SOBRE ÁREAS E INTEGRALES

Antonio González-Corbalán

Catedrático de Matemáticas
Doctor en Matemáticas por la Universidad de Cantabria
Máster en Ciencias de la Computación

Partiendo de las áreas y volúmenes asociadas a las formas geométricas más simples, las que se estudian habitualmente en Primaria y Secundaria Obligatoria, intentaremos extender nuestro conocimientos a otras formas geométricas más complejas. Trataremos la *integración* como el último "gran" paso del camino recorrido, desde épocas anteriores a la Grecia Clásica hasta la actualidad, en el problema del cálculo de magnitudes geométricas (y físicas). Uno de los objetivos de este artículo es hacer patente que dicho paso, la *integración*, se relaciona armónicamente con todos los dados anteriormente y evitar su presentación como un hecho aislado. Pero el objetivo principal de este trabajo es mostrar que puede usarse *la secuencia de ideas fundamentales* como hilo conductor de nuestra exposición didáctica. Entendemos aquí como *ideas fundamentales* aquellas que jalonan el camino, o dicho de una forma más pragmática, las que implican un avance científico sustancial. Nuestra tesis es que haciéndolo de esa forma obtendremos, casi con seguridad, grandes beneficios pedagógicos. Los aspectos técnicos, como por ejemplo el método de las integrales racionales, deben ser tratados con la profundidad que requieran las circunstancias del curso/grupo que actualmente se nos presente. Y siempre como "consecuencias" de las *ideas fundamentales* ya expuestas.

El planteamiento anterior nos lleva a cuestionárnosla secuenciación y el enfoque habituales de los contenidos de 2º de Bachillerato que se agrupan en los temas denominados "integrales" indefinidas/cálculo de primitivas" y "aplicaciones del cálculo integral/áreas y volúmenes". A continuación voy a exponer una propuesta de varias unidades didácticas, o lecciones, esquematizando su contenido lo suficiente cómo para dar forma a un esqueleto completo de los temas que nos ocupan.

Unidad 1

Antes de la matemática griega y el *método de congruencia*.

En el cálculo por *corta y pega* de las áreas de las figuras más simples (cuadrado, rectángulo, paralelogramo, triángulo, trapecio y polígonos) se esta usando la *idea fundamental* de congruencia de figuras por movimientos, -traslaciones, rotaciones y reflexiones- en el plano. Una vez establecida como unidad de área fundamental un cuadrado de lado unidad se pueden medir otras áreas de polígonos mediante congruencias (cortar/pegar y mover). Debemos aclarar que las ideas de cortar y pegar figuras en el plano son coherentes debido a que los movimientos conservan todas las distancias de las figuras a las que se aplican (rectángulos, triángulos, paralelogramos, etc.).Hay que explicar a los alumnos que esto ocurre debido a que en el plano se miden las distancias con la distancia euclídea, es decir con el teorema de Pitágoras, y a que dichos movimientos conservan la distancia. En este punto conviene hacer dos observaciones importantes. La primera es que el plano del que hablamos no es más que un modelo matemático útil. Los planos, y las figuras geométricas en ellos, *no existen* en el espacio físico que nos rodea. De éste sólo podemos hacernos modelos, mejores o peores, que nos permiten manipular nuestros artefactos y conceptualizaciones. Y la segunda, y más importante, que en nuestro modelo de plano se pueden definir distancias de muy diferente naturaleza siendo la euclídea la más simple de todas ellas. Por todo lo expuesto las ideas de cortar, pegar, mover, ser congruente, etc. no pueden considerarse ideas triviales. Asimismo los volúmenes de prismas y pirámides pueden encontrarse mediante las ideas de cortar/pegar/hacer congruente en el espacio. Se pueden poner como ejemplo las pirámides y los troncos de pirámides. Así es como los agrimensores y constructores establecieron fórmulas para áreas de figuras planas y volúmenes de prismas y pirámides en las civilizaciones, que nosotros sepamos, mesopotámicas y egipcia. Hay que puntualizar que todas estas ideas se usaba sin formalización, ni demostración formal alguna, tal y como la entendemos hoy en día. Entre los geómetras de esas civilizaciones primaba lo práctico y lo empírico. A veces también optaban por dar fórmulas aproximadas, suficientes en sus aplicaciones prácticas. Por ejemplo, en Mesopotamia, para calcular el área de un cuadrilátero hacían el producto de las medias aritméticas de los pares de lados opuestos. Para calcular el área de un círculo tomaban 3 por el cuadrado de su radio. Y el volumen del tronco de pirámide lo hallaban tomando el producto de la altura por la media aritmética de las áreas de las bases.

Demócrito, Eudoxo, Arquímedes y el *método de exhaución (/mecánico)*.

