SOBRE LA APLICACIÓN Y USO DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN EL ESTUDIO DE CONCEPTOS ECONÓMICOS EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO Y UNIVERSIDAD

Ariza, Ángel y Llinares, Salvador
Departamento de Formación e Innovación Didáctica de la Facultad de Educación de la Universidad de Alicante.
angelariza@merlin.fae.ua.es
sllinares@ua.es

Resumen. El concepto matemático de derivada es fundamental para la comprensión de los conceptos económicos en general y microeconómicos en particular. En esta investigación analizamos la aplicación y el uso del concepto de derivada en conceptos de microeconomía en alumnos de 2º de bachillerato (17-18 años) que cursan la materia de 'Economía' y en alumnos de 1º de Ciencias Empresariales matriculados en la materia de 'Microeconomía'. A través de un cuestionario de 6 tareas y entrevistas clínicas, estudiamos cómo los alumnos utilizan los significados del concepto de derivada en el registro algebraico y gráfico al resolver situaciones de economía. El análisis de las respuestas dadas por 18 alumnos (9 de bachillerato y 9 de universidad) indica la dificultad que tienen los alumnos en manejar los significados de la idea de derivada en el registro gráfico cuando se usa para explicar decisiones relativas a conceptos de economía que la derivada ayuda a modelizar. Estos resultados pueden ser explicados por la marginación del registro gráfico en favor del algebraico en los currículos de matemáticas y el poco énfasis colocado sobre las tareas de conversión y sobre la explicitación de los significados de medida de variación en la enseñanza de los conceptos económicos.

Palabras clave. Comprensión matemática, derivada, registros algebraicos y gráfico, conceptos de economía, didácticas específicas.

The usefulness of derivative concept in learning economic concepts by high school and university students

Summary. The mathematic concept of the derivate function is a key concept in understanding microeconomic concepts. We analyzed the use of the derivate in microeconomic concepts among second year bavvalaureat students (17 or 18 years old) and 1st year business management degree students. Through a questionnaire composed of 6 microeconomic tasks and the interviews to the students, we analyse how students use the graphical and analytical meanings of the derivate concept in solving economic problems. The analysis of the answers points out the difficulties that students have when using the meanings of the derivate concept, mainly in the graphical representation. The marginalization of the graphical representation and the favour of the algebraic one in the mathematics curriculum and the small relevance given to conversion tasks in teaching economics concepts could explain these results.

Keywords. Understanding mathematics, derivate function, algebraical and graphical representations, economic and microeconomics concepts, specific didactics.

INTRODUCCIÓN

Algunos conceptos matemáticos son utilizados para modelizar situaciones y poder facilitar su manejo. La Economía es un campo en el que esta situación es claramente visible. Esta situación ha favorecido que durante los últimos años se haya empezado a realizar investigaciones que analizan la relación entre la comprensión de conceptos económicos y los conceptos matemáticos utilizados en la construcción de modelos (Ballard y Jonson, 2004; Cohn et al., 2000; Hey, 2005), así como la manera en la que los profesores de economía relacionan los significados de los conceptos matemáticos con los conceptos económicos (García, Azcarate y Moreno, 2006). En particular, Ballard y Johnson (2004) mostraron que existe una correlación directa entre el éxito que presentan estudiantes preuniversitarios en un curso de introducción a la microeconomía y el manejo de herramientas matemáticas básicas. Por otra parte, Hey (2005) concluyó que la buena utilización del registro gráfico es esencial para aprender microeconomía, llegando a afirmar que sólo el registro gráfico es necesario para aprender y enseñar microeconomía. Además, Butler y sus colegas (1995) analizaron los efectos de un curso semestral adicional de cálculo diferencial en el aprendizaje de teoría económica intermedia, concluyendo que existían mejoras en la comprensión de los conceptos que articulan la teoría microeconómica pero no así en los conceptos de macroeconomía. Los resultados de estas investigaciones indican que algunas veces los conceptos económicos se manejan sin una buena comprensión de los significados matemáticos que los organizan. Esta situación implica que algunas veces las interpretaciones de las situaciones económicas resultan difícil de realizar como consecuencia de que los estudiantes no poseen una comprensión adecuada de los conceptos matemáticos que organizan las situaciones económicas. Desde este contexto, resulta importante empezar a generar información sobre la manera en la que los estudiantes de contenidos económicos comprenden los conceptos matemáticos que son utilizados en la caracterización de las nociones económicas y cómo esta comprensión determina sus interpretaciones económicas de las situaciones. Dentro de esta problemática, las cuestiones de investigación propuestas en la investigación realizada son:

– ¿Cómo usan los estudiantes el significado del concepto de derivada en la solución de problemas de economía?

– ¿Qué niveles de aplicación y comprensión del concepto de derivada pueden identificarse en la resolución de problemas económicos?

