). Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de Modelización Matemática en la Escuela Infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(1), 41-70.

Schneider, L., Borromeo-Ferri, R., y Ruzika, S. (2021). On the influence of knowledge about the ideal-typical modelling processes on individuals' modelling routes. *Quadrante*, 30(2), 220-241. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23719>

Toalongo-Guamba, X., Alsina, Á., Trelles-Zambrano, C., y Salgado, M. (2021). Creando los primeros modelos matemáticos: análisis de un ciclo de modelización a partir de un problema real en Educación Infantil. *CADMO, Giornale Italiano di Pedagogia Sperimentale* 1/2021, 81-98. <https://doi.org/10.3280/CAD2021-001006>

Toalongo-Guamba, X., Trelles-Zambrano, C. y Alsina, Á. (2020). Design, construction and validation of a rubric to evaluate mathematical

modeling in the different educational stages. Artículo entregado para la publicación.