El siguiente hito fue el intento de obtener rigurosamente las áreas de la circunferencia, y sus partes, y los volúmenes de los cuerpos redondos, y sus partes. O al menos establecer una relación clara entre dichas magnitudes y los parámetros de la figura en cuestión. Parece que la primera referencia a que el volumen de la pirámide y del cono es 1/3 de los correspondientes prisma y cilindro se debe a Demócrito, aunque él no lo demostró. Y que la primera demostración se debe a Eudoxo. Aunque las estimaciones eran suficientes para las cuestiones prácticas, las que principalmente preocupaban en Egipto y Mesopotamia, los matemáticos y geómetras griegos tenían una mentalidad similar a las de los científicos actuales. Querían demostraciones de las afirmaciones matemáticas. Sin embargo había una dificultad que hacía esta tarea más difícil de lo que pueda parecernos ahora: la existencia, demostrada por los Pitagóricos (siglo V a.C.), de cantidades inconmensurables (o irracionales) entre sí. Al igual que era sabido que el lado de un cuadrado es inconmensurable con su diagonal podía ocurrir que el área de un círculo lo fuera con su radio. Hay que desengañar a los alumnos de que la formulación del área de un círculo consistía para los griegos en la actual afirmación: el área y el radio al cuadrado están en proporción constante a cierto número, al que ahora llamamos π. Por el contrario se evitaba cuidadosamente toda mención a dicho número dado que no lo concebían como tal. El método de exhaución (Elementos de Euclides X.1) estaba diseñado para sustituir, con absoluto

rigor en las demostraciones (de las magnitud de un área o volumen), a la idea intuitiva de "límite". El método de exhaución no era un sistema para calcular aproximaciones, sino para efectuar demostraciones. Desde el descubrimiento de los inconmensurables la matemática griega distinguió entre números (naturales, fracciones) y magnitudes (segmentos, áreas, volúmenes) que no se representaban con números en las deducciones. Veamos, por ejemplo, cómo se enunciaba el teorema (Elementos de Euclides XII.2) sobre el área del círculo:
"*Los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros*"

Más aún el concepto de razón entre dos magnitudes no era la de "número" sino similar a la de "cortadura de Dedekind" (Elementos Definición V,5). La idea de aproximar una curva, como la circunferencia, mediante polígonos de un número creciente de lados, por exceso y por defecto, (método de exhaución) se atribuye a Eudoxo de Cnido (nacido en el 408 a. C.). Más concretamente Eudoxo formula la siguiente idea: dada la figura curvilínea *A*, para determinar su área a(*A*) se busca una sucesión de polígonos, por exceso y por defecto, que aproximen progresivamente el área de *A*. Se intenta demostrar que se puede encontrar polígonos en las sucesiones cuyo área difiera en una cantidad menor que otra prefijada y por tanto difiera del área buscada menos que esa cantidad prefijada. Es la aparición de la *idea fundamental* de límite. Un momento ideal para retomar este difícil concepto a nivel de *2ºBACH*.

Arquímedes de Siracusa (nacido en el 287 a.C.) llevó el arte de la exhaución a su perfección calculando, con todo el rigor que podríamos exigir actualmente, las áreas y volúmenes de multitud de figuras. En su obra *Sobre la Esfera y el Cilindro* Arquímedes encuentra la razón entre el volumen de una esfera y el de un cilindro del mismo radio y altura el diámetro. Tal razón es 2/3. Análogamente demuestra que la razón entre sus áreas es 2/3. Esto equivale a los enunciados modernos pero <u>elude</u> el nombrar el número π. En *Sobre las Espirales* define la curva espiral de

Arquímedes y encuentra que el área de una vuelta es un tercio del círculo correspondiente. En *Sobre la cuadratura de la parábola* demuestra que el área de un segmento parabólico es 4/3 de la del triángulo de igual base y altura. En *Sobre Conoides y Esferoides* generaliza lo tratado para la esfera a otras cónicas y cuádricas. En la obra *Sobre la medida de un círculo* demuestra que la razón de un círculo a su diámetro está comprendida entre 223/71 y 22/7.

Llegados a este punto se pueden hacer algunos ejercicios para calcular el área de los polígonos regulares inscritos a un círculo ($r = 1$) de 3, 6, 12,… ó de 4, 8, 16,… lados utilizando para las cuentas el cálculo del lado del polígono P_{2n} en función del lado de P_n. Esto sólo requiere un poco de geometría básica. Podemos comparar los resultados obtenidos con π. Hay que aclarar a los alumnos que todas estas cuentas presuponen la utilización de irracionales, radicales y notación decimal, cosas que los griegos jamás soñaron.

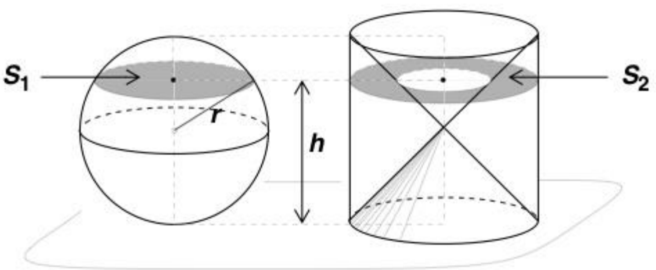
En todas estas obras Arquímedes utilizó el método de exhaución de forma rigurosa. A pesar de todo ese rigor y esa perfección en sus demostraciones los trabajos de Arquímedes no indicaban, en la mayoría de los casos, como había podido llegar a imaginar o intuir los resultados que exponía. El método de exhaución demostraba de una forma rigurosa, pero el resultado en sí era difícilmente imaginable. Cada teorema era una obra de ingenio totalmente diferente. Los métodos expuestos no eran generalizables. En el siglo XVII algunos autores, como Kepler o Cavalieri, observaron con cierta desesperación la ausencia de "*indicaciones*" sobre el método que había seguido Arquímedes para llegar a sus resultados. El misterio se aclaro en 1906 cuando el filólogo e historiador danés Johan Ludvig Heiberg recibió un aviso, gracias a una la sistemática catalogación que se estaba realizando, sobre un palimpsesto en Constantinopla situado en la Iglesia del Santo Sepulcro. De dicho palimpsesto Heiberg extrajo, con grandes dificultades, varias obras de Arquímedes entre las cuales se encontró la llamada "*El*