Como paso previo revisamos lo que la investigación ha aportado sobre las características de la comprensión de la idea de derivada, que puede ser pertinente para entender el aprendizaje de los conceptos económicos. En este sentido, la relación entre el concepto de derivada y determinadas situaciones económicas viene dado por la manera en la que diferentes elementos del concepto de derivada ayudan a caracterizar algunos conceptos de Economía. Esta situación es relevante, ya que algunos de los conceptos económicos no son más que funciones y funciones derivadas particulares

La noción de derivada y los contextos de Economía

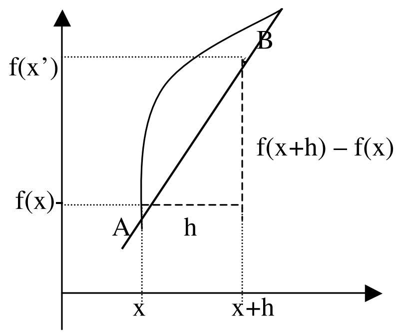
Las ciencias sociales se apoyan en conceptos matemáticos para construir sus postulados, por lo que resulta de especial importancia para su pleno conocimiento un adecuado manejo y comprensión de dichos conceptos matemáticos. En Economía, se utilizan constantemente conceptos como *derivada, integral, ecuación diferencial*, etc., que son utilizados para modelizar muchos de los fenómenos que los economistas estudian. En particular, el concepto matemático de derivada es fundamental en el estudio de la microeconomía, rama de la economía que estudia los procesos de toma de decisiones de los agentes económicos. Por ello es necesario conocer cómo los estudiantes comprenden el concepto de derivada cuando usan su significado para interpretar situaciones económicas.

Con respecto al concepto de derivada, Sánchez-Matamoros (Sánchez-Matamoros 2004; Sánchez-Matamoros et al., 2006) caracterizó distintos niveles de comprensión de la derivada (niveles INTRA, INTER y TRANS) a través de la manera en la que los estudiantes coordinaban el uso de los diferentes modos de representación. Al analizar cómo se da esta coordinación, Hähkiöniemi (2006) identificó numerosas dificultades de los estudiantes cuando percibían la derivada desde la gráfica de una función y considerando qué tipo de representaciones usaban para ello. Desde esta información, y considerando que en Economía mucha información se proporciona desde representaciones gráficas de las relaciones entre las variables y la medida de la variación de cambio dada por la derivada, la manera en la que los estudiantes obtienen información desde la relación entre una función y su gráfica se puede considerar precursora de la comprensión de determinadas situaciones económicas. En este sentido, la comprensión gráfica de la idea de derivada y su relación con la función ha sido identificada como un elemento clave en la comprensión de los estudiantes de la medida de variación (Elia, 2006; Gagatsis y Shiakalli, 2004; Gagatsis, et al., 2006). Además, Habre y Abboud (2005) señalaron que la conducta de los estudiantes está dominada por el registro algebraico al resolver determinados tipos de problemas. Estos estudios están mostrando que la síntesis de los diferentes sistemas de representación es un aspecto clave en la comprensión de las relaciones entre la idea de función y la función derivada y, por tanto, determinan referencias para la manera en la que los estudiantes pueden usar el concepto de derivada para modelizar las situaciones económicas.

La información proporcionada por las investigaciones sobre la comprensión de la derivada y su relación con la función han puesto de manifiesto que dicha comprensión depende de la naturaleza de las relaciones que los estudiantes establecen entre los diferentes elementos matemáticos que constituyen el concepto (Sánchez Matamoros, et al., 2008). Esta situación plantea la necesidad de realizar un análisis de la manera en la que algunos conceptos económicos consideran estos elementos matemáticos que constituyen la derivada. Estos elementos son:

i) El concepto de tasa de variación media (TVM), analíticamente entendido como la variación media de los valores de la función entre dos puntos ‘x’ y ‘x+h’, de modo que TVM (x, x+h) = (f(x+h)-f(x))/h. Este concepto indica cómo es el crecimiento de una función en un intervalo considerado. Desde el punto de vista gráfico la TVM es la pendiente del segmento que une dos puntos A y B, donde A estaría formado por el par (x, f(x)), y B por (x+h, f(x+h)).

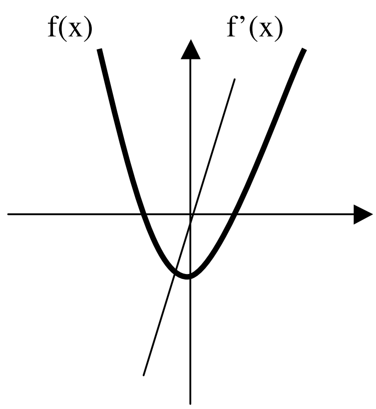
Gráfica 1



ii) La derivada en un punto, entendido en el registro algebraico como el límite cuando h tiende a 0 de (f(a+h)-f(a))/h. Gráficamente es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto (a, f(a)). La derivada de la función en un punto nos indica el crecimiento de la función en un punto determinado.

iii) La función derivada (f'(x)). La función derivada asocia a cada punto 'x' la derivada de la función en ese punto 'x'. Es decir, el conjunto de todos los pares x, lim (f(x+h)-f(x)/h)) cuando h tiende a 0. Desde el punto de vista gráfico nos ayuda a visualizar las características del comportamiento de la función (crecimiento, decrecimiento, concavidad, etc.)

Gráfica 2



Estas tres ideas son relevantes para la comprensión de la manera en la que se analizan situaciones económicas. En este sentido, la utilidad del concepto de función derivada en el estudio de los conceptos económicos reside en la información proporcionada por las abscisas en las cuales la derivada tiene un cierto valor, la obtención de los tramos donde la función *f* crece, decrece o permanece constante (es decir, medición de la velocidad de cambio), y la concavidad y convexidad de *f* en relación con el crecimiento y decrecimiento de *f'*.

Algunos de los conceptos económicos que proceden del uso de la derivada para modelizar determinados fenómenos económicos y que constituyen conceptos básicos en el estudio de la Economía son:

– Función de producción: función producto total y la función producto marginal,

– Coste de producción: coste total y marginal,

– Ingreso total y marginal,

– Frontera de posibilidades de producción y el coste de oportunidad,

– Función de Utilidad y la relación marginal de sustitución (RMS),

– Función isocuanta y la relación marginal de sustitución Técnica.

Estos conceptos económicos son los que hemos considerado en esta investigación y en los que están implicadas las ideas de crecimiento, decrecimiento, concavidad, convexidad y linealidad inherentes a la función derivada y su relación con la idea de función.

Un concepto económico que es de especial utilidad es la función que describe la producción de la empresa dependiendo del número de trabajadores contratados. Esta idea recibe el nombre de *función de producción*. En la relación que describe la idea de función de producción, es relevante ver qué variación de producción ha generado un trabajador (derivada en un punto) o saber cuál sería la variación de producción que generaría cualquier «unidad» de trabajador x (función derivada). En economía esa función recibe el nombre de *producto marginal*, que es la derivada de la función de producción.

El de *coste de producción* indica el coste que representa para una empresa la producción de una determinada cantidad de producto. En economía se estudia la *función coste total* haciéndola depender de la cantidad producida. En estas situaciones es importante saber qué variación de costes genera producir una unidad x adicional (derivada en un punto) y con ella cualquier unidad x (derivada de la función). Esa función derivada del coste total que indica cómo crece el coste al aumentar la producción es el *coste marginal*. En este sentido forman parte también de este análisis los conceptos de ingreso total e ingreso marginal, que tienen la misma relación que coste total y coste marginal, con la diferencia de que la magnitud sería en este caso el ingreso del empresario y no el coste.

Otro concepto a utilizar es el *coste de oportunidad*. De manera hipotética cuando un país dedica sus recursos a la producción de dos bienes, si quiere aumentar la de uno de ellos deberá renunciar a una cantidad del otro; esto se denomina el coste de oportunidad. Existe una función que representa esos costes, que es la *frontera de posibilidades de producción*. La gráfica de esta función indica cuáles son las cantidades máximas que puede producir un país de dos bienes, y cuál es la tasa a la que se renuncia uno por otro (coste de oportunidad). En esta situación lo que es modelizado es el ritmo al que evoluciona ese coste (derivada de la función) a medida que vamos renunciando a un bien por otro. Finalmente tenemos la *relación marginal de sustitución* (RMS) y la curva de indiferencia o *función de utilidad* que representa distintas combinaciones de consumo de dos bienes 'X' e 'Y' para los cuales el consumidor mantiene constante su nivel de satisfacción medido por la función de utilidad. La RMS es la tasa en la que el consumidor intercambia un bien por otro manteniendo constante su utilidad; esa tasa suele ser en valor absoluto cada vez menor (Ley de la utilidad marginal decreciente).

Estos dos últimos conceptos económicos referidos al consumidor tienen su equivalencia también en el análisis microeconómico del empresario. Si suponemos que el empresario necesita de dos factores productivos para producir (trabajo –L– y capital –K–) estamos en una situación análoga a la del consumidor. El empresario podrá combinar ambos factores de maneras distintas para obtener el mismo nivel de producción. Esta situación es modelizada por la *función isocuanta* que muestra cómo un empresario puede combinar su trabajo y capital para obtener la misma producción. Asimismo, si el empresario decide aumentar la cantidad de un factor tendrá que renunciar a cantidades del otro; esa tasa de intercambio de un factor por otro es la *relación marginal de sustitución técnica* (RMST). Por las mismas razones que antes, a medida que se incrementan las cantidades de uno se deberán renunciar a menos cantidades del otro para poder seguir generando la misma producción (RMST decreciente en valor absoluto), debido a la llamada Ley de rendimientos decrecientes.

Los conceptos del producto marginal, coste marginal, ingreso marginal, coste de oportunidad, RMS y RMST son fenómenos modelizados por la derivada y por la relación con la función de la cual proceden (producto total, coste total, ingreso total, frontera de posibilidades de producción, función de utilidad y función isocuanta)

MARCO TEÓRICO

El marco teórico que hemos adoptado subraya el papel central de la representación, la conceptualización, el razonamiento (argumentación, demostración, utilización de lenguajes formales), la interpretación de figuras, la comprensión de textos en la resolución de problemas (Duval, 1995). Duval caracteriza estos procesos cognitivos desde una perspectiva funcional que le permite defender su hipótesis de base: no hay noesis (intelección) sin semiosis (producción de representaciones semióticas). De acuerdo con Duval (1995, 2006a), la actividad de resolución de problemas recurre a varios registros semióticos de representación, algunos de los cuales han sido desarrollados específicamente para efectuar tratamientos matemáticos (por ejemplo el álgebra, sistema de numeración posicional, etc.). Por otra parte, los objetos matemáticos nunca son accesibles por la percepción, como podrían serlo la mayoría de objetos de otras disciplinas: la designación de los objetos matemáticos pasa necesariamente por un registro semiótico de representación.