Método". Gracias al trabajo de Heiberg pudo ser rescatado en su práctica totalidad. En este libro Arquímedes explica cómo llegó, mediante razonamientos basados en la Mecánica, a sus intuiciones y descubrimientos. Aunque los razonamientos de "*El Método*" no fueran rigurosos, como el mismo admite en el preámbulo de la obra, reconoce que los resultados a los que se llegaba de esa forma eran correctos. "*El Método*" podría ser reformulado en el leguaje del cálculo integral moderno sin grandes dificultades. En este punto se puede poner como bellísimo ejemplo de la formas de trabajo de Arquímedes su cálculo sobre el área de una vuelta de espiral (ver los detalles en la bibliografía). Esto puede servir para motivar fácilmente en el aula la idea de sumas superiores e inferiores.

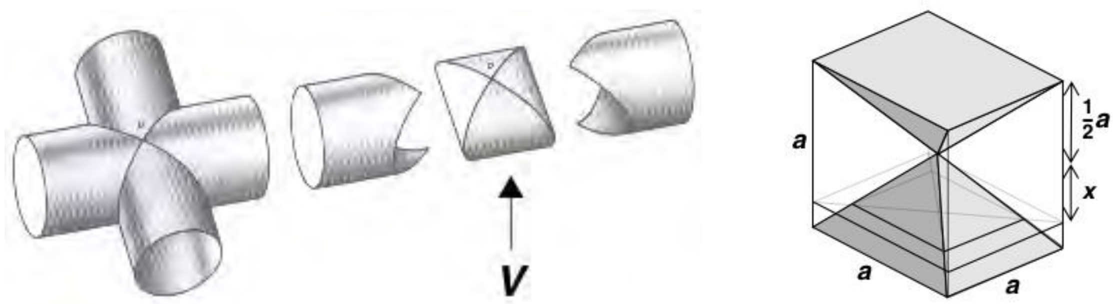
Unidad 2

Kepler, Cavalieri, Roberval y el *método de los indivisibles*.

Durante el siglo anterior a Newton las obras de Arquímedes influyeron poderosamente sobre las matemáticas. Se desarrollaron técnicas basadas en una idea de infinitesimal al que llamaban "*indivisible*". Se trataba de un concepto algo nebuloso y que recibió muchas críticas, bastante justificadas, por parte de unos y de otros, entre ellos el jesuita Paul Goldin. En 1649 el Colegio Romano rechazó los indivisibles y prohibió su enseñanza en los colegios Jesuitas. Johannes Kepler (1571-1630) fue uno de los que contribuyeron a estos desarrollos. El interés de Kepler por estos temas era práctico y se cuenta que surgió a raíz de la boda con su segunda esposa. El procedimiento que utilizaban los mercaderes para cubicar los barriles le pareció poco exacto. En su libro "*Nova Stereometriadoliorumvinariorum*" calcula áreas y cubica numerosos cuerpos, especialmente cuerpos de revolución, pues los toneles eran su principal interés. Kepler consideraba una disección del sólido en un número infinito de piezas infinitesimales o indivisibles, adaptada a cada caso, para luego sumarlos de forma que obtenía el volumen. Kepler entendía que sus indivisibles eran volúmenes infinitesimales y su preocupación por dar demostraciones rigurosas, como las de Arquímedes basadas en el método de exhaución, era escasa. El jesuita Bonaventura Cavalieri(1598-1647),continuando con las ideas de Kepler, desarrolla en su obra "*Geometria indivisibilibus continuorum quadam nova ratione promota*" una técnica para el cálculo de cuadraturas y cubaturas denominada el método de los indivisibles. En este método el área de una figura plana se considera formada por un número infinito de segmentos paralelos equidistantes, cada uno de los cuales se interpreta como un rectángulo infinitamente delgado; y un volumen se lo considera compuesto por un número infinito de áreas de figuras planas paralelas. Por supuesto no explica cómo puede ser que los indivisibles de volumen cero den lugar a un cuerpo con volumen no nulo, cosa que sólo se justificaría posteriormente con el paso al límite que da la teoría de la integral. Llegados a este punto tenemos dos bellos ejemplos, que suponen poco esfuerzo en el aula, de cómo aplicar este método a casos prácticos. El primero nos lleva al volumen de la esfera: las secciones de una esfera tienen el mismo área que las secciones de un cilindro, de igual radio y altura que la esfera, menos un doble cono -o diábolo- de igual radio e igual altura (el área de S_1 es igual a la de S_2):