Para Duval (1995), el conocimiento matemático tiene unas características propias que hace que no sea posible el acceso a este conocimiento sin el recurso a una variedad de registros de representación. En el aprendizaje entran en juego lo que él denomina diferentes sistemas semióticos de representación (registros). Un registro está constituido por signos en el sentido más amplio de la palabra: trazos, símbolos, íconos, etc., y estos signos están asociados de manera interna y externa. De manera interna, según los lazos del contexto y de pertenencia a una misma red semántica; y de manera externa, según las reglas de combinación de signos en expresiones o configuraciones. Estas reglas son propias de la red semántica involucrada. En consecuencia, los registros son medios de expresión y de representación caracterizados precisamente por sus respectivos sistemas semióticos. Duval (2006b) plantea dos preguntas que constituyen el núcleo del uso de las ideas matemáticas para modelizar determinadas situaciones: ¿Cómo se aprende a cambiar de registro? y ¿cómo se aprende a no confundir un objeto con la representación que se propone? Teniendo por tanto en cuenta la existencia de diferentes registros de representación, Duval (2006b) considera que en cualquier actividad matemática se han de distinguir dos tipos de transformación:

– Tratamiento: transformación de una expresión matemática manteniendo el mismo registro o sistema de representación semiótica. Por ejemplo, el proceso dentro del registro algebraico de despejar la incógnita $2x + 3 = 23 \rightarrow 2x = 23 - 3 \rightarrow$……

– Conversión: trasformación de una expresión matemática cambiando de registro de representación pero sin cambiar el objeto al que se hace referencia. Por ejemplo, obtener la expresión algebraica de un problema concreto:

El siguiente cuadro muestra la oferta interior y la demanda interior de la UE de un producto.

Cuadro 1

Precio P	*Qs de la UE*	*Qd de la UE*
3	2	34
6	4	28
9	6	22
12	8	16
15	10	10
18	12	4

(a) Representar las funciones de la demanda y la oferta de la Unión Europea.

(b) Calcular las ecuaciones de la demanda y de la oferta interiores de la UE.

Según Duval (2006a, 2006b), estos procesos de transformación suelen darse de modo totalmente independiente al usar las ideas matemáticas para resolver problemas y, por tanto, también cuando se están resolviendo situaciones económicas. Pero en algunas situaciones, sobre todo en las correspondientes al registro gráfico o geométrico, los procesos de tratamiento y conversión han de darse de manera interdependiente y coordinada para resolver los problemas de manera razonada y generando nuevo conocimiento. Duval (2006b) considera la *conversión* como un proceso crucial para la comprensión de los objetos matemáticos, que en el caso del estudio de la economía son usados para modelizar las situaciones económicas. Esta importancia dada al proceso de conversión es debido a que:

– los diferentes sistemas de representación semiótica han de ser utilizados incluso si existe la posibilidad de elegir y usar solamente uno de ellos,

– los objetos matemáticos representados no deben ser nunca confundidos con el contenido del sistema de representación que se use, y

– es necesario construir puentes cognitivos de conexión entre diferentes registros.

Desde esta perspectiva, la mejor prueba del conocimiento es la capacidad de transferir lo que se ha aprendido a nuevos y diferentes registros, dentro y fuera del contexto matemático y esto implica desarrollar la conversión. Así, para fomentar la conversión es necesario exponer los objetos matemáticos en diferentes registros al mismo tiempo (para las funciones y derivadas usar su expresión algebraica y gráfica, etc.). Para Duval (2006-b), la conversión engloba tres niveles distintos de procesos cognitivos:

1) Nivel superficial (*Surface level*): identificación del objeto representado en dos registros diferentes.

2) Nivel intermedio (*Intermediate level*): encuentro de relaciones de asociación entre el registro inicial y otro distinto.

3) Nivel profundo (*Deep level*): *discriminación* de diferentes objetos matemáticos entre dos representaciones dentro del mismo registro que parecen iguales (dos gráficas que visualmente son iguales, dos afirmaciones que usan las mismas palabras).

En la investigación realizada intentaremos definir niveles de aplicación y uso del concepto matemático de derivada en el aprendizaje de conceptos económicos considerando estos procesos cognitivos (Duval, 1995). Desde esta perspectiva, el máximo nivel de aplicación de un concepto matemático (entendido en el contexto económico como lo que ayuda a modelizar la situación) se alcanza cuando se es capaz de realizar *tratamientos* de dicho concepto en todos los registros posibles y de acometer *conversiones* entre los mismos en un sentido y otro. Los registros en que basaremos nuestro análisis serán el algebraico y el gráfico. De esta manera un «nivel profundo» del proceso cognitivo se daría cuando es posible aplicar los significados de la idea de derivada en diferentes situaciones económicas tanto en el registro gráfico como analítico. Esta situación es importante, ya que en las situaciones económicas las funciones particulares que describen determinados fenómenos han sido conceptualizadas como conceptos económicos relevantes para explicar dichas situaciones.

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Participantes y contexto

Los participantes en esta investigación fueron:

– 10 estudiantes que cursaban 2º curso de bachillerato en su rama de Ciencias Sociales, matriculados en las asignaturas de «Economía» y «Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales», y

– 38 estudiantes de universidad matriculados en la asignatura de «Microeconomía», de 1º de Administración y Dirección de Empresas.

Tabla 1

Número de estudiantes por rango de edad y curso.

	Rango de edad					
	17	**18-19**	**20**	**19-24**	**25-30**	**+30**
BACH	3	5	2			
UNIV				21	12	5

Para el objeto de esta investigación fueron analizadas las producciones de 9 estudiantes de bachillerato y 9 estudiantes de universidad.