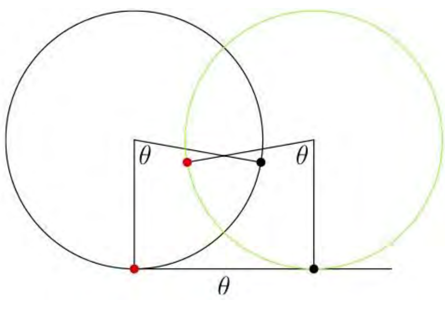


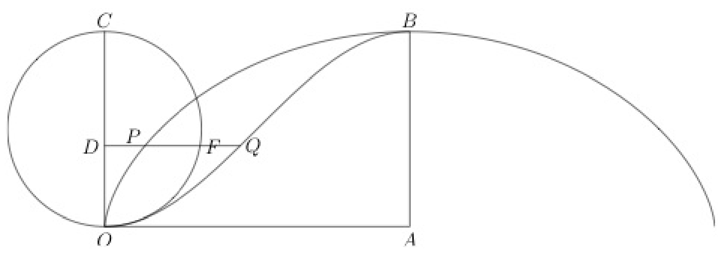
Otro ejemplo, maravilloso, ya citado por Arquímedes en "*El Método*", es el siguiente: en un cubo de lado a, es inscrito un cilindro, que tiene sus bases en caras opuestas, y cuya superficie toca los otros cuatro planos, y en el mismo cubo es inscrito otro cilindro, que tiene sus bases en otros cuadrados y cuya superficie toca los otros cuatro planos, entonces el sólido limitado por las superficies de los dos cilindros, es dos tercio del cubo:



Para demostrarlo Cavalieri comprueba que las áreas de las secciones de V son iguales a las de un cubo, en el que se inscribe V, menos la de una doble pirámide cuadrada con vértice en el centro del cubo, lado el mismo que el cubo y alturas la mitad del lado.

Giles Personne de Roberval (1602-1675) desarrolla métodos bastante eficaces en su obra "*Traité des indivisibles*" (publicada en el año 1693 como parte de "*Diversouvrages de mathémathique et de la physique par messieurs de l'Académie Royale des Sciences*). Roberval hace hincapié en que sus métodos reposan más en los de Arquímedes que en los de Cavalieri, a los cuales critica por su falta de rigor (aunque tampoco él facilita demostraciones rigurosas). En su "*Traité des indivisibles*" Roberval consigue la cuadratura del área limitada por $y=x^q$, con q racional, y también la de un lóbulo de $y=senx$. Antes de 1636 demuestra que el área bajo un bucle de cicloide es tres veces la del círculo generador correspondiente y consigue también cubicar el cuerpo de revolución que genera la cicloide. Logra con sus técnicas la cuadratura del área lateral de un cono oblicuo en 1644. Calcula la longitud de los arcos de espiral y de parábola. Consigue una relación entre las longitudes de la elipse y la cicloide generalizada (es decir si se puede calcular una, de inmediato se podría también la otra). Es de destacar que sus cálculos de longitudes suponen el primer avance después de los griegos. Como ejemplo para llevar al aula podemos escoger el cálculo del área de un bucle de cicloide basado en indivisibles:





Consideramos círculos de radio 1. Los puntos rojo y negro sobre el círculo negro van a parar, al rodar, a los puntos rojo y negro en el círculo verde. Si las coordenadas del punto rojo en el círculo negro son (0,0) entonces las coordenadas del punto rojo en el círculo verde son $(\theta - sen\theta, 1 - cos\theta)$.

En la figura P es un punto de la cicloide y F es el punto a igual altura sobre el círculo.
El punto Q se escoge de tal forma que DF es de la misma longitud que PQ (es decir segmentos indivisibles iguales).

Así si $P = (\theta - sen\theta, 1 - cos\theta)$ y $F = (sen\theta, 1 - cos\theta)$ se tiene que $Q = (\theta, 1 - cos\theta)$.
El área del rectángulo $OABC$ es 2π. El área a la derecha de $\{ (\theta, 1 - cos\theta) / 0 \leq \theta \leq \pi \}$ por simetría es π.

El área a la izquierda de F y a la derecha de D, es la de un semicírculo ésto es $\pi/2$.
Por ser sus indivisibles iguales a las de e) el área a la izquierda de Qy a la derecha de P, P y Qvariando, es $\pi/2$.

Así el área a la derecha de P en el rectángulo OABC es $3\pi/2$ y el área total bajo la cicloide es 3π.

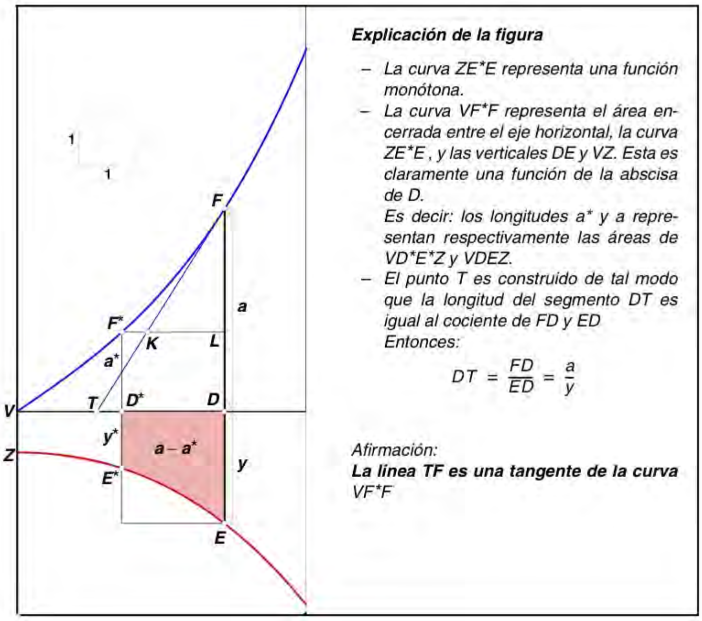
<u>Unidad 3</u>

<u>Barrow, Newton, Leibnitz y la *relación entre cuadraturas y tangentes*</u>.