Instrumentos de recogida de datos

Los datos para esta investigación fueron:

i) las respuestas de los alumnos a un conjunto de tareas microeconómicas en las que el concepto matemático de la derivada aparece implícitamente, y

ii) las transcripciones de las entrevistas clínicas realizadas a siete de los estudiantes. Las tareas del cuestionario para ambos grupos de alumnos eran los exámenes oficiales de su asignatura. Para las entrevistas se eligieron a siete alumnos en función de las calificaciones y también de la disponibilidad de hacer las mismas.

Tabla 2

Número de cuestionarios y entrevistas.

	Cuestionario	Entrevistas
2º BACH	9	4
1º UNV	9	3
Total	18	7

Cuestionario

El cuestionario estaba formado por 6 tareas, 4 iguales para ambos grupos, y 2 diferentes aunque el formato y los objetivos de las 2 tareas diferentes son los mismos. La existencia de dos tareas diferentes se debe al distinto temario que ambos grupos tienen. Las tareas que forman el cuestionario proceden de un grupo inicial de tareas que fueron analizadas desde la perspectiva cognitiva (lo que demandaban al resolutor), y considerando el currículo de economía y matemáticas que habían cursado los estudiantes. El criterio básico para su elección consistió en la búsqueda de funciones matemáticas que modelizaran conceptos económicos en todos los registros posibles. Desde la información obtenida desde estas caracterizaciones y considerando las cuestiones específicas de la investigación se eligieron las tareas que formaron el cuestionario definitivo y que son descritas a continuación. Se describe cada tarea y el objetivo perseguido por cada una de ellas en relación con las cuestiones de investigación planteadas.

Tarea 1
1. Di si en las siguientes situaciones una empresa presenta rendimientos constantes, crecientes o decrecientes a escala; utiliza las proporciones de cambio de trabajo, capital y producción.

Trabajo	Capital	Producción
5	10	1000
6	12	1200

Trabajo	Capital	Producción
20	10	50000
25	12,5	60000

Trabajo	Capital	Producción
100	10	7000
90	9	5000

La tarea 1 consiste en la interpretación de variación de datos dados por medio de tabla. La tasa de variación media permite el cálculo de la variación, aplicados a la producción de una empresa y a la cantidad de factores productivos utilizados. La diferente amplitud de los intervalos considerados en los datos introduce la necesidad de determinar las tasas de variación en relación con un estándar (en este caso es el 100) a través de porcentajes. Los conceptos económicos que intervienen son los rendimientos de escala: si la producción crece en términos porcentuales más que la cantidad de trabajo y capital utilizados, la empresa presentará rendimientos crecientes; si crece en menor proporción, serán rendimientos decrecientes; y si el porcentaje de crecimiento es el mismo en ambas variables, los rendimientos serán constantes. El concepto matemático que permite modelizar estas situaciones económicas es la tasa de variación media (TVM). El objetivo de esta tarea es ver cómo interpretan y calculan las variaciones medias en un contexto de rendimientos económicos de una empresa. En este contexto la tasa de variación media modeliza las relaciones entre los valores de las magnitudes trabajo, capital y producción.

Tarea 2
2. La siguiente tabla muestra la oferta interior y la demanda interior de la UE de un producto.

Cuadro 2

Precio P	*Qs de la UE*	*Qd de la UE*
3	2	34
6	4	28
9	6	22
12	8	16
15	10	10
18	12	4

(a) Representar las funciones de la demanda y la oferta de la Unión Europea.

(b) Calcular las ecuaciones de la demanda y de la oferta interiores de la UE.

Esta tarea requiere de una conversión entre registros. En particular de la tabla a la representación gráfica y algebraica de las dos funciones (oferta y demanda de un producto, dependientes del Precio). Es una tarea en la que se utilizan los registros del lenguaje convencional, el gráfico y el algebraico. Tiene como objetivo analizar la capacidad del estudiante de realizar conversiones entre registros. Los conceptos económicos que intervienen son funciones de oferta y demanda, equilibrio, cantidad y precio como magnitudes cuyas relaciones son modelizadas por una función lineal.

Tarea 3
Esta tarea tenía dos versiones una para cada grupo. Estas versiones de la tarea estaban condicionadas por el currículo de los estudiantes.

3. (2º bachillerato) Calcula las magnitudes marginales de las siguientes magnitudes totales:
– *CT (coste total)=* $3q^3 + 2q^2 – q + 1000$
– $CT = aq^a + nq^n$
– *PT (producción total) =* $\sqrt{L}$
– $PT = 3 \log (L)$
– *IT (ingreso total) =* $100q - q^2$

3. (1º ADE) Calcular la relación marginal de sustitución (RMS) correspondiente a las siguientes funciones de utilidad:
(a) $U (x; y) = x^3 y^2$
(b) $U (x; y) = 3 \log (x) + 2 \log (y)$
(c) $U (x; y) = x^a y^n$
(d) $U (x; y) = x - 2y$
(e) $U (x; y) = ax + by$
(f) $U (x; y) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$

La tarea 3 presenta una serie de «funciones de utilidad» expresadas algebraicamente para que el alumno proceda a la obtención de la expresión de la función derivada. En este caso es la relación marginal de sustitución (RMS). En esta tarea los estudiantes sólo trabajan con el registro algebraico por lo que su objetivo está limitado a realizar «tratamientos» y pretende determinar la relación nominal entre dos conceptos económicos relacionados entre sí por ser una función (función de utilidad) y su derivada (función de relación marginal de sustitución).

Tarea 4
4. La función de producción a la que se enfrenta un empresario en el corto plazo viene definida por los siguientes datos:

Producción	0	1	1,41	1,73	2	2,23	2,45
L (trabajadores)	0	1	2	3	4	5	6

a) Representa gráficamente la función y obtén una expresión algebraica de dicha función de producción.

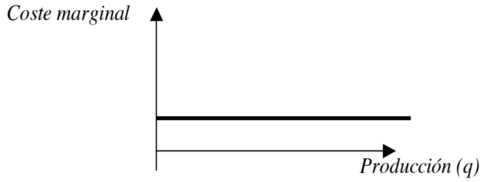
b) Realiza un esbozo de cómo sería la función producto marginal (PMg); obtén también su expresión analítica. ¿Qué indica el producto marginal (PMg)?

c) ¿Qué formas tienen ambas gráficas? ¿Encuentras alguna relación?

La tarea 4 alterna la utilización de diferentes registros. Los objetivos de esta tarea son determinar la capacidad de los estudiantes de realizar conversiones entre registros, determinar cómo usan los significados de la idea de derivada en el registro gráfico y examinar la preferencia de los alumnos por un registro u otro. Los conceptos matemáticos que intervienen son los de función creciente y decreciente, cóncava y convexa y la relación entre la posible forma de la gráfica de la función y la forma que adopta la gráfica de la función derivada. Los conceptos económicos que intervienen son los de producto total y producto marginal.

Tarea 5
5. La función coste marginal de una empresa viene expresada gráficamente por la siguiente figura; a partir de la misma, realiza un esbozo de cómo sería gráficamente la función del coste total, explicando la relación entre ambas formas.

Gráfica 3

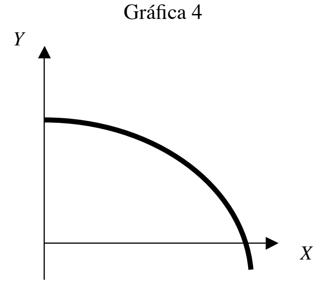


La tarea 5 se presenta únicamente en registro gráfico y plantea una función de coste marginal (CMg). El objetivo es ver si los significados de derivada son usados cuando entra en juego solamente el registro gráfico en una situación donde la relación entre la función y su función derivada puede ser usada para modelizar la relación entre coste marginal y coste total. En este caso, los conceptos matemáticos que intervienen son: relación gráfica entre una función y su derivada. Los conceptos económicos que intervienen son: coste total y coste marginal.

Tarea 6
Esta tarea también adoptó dos formas según el curso al que se presentó. Aunque tiene el mismo objetivo, la gráfica usada se cambió considerando el currículo de los respectivos cursos (2º bachillerato y 1º ADE)

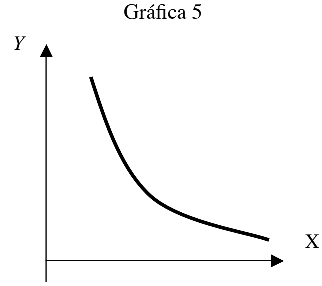
6. (2º bachillerato) Un país tiene una frontera de posibilidades de producción representada por la siguiente gráfica, en la cual X e Y son los dos bienes que se producen en el país. Indica cómo sería la gráfica que represente la evolución del coste de oportunidad de producir más cantidad del bien Y. Compara y comenta la forma de ambas gráficas y su relación.

Gráfica 4



6. (1º ADE) Un consumidor presenta el siguiente tipo de curva de indiferencia hacia los bienes X e Y: Indica cómo sería la gráfica que represente la evolución de la RMS al consumir más cantidad del bien Y. Compara y comenta la forma de ambas gráficas y su relación

Gráfica 5



Igual que en la tarea 5, aquí sólo se utiliza el registro gráfico. La diferencia es que aquí el concepto de derivada se encuentra de una forma mucho más implícita que en las tareas anteriores. Para el caso de 2º bachillerato el concepto económico por el que se les pregunta es el coste de oportunidad (derivada en un punto); se pide obtener gráficamente toda la función de coste de oportunidad de un bien dependiente de la cantidad producida del otro bien (función derivada). Con esta tarea pretendemos ver si los estudiantes son capaces de relacionar la derivada en un punto con la función derivada. Esta tarea también posibilita el demostrar a través de la función coste de oportunidad por qué la frontera de posibilidades de producción (FPP) es cóncava.

Para el caso de 1º ADE, los conceptos económicos que aparecen es la función relación marginal de sustitución (RMS) y la función de utilidad. Se pide que relacionen su forma con la función inicial y que indiquen por qué la función es convexa. En esta tarea los objetivos específicos fueron analizar la capacidad de pasar de la derivada en un punto al de función derivada, y ver cómo los estudiantes interpretaban la forma cóncava/convexa de la función presentada. Los conceptos matemáticos son los significados de la forma de la gráfica de la función derivada y la información que puede proporcionar en relación con la función de la que procede la derivada. Los conceptos económicos implicados son la función frontera de posibilidades de producción (FPP), coste de oportunidad, la función de utilidad, y la función relación marginal de sustitución (RMS).