En la historia del cálculo de cuadraturas han existido dos corrientes muy profundas. Por una lado el método de exhaución, una base firme, con todo su poder para demostrar con rigor sus afirmaciones, pero con el hándicap de que no era posible dejar volar la imaginación sobre éste. Por otro lado todos los métodos basados en una certera intuición, como el mecánico de

Arquímedes o el de los indivisibles, practicados por Kepler, Cavalieri , Roberval ,¡y también por Arquímedes en "*El Método*"!, que conseguían magníficos resultados, pero dejaban insatisfechas a las mentes inquietas. El cálculo integral de Newton y Leibniz consigue juntar las dos corrientes en una gran río armonioso reuniendo así lo mejor de ambas corrientes, exhaución y teoría de indivisibles.

Isaac Barrow (1630-1677) fue profesor de Newton y le precedió en la Cátedra Lucasiana. Es notable señalar que Barrow fue el primero en darse cuenta de la asombrosa relación entre "tangentes" y "áreas", antes de 1665, en contra de lo que solemos imaginar cuando, a veces, se le atribuye a Newton. En su libro "*Geometrical Lectures*" nos propone el siguiente teorema:



La fórmula que antecede a la afirmación final puede ser reinterpretada así $y = \frac{a}{DT}$; es decir la ordenada de la función, *y*, es igual a la pendiente de la tangente, en el punto correspondiente, a la grafica que nos da el área de la función *ZE*E*. Esto es precisamente la formulación del Teorema Fundamental del Cálculo en un lenguaje geométrico. La demostración de Barrow es también totalmente geométrica:

Supón que *K* es un punto de *TF* entre *T* y *F.* Hay que demostrar que *K* es un punto a la derecha de la curva *VF*F*.

Por la semejanza de los triángulos *KLF* y *TDF* vale: $\frac{FL}{LK}=\frac{FD}{DT} = DE = y$, entonces $FL = LK \cdot y$(I)

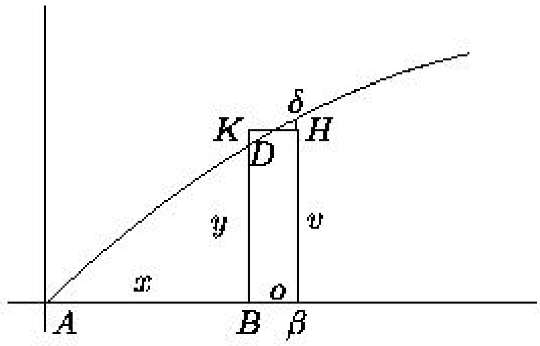
De otro lado: $FL = a - a^* =$ área $VDEZ -$ área $VD^*E^*Z =$ área $D^*DEE^* < D^*D \cdot y$ (II), ¡ya que la curva *ZE*E* representa una función monótona!

De (I) y (II) se sigue $LK < D^*D$, y entonces $LK < LF^*$
Así sabemos que *K* está a la derecha de la curva *VF*F*.

Si prolongamos la recta *TF*, podemos demostrar de modo análogo que cada punto de la parte prolongado está a la derecha de *VF*F.* Por lo tanto todos los puntos de la recta, excepto *F*, están a la derecha de la curva y eso significa que *TF* es la tangente de la curva en *F*.

Es difícil entender como pudo establecer Barrow su teorema dado que su estilo conecta con dificultad con los desarrollos de sus predecesores. Sin embargo el cálculo diferencial de Newton, con su idea de variables infinitesimales, conecta de forma más natural con la idea de indivisibles. Isaac Newton (1643-1727) descubrió los fundamentos de su Cálculo Diferencial e Integral entre 1665 y 1666. En 1669 circuló en inglés una primera versión de su obra "*De Analysi*" que luego se publicaría en latín en 1771. En este libro aborda el Teorema Fundamental en un forma muy similar a la actual Como ejemplo veamos algunas palabras y una figura de dicha obra:

De acuerdo con la figura sean z=área(ABD), y=BD, x=AB, B = o.
Elijamos ahora v=BK de tal manera que
área (BD = área (BKH) = ov.



Gotfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) data sus trabajos sobre cálculo integral, casi con seguridad independientes de los de Newton y Barrow, entre octubre y noviembre de1675. Una de sus aportaciones fue el uso de los símbolos actuales ∫ *dx* para la integral y la diferencial haciendo el trabajo matemático mucho más intuitivo y efectivo al usar símbolos sugerentes. El hecho es que Leibniz pensaba que la manera de simbolizar los conceptos es importante. Y la matemática contemporánea ha hecho totalmente suya esa idea. No hay más que abrir un libro de matemáticas editado en el siglo XX para darse cuenta de la importancia que dan los matemáticos a la estética de sus textos.