La entrevista

Como una manera adicional de obtener información sobre cómo los estudiantes habían usado los significados de la idea de derivada para resolver las tareas económicas, se realizaron entrevistas clínicas (Goldin, 2000). Después de realizar el cuestionario, se agruparon las respuestas según diferentes características de los comportamientos de los estudiantes desde la manera en la que integraban la información procedente desde los diferentes registros. Luego, fue preparado un guión de entrevista que fue utilizado por el entrevistador como referencias iniciales para el desarrollo de la entrevista, pero que se podía modificar con el objeto de indagar en alguna dirección determinada. Para cada una de las tareas, este guión inicial constaba de una serie de cuestiones que buscaban aclarar aspectos confusos en las soluciones escritas por los alumnos y obtener información adicional que nos permitiera realizar mejores inferencias.

Con las preguntas de la tarea 1 se pretendió que el alumno explicara oralmente cómo obtenía los porcentajes de variación, ya que muchas veces el alumno tiende a escribir su cálculo sin profundizar en la explicación del proceso. Las cuestiones preparadas para la tarea 2 pretendían conocer la opinión del alumno en cuanto a si le resultó difícil el pasar del registro gráfico al algebraico con las funciones dadas y por qué. Ejemplos de preguntas para esta tarea fueron

– *Explica cómo obtienes las ecuaciones de líneas rectas a partir de la gráfica.*

– *¿Te ha resultado complicado?*

En la entrevista sobre la tarea 3 se preguntaba al alumno sobre si solía tener problemas para derivar y qué tipo de dificultades había encontrado y por qué.

En la tarea 4, durante la entrevista, se indagaba sobre por qué el alumno utilizaba el tratamiento de un registro cuando podía haber utilizado otro. Por ejemplo, algunas de las preguntas inicialmente preparadas para esta tarea fueron:

– *Explica cómo obtienes la ecuación del PT a partir de la gráfica sabiendo que no es una línea recta.*

– *Por qué has calculado el PMg de esta manera y no de otra?*

– *¿Por qué crees que el PT es creciente y cóncavo y el PMg es decreciente y convexo?*

En la tarea 5 buscamos que el alumno explicara oralmente la relación entre las curvas de CT y CMg, no sólo en el caso de la tarea presentada sino de forma general a partir de las diferentes formas que se habían estudiado. Ejemplos de preguntas usadas en la tarea 5 fueron:

– *¿Por qué crees que el coste total tiene esa forma?*

– *Las formas normales que has estudiado, ¿cuáles son?*

– *¿Podrías explicar la relación de esas formas?*

Por último, el objetivo de la entrevista en la tarea 6 fue determinar si el alumno comprendía la relación de la concavidad y convexidad de las curvas con la función derivada y el significado económico.

Análisis

El análisis siguió tres fases en las que se pretendía integrar la información desde las diferentes fuentes de los datos y generar un modelo explicativo del comportamiento de los estudiantes en relación con la aplicación y el uso del concepto de derivada en conceptos de microeconomía (Clements, 2000; Llinares y Roig, 2008).

En la primera fase del análisis las respuestas de cada estudiante a cada uno de los problemas fue analizada considerando la manera en la que eran usadas la idea de medida de la variación, y la síntesis entre los registros gráficos y analíticos. Este análisis se ha realizado teniendo en cuenta los objetivos propios de cada tarea y sus potencialidades. Con respecto a la tarea 1 se analizó en qué medida los alumnos eran capaces de calcular variaciones medias y cómo realizaban esos cálculos (con reglas de tres, porcentajes, fracciones, etc.). El análisis de la tarea 2 se centró en cómo los estudiantes obtenían las expresiones algebraicas a partir de las gráficas (por intuición, con la ecuación punto-pendiente, mediante un sistema de ecuaciones, etc.). En la tercera tarea se identificó qué derivadas resolvían correctamente y cuáles eran las que generaban dificultades. El análisis de la cuarta tarea se centró en varios aspectos: en primer lugar, si se obtenían las expresiones algebraicas (al igual que en la tarea 2) dentro de una tarea más compleja; en segundo lugar, si se utilizaba el registro gráfico o algebraico para obtener el producto marginal a partir del total; y en tercer lugar, si los alumnos relacionaban dentro del registro gráfico las formas de las funciones. En la tarea 5 se analizó la capacidad de tratamiento en el registro gráfico. Por último, con la tarea 6 se analizó la capacidad de obtención de una gráfica con la que no estaban familiarizados, viendo así cómo es el paso de derivada en un punto a función derivada, y qué justificación daban para su obtención.

La información obtenida desde este primer análisis descriptivo nos permitió generar una serie de indicadores sobre diferentes «niveles de uso» de la idea de derivada para cada alumno-tarea, de modo que en un cuadro de doble entrada (tarea-alumno) se fueron caracterizando las respuestas dadas por los alumnos atendiendo a los objetivos propuestos en cada tarea. De esta información pudimos acotar y realizar una primera caracterización de las respuestas observadas, de modo que se diferenciaron 5 grupos:

– *Grupo 1*: estudiantes que apenas contestan adecuadamente alguna de las tareas, sin dominar ningún registro y sin intentar conversiones (ejemplo, alumno A1).

– *Grupo 2*: estudiantes que responden a algunos aspectos de algunas tareas adecuadamente y a otros incorrectamente, en ambos registros y al tratar de realizar conversiones (ejemplo, alumno A2).

– *Grupo 3*: estudiantes que dominan las tareas de cálculo algebraico y solamente realizan conversiones desde el registro algebraico al gráfico (ejemplo, alumno A3).

– *Grupo 4*: estudiantes que dominan las tareas presentadas en registro gráfico y realizan conversiones desde el registro gráfico al algebraico (ejemplo, alumno A4).