Hay hechos, esto puede ser expuesto en el aula ya que los alumnos conocen las derivadas, que inducen a pensar que existe una relación entre derivada y área. Nunca sabremos si esos hechos fueron inicialmente considerados por Newton o si le ayudaron a formular el cálculo. Está a la vista que la derivada (respecto del radio r) de la fórmula que nos da el área de un círculo, πr^2, es $2\pi r$, la longitud de su contorno. Asimismo la derivada del volumen de una esfera, $4/3\pi r^3$, respecto a r es $4\pi r^2$, que es su área. Y que ésto no nos prueba nada es obvio, pero es un indicio de que existe una relación entre el área de un recinto y su borde. Para los polígonos regulares deberemos poner área y perímetro en función de la apotema si deseamos obtener resultados análogos. En el caso de un cuadrado, por ejemplo, su área es $4a^2$ y su perímetro $8a$. Pero aún es más interesante para la introducción del cálculo observar algunos casos muy sencillos del Teorema

Fundamental. Si tomamos la función constante *f(x) = c*y vemos el área del rectángulo que deja entre *0* y *x* sobre el eje *x* la fórmula que sale es *cx* cuya derivada es c. Asimismo si tomamos f(x) = x y vemos el área del triángulo entre *0* y *x* sobre el eje *x* la fórmula que sale es $\frac{x^2}{2}$cuya derivada es *x*. Por último si tomamos *f(x) = ax+b* entre *0* y *x* sobre el eje *x* nos sale un trapecio de área $\frac{ax+b+b}{2}\times x=\frac{ax^2+2bx}{2}=\frac{ax^2}{2}+bx$ cuya derivada es obviamente la función de partida. Estos tres ejemplos del teorema fundamental, junto con los anteriores, conectan los conocimientos básicos de los alumnos con el objetivo de exponer el Teorema Fundamental. De pasada se puede retar a los alumnos a que calculen, extrapolando estas ideas, el área bajo un parábola. A partir de aquí introduciremos, sin forzar en exceso, los conceptos de suma inferior y superior, y el de integral (de Riemann para funciones continuas, o a lo sumo continuas a trozos, y subintervalos de igual longitud). Es importante avisar a los alumnos desde el principio que la integral y el área no son lo mismo; hay que poner ejemplos de funciones que, al cambiar de signo, dan una integral igual a la suma, con signo, de las áreas. Luego pueden exponerse, mejor con ejemplos que con demostraciones formales, las propiedades lineales y aditivas de la integral.

Inmediatamente después podremos dar una demostración (la gráfica en esta demostración es *importante*) del Teorema Fundamental para la integral de una función continua. Es interesante exponer como principio de la demostración el siguiente resultado, que siempre se da por obvio, y cuya demostración es muy sencilla:

Si *f(x)* es integrable en [*a,b*] y *m≤f(x)≤M* entonces *m(b-a)≤* $\int_a^b f(x)dx$ *≤ M(b-a)*

Observaciones sobre el Teorema Fundamental: 1) la representación gráfica cartesiana es imprescindible para imaginar/formular el teorema, 2) el concepto de indivisible prepara claramente el de rectángulo cuya base tiende a cero y3) la integral es una forma particular y precisa del método de exhaución aplicable a situaciones muy generales. Por lo tanto podría decirse que el Teorema Fundamental es la *guinda* que culmina todos los progresos anteriores de cálculo de cuadraturas. Para finalizar demostraremos a los alumnos la regla de Barrow y la aplicaremos a casos sencillos de áreas en que se pueda calcular la primitiva con la tabla de derivadas y poco más.

La del Teorema Fundamental es una de las pocas demostraciones que considero esenciales en *2º BACH* por ser un ejemplo de cómo una idea, la derivada, que inicialmente está pensada para un problema, la Dinámica, acaba teniendo resonancias en otros campos diferentes. La *resonancia* es uno de los principales indicadores del valor de una idea científica. Las buenas ideas, una vez formuladas, adquieren vida propia y resuelven otros problemas muy diferentes al que le dio origen.

Unidad 4

Las técnicas de derivación y los *métodos de integración*.

Debemos evitar dar la impresión de que los métodos de integración se basan en ideas felices o en si "*toca la flauta*". Para ello lo mejor es empezar dando una visión general del trabajo que se va a realizar y por qué se va a realizar así. Cada técnica de integración está fundamentada en alguno de los aspectos del cálculo de derivadas:

DERIVACIÓN	*TÉCNICA DE INTEGRACIÓN*
Tabla de derivadas	*Integrales inmediatas /tipos*
Suma $(f\pm g)' = f'\pm g'$	*Descomposición en sumando/ racionales*
Producto $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$	*Integración por partes*
Composición $(f\circ g)' = (f'\circ g)\times g'$	*Integración por cambio de variable*

Nuestra propuesta es ir entremezclando las técnicas de integración con cálculos efectivos de áreas a lo largo de la lección. Los ejemplos pueden incluir áreas bajo una gráfica, entre dos o entre varias gráficas. Podemos dejar otras aplicaciones diferentes que las áreas para después de finalizar la exposición de las técnicas e incluirlas en una unidad aparte. De cualquier forma debe de quedar claro a lo largo de todo el tema que el objetivo no son las *técnicas* de cálculo de primitivas sino las aplicaciones del cálculo integral a multitud de asuntos. Un punto de la mayor importancia es explicar a los alumnos que la derivación lleva de funciones conocidas (elementales) a combinaciones más o menos complicadas de funciones conocidas (elementales). Por el contrario la integración lleva de funciones elementales a una nueva galaxia de funciones no elementales y, en principio, desconocidas hasta que se estudian a fondo. Ejemplos: elípticas, Bessel, hipergeométricas, etc.

Podemos considerar las integrales inmediatas cómo un entrenamiento básico para desarrollar las habilidades. Hay que tener en cuenta que los alumnos han aprendido a derivar pero todavía tienen que conseguir una familiaridad suficiente con esta herramienta fundamental. Creemos que al principio es bueno indicar de qué tipo de inmediata se trata, potencial, exponencial, etc. para pasar después a mezclar todos los tipos sin indicación alguna. Este es un juego al que los alumnos se prestan con facilidad. Una idea importante es la de reducir una integral conocida a tipos conocidos (inmediatas) mediante manipulaciones adecuadas.

En cuanto a la descomposición en sumandos hay que decir desde el comienzo que es la técnica más básica y que se aplica de continuo (los polinomios son el ejemplo más a mano). El hecho de que las funciones racionales descompongan en suma de fracciones simples es harina de otro costal y se debe dejar para después.

La integración por partes es complicada para la mayoría de alumnos debido a la confusión en la elección de partes. Lo que para el profesor es obvio, debido a su experiencia, no lo es en absoluto para el alumno. En el trabajo de aula se debe permitir el error al elegir las partes porque en este asunto se aprende más de los errores que de los aciertos. Integrales en que parece imposible aplicar *por partes* porque sólo "*aparece*" una parte como $\int \ln x\,dx$. Integrales por partes que terminan dando, después de varios pasos, la misma integral (cíclicas), como por ejemplo $\int e^{nx} sen(mx)\,dx$. Una de las *por partes* más interesantes es la que relaciona la longitud de un círculo con su área (antes hay que explicar longitudes de curvas). Si $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ es la función que nos da el semicírculo superior de radio 1 entonces $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ y podemos definir después de algunos cálculos sencillos $\pi=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ como la longitud del semicírculo. Si evaluamos ahora el área del semicírculo obtenemos:

$$A=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right\}dx=\pi-\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Hacemos ahora la última integral por partes:

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=-x\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=0+A$$

y así conseguimos la igualdad $A = \pi-(0+A)$ y, por tanto, $A = \pi/2$

No es necesario desarrollar demasiado la integración por cambio de variable en el nivel de 2ºBACH. Es suficiente poner unos cuantos *buenos* ejemplos de cómo funciona el método. También es importante advertir a los alumnos de que debemos llevar cuidado con lo que escribimos. Supongamos que queremos hacer la integral:

$$\int f(x)dx$$

mediante el cambio de variable $x=g(t) \quad dx=g'(t)dt \quad t=g^{-1}(x)$

Estrictamente hablando no podemos escribir $\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt$ ya que las funciones a ambos lados de la igualdad tiene distinta variable; sin embargo si que podemos escribir $\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)\,dt$

porque se trata de la igualdad de dos números reales.

En relación a las integrales de funciones racionales, las más complicadas de este nivel, se debe comenzar mostrando una analogía con las fracciones numéricas. Por ejemplo la fracción *4/21* tiene un denominador compuesto *7·3* pero podemos descomponerla en suma de dos fracciones más "*simples*" *a/3 + b/7*. Sin casi esfuerzo calculamos a y b quedando *4/21 = -1/7 + 1/3*.

A continuación podemos mostrar a los alumnos cómo las fracciones algebraicas que llamamos "*simples*" se pueden integrar de forma inmediata, o con algunas manipulaciones que las hacen inmediatas. Ya refiriéndonos al cálculo de los numeradores de las fracciones simples se puede recurrir a la sustitución de la variable por raíces del denominador, u otros valores que lleven a un sistema lo más sencillo posible, o bien igualar los coeficientes polinómicos de los numeradores o bien seguir un sistema híbrido de ambos.

Es esencial que comprendan que si una raíz es múltiple, por ejemplo de multiplicidad 3, no pueden saltarse las fracciones con denominadores de grados 3, 2 y 1. Se debe ver, con un ejemplo, que este típico error nos lleva a un sistema de ecuaciones incompatible. Todavía mejor es hacerles comprender que, por ejemplo, *5/12* no puede ser suma de dos fracciones "*simples*" *a/2 + b/3* ya que si escribimos *5/12 = a/2 + b/3* esto conduce a *5 = 2(3a + 2b)* lo que implica que *5* es par.

Unidad 5

Más allá de las áreas: *volúmenes, longitudes, centros de masa, medias*

Podemos comenzar con los volúmenes de revolución, que involucran integrales sencillas en varios ejemplos importantes, y seguir con otros volúmenes no tan sencillos como el ejemplo, ya mostrado por Cavalieri, de la intersección de dos cilindros. Respecto a las longitudes sólo es factible resolver las integrales de un arco de círculo, un arco de parábola y un arco de espiral sin entrar en funciones no elementales. En cuanto a los centros de masa es factible hacerlo para polígonos, segmentos y sectores circulares, segmentos parabólicos, etc. En el tema de las medias es posible poner un ejemplo muy interesante a nivel conceptual, y con pocos cálculos farragosos, la *vida media* de un elemento radioactivo cuya *semivida* se conoce.

Los volúmenes de revolución más básicos son el cilindro, el cono y la esfera. A continuación se puede hacer la sección esférica (radios R, r_1 y r_2) el balón de rugby (elipsoide de semiejes a y b), disco (elipsoide de semiejes b y a) , el neumático (toro de radios r y R) y el barril limitado por dos tapas de radio r y un arco de circulo de radio R cuyo centro esté situado a distancia d del eje de giro. Otros volúmenes que pueden calcularse por secciones sin ser de revolución son la intersección de dos cilindros de igual radio, R, con ejes que se cortan a ángulo α. Y, por supuesto, el elipsoide de semiejes a, b, y c. Y también la barca volteada: consideramos la intersección de dos círculos de radio R,una hoja, y sobre el eje de simetría de la hoja secciones triangularescuya base, perpendicular al eje de simetría, es la anchura de la hoja en ese punto. El problema se puede plantear con todos los triángulos (secciones) semejantes, o con los triángulos de altura variable en función de la posición.

La explicación intuitiva de los elementos diferenciales de longitud es sumamente sencilla y un ejemplo ideal de las manipulaciones que suelen realizarse en cálculo integral. La longitud del arco de parábola sólo depende de una primitiva inmediata, la del arco-seno-hiperbólico. Aunque estas funciones no se suelen explicar en bachillerato son tan, o más, sencillas que las circulares (por supuesto explicarlas lleva su tiempo, tiempo del que no se suele disponer). Como ejemplo tomemos el arco de parábola *f(x)* = x^2 entre *0* y *1*:

$$l=\int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx=\{cambio\ de\ variable\ 2x=t\}=\int_0^2 \sqrt{1+t^2}\,\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}arcsenht\Big|_0^2=\frac{1}{2}arcsenh2$$

La longitud de un arco de círculo es análoga a la anterior con la diferencia de usar inversas de funciones circulares. Como ejemplo tomemos el cuarto de círculo $x^2+y^2 = 1$ entre *0* y *1*:

$$l=\int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_0^1 \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=arcsenx\Big|_0^1=arcsen1=\frac{\pi}{2}$$

La longitud del arco de espiral de Arquímedes necesita la introducción de las coordenadas polares, pero la integral a la que conduce es análoga a la de la parábola. Como ejemplo podemos tomar la longitud de media vuelta de la espiral *r(□) = k□□□*desde *0* a *π*):

$$l=\int_0^\pi \sqrt{r^2(\alpha)+r'(\alpha)^2}\,d\alpha=\int_0^\pi \sqrt{(k\alpha)^2+k^2}\,d\alpha=k\int_0^\pi \sqrt{1+\alpha^2}\,d\alpha=k\ arcsenh\alpha\Big|_0^\pi=k\ arcsenh\pi$$

En cuanto a los centros de masa creemos que los más simples, pero con suficiente interés como ejemplos, son el cono de radio *r* y altura *h*, el alambre semicircular de radio *r* y el semicírculo de radio *r*. Las integrales que conllevan son muy sencillas pero la explicación del concepto de centro de masa debería estar bien asentado en la asignatura de Física, ya que no es posible dedicarle tiempo en Matemáticas. Hagamos aquí la de un cono homogéneo.

Consideramos el cono como el cuerpo de revolución de la recta *f(x) = (r/h) x*, donde r y h son el radio y la altura, girando alrededor del eje *0x*, desde *0* hasta *h*. Por simetría la posición del centro de masa estará en el eje *0x*. Para calcular su posición hay que hacer la siguiente integral:

$\int_0^h x\,\pi\left(r/h\right)^2 x^2 dx = \pi\left(r/h\right)^2 \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^h = \frac{\pi}{4} r^2 h^2$ y dividir por $1/3\pi r^2 h^2$ (la "masa" total),quedando $x = ¾\, h$

Finalmente calculemos la vida media de un átomo de un elemento radioactivo que se desintegra con un periodo de semivida de T años. Se trata de un problema en el que pasamos del concepto de media de un conjunto discreto a otro en el que se considera, dada el enorme número de átomos, la media de un conjunto infinito continuo. Si tenemos una masa inicial *M* la masa que quedará al cabo de t años viene dada por *m(t) = M exp(-ln2 t/T)*. La masa de átomos que se desintegra en el "*instante" t* viene dada por |*m'(t) dt*| por lo tanto multiplicaremos por t y "sumaremos" entre los tiempos *0* e ∞ dividiendo el resultado por la masa total (número total de átomos) *M*:

$$\frac{1}{M}\int_0^\infty t\ M\exp(-\ln 2\frac{t}{T})(\frac{\ln 2}{T})dt = \{cambio de variable \frac{\ln 2}{T}t = z\} = \frac{T}{\ln 2}\int_0^\infty z\exp(z)dz$$

La última integral se puede hacer fácilmente "*por partes*". "Sustituyendo" luego por 0 e ∞ obtenemos como resultado de la integral impropia 1 (cabe aquí exponer, sin pretensiones, que la integral impropia es el límite de una integral normal o propia). Por lo tanto la vida media de la población de átomos es el periodo de semivida dividido por *ln2*. Un resultado sumamente enigmático.

Bibliografía

Recursos pntic [*Mesopotamia*]

Claudia Andrea López [*El infinito en la historia de las Matemáticas*]

Martin Kindt [*La historia de las matemáticas en la enseñanza del Análisis*]

Euclides59 [*El área y la integral*]

Integral definida (presentación)

ficus.pntic.mec.es/igas0008/matematicas/INTEGRAL%20DEFINIDA.pps

Arquímedes de Siracusa [*El Método*]

Bonaventura Cavalieri [*Geometriaindivisibilibus*]