– *Grupo 5*: estudiantes que dominan ambos registros y se muestran capaces de realizar conversiones en ambos sentidos (ejemplo, alumno A5).

Los ejemplos de los descriptores utilizados en dicha tabla de doble entrada se incluyen en la tabla 3:

Tabla 3
Descriptores generados inductivamente desde el análisis de las entrevistas y cuestionarios.

	T1	T2	T3	T4	T5	T6
A1	Utilización correcta de porcentajes de variación media	No pasa del registro gráfico al algebraico, ni lo intenta	No deriva bien ninguna expresión, aunque se aproxima en dos.	– Se basa en los puntos para representar PMg – No obtiene expresiones – Mala utilización de los términos concavidad, convexidad, crecimiento y decrecimiento	Dibuja erróneamente y sin explicación	Dibuja erróneamente y sin explicación
A2	No calcula porcentajes de variación media pero acierta con los resultados económicos	Pasa del registro gráfico al algebraico correctamente con la función de Oferta e incorrectamente con la función de Demanda	Deriva bien sólo las expresiones polinómicas (3)	No resuelve, apenas lo intenta, solamente representa la función PT.	No lo intenta	No lo intenta
A3	No calcula porcentajes de variación media pero acierta con los resultados económicos	No pasa del registro gráfico al algebraico, ni lo intenta	Deriva bien sólo las expresiones polinómicas (3)	– Se basa en los puntos para representar PMg – No obtiene expresiones – Se limita a decir que son curvas y parábolas	Pasa del CMg al CT con un ejemplo algebraico pero no gráficamente	Sólo habla de la forma cóncava de la FPP
A4	No calcula porcentajes de variación media pero acierta con los resultados económicos	Intenta obtener las expresiones a través de y=mx+n, aunque no lo consigue	Sólo resuelve bien una de las derivadas, y es polinómica	-Se basa en la gráfica PT para representar PMg, aunque erróneamente - No obtiene expresiones -No relaciona ambas funciones	Obtiene perfectamente la función CT gráficamente, con una gran explicación.	Dibuja bien la gráfica que se pide
A5	Utilización correcta de porcentajes de variación media	Pasa del registro gráfico al algebraico correctamente, sin explicar cómo obtiene la función de Oferta.	Deriva todas bien	-Representa el PMg de forma intuitiva a través del PT -Obtiene expresiones, aunque sin explicación -Relaciona con gran precisión	Obtiene perfectamente la función CT gráficamente, con una gran explicación	Explica bien qué es RMST y su pendiente, intenta deducir gráfica pero no dibuja nada.

A partir de esta información, agrupamos los descriptores de los «niveles de uso» como un primer paso para la asignación de un nivel al desarrollo global del estudiante en el cuestionario entero. La fase 2 del análisis se centró en triangularizar las decisiones tomadas en el análisis de las respuestas escritas al cuestionario con la transcripción de las entrevistas realizadas. El objetivo de esta fase fue refinar las características dadas a los niveles de uso del concepto de derivada en situaciones económicas. En particular con relación al nivel de tratamiento de los registros puesto de manifiesto por los estudiantes; por ejemplo, a aquellos alumnos que realizaron conversiones del registro gráfico al algebraico sin explicar cómo lo habían hecho (como ocurrió con los alumnos A2 y A4 de la tabla 3) se les pidió más información en la entrevista, para clasificarlos bien en el grupo 2 o en el 4. Se añadió la información relevante de las entrevistas al cuadro de doble entrada generado en la primera fase del análisis.

Finalmente, en la tercera fase del análisis integramos la información obtenida para generar características de diferentes «niveles de uso» del concepto de derivada considerando tanto el grado de tratamiento y conversión entre los registros puesto de manifiesto en la resolución de las tareas, como las relaciones establecidas entre los diferentes elementos matemáticos del concepto de derivada.

Con este proceso, identificamos cinco niveles de uso con relación al tratamiento en los registros (gráfico o algebraico) que muestra el estudiante en la resolución de las tareas. Como señaló Sánchez-Matamoros (2006) en el desarrollo de los niveles INTRA, INTER y TRANS, distinguió asimismo los subniveles INTRA1 e INTRA, INTER1 e INTER y finalmente TRANS; es decir, cinco niveles ordenados de menor a mayor número de relaciones lógicas mostradas por los estudiantes en el manejo del concepto de derivada en diferentes registros. Los cinco niveles obtenidos en nuestra investigación se asemejan a esta clasificación generada por Sánchez-Matamoros (2006) y que posteriormente reagruparemos en tres, coincidiendo así también con la clasificación propuesta por Duval (2006 b) el cual distinguía los niveles superficial, intermedio y profundo, en función de las relaciones recíprocas que los estudiantes mostraban en el aprendizaje de conceptos matemáticos en diferentes registros.

En la descripción de los diferentes niveles, para representar que los estudiantes habían realizado algún tipo de conversión del registro algebraico al gráfico y del gráfico al algebraico, lo denotamos por A→G y G→A respectivamente. De esta manera, en la generación de las características de los niveles de uso del concepto de derivada, se integran las relaciones entre los elementos matemáticos del concepto de derivada puestas de manifiesto por los estudiantes y la manera en la que se generaban los diferentes tratamientos y conversiones entre los registros.

Resultados

Los resultados del análisis de los protocolos de resolución de tareas y de las respuestas a las entrevistas se muestran en la siguiente tabla diferenciando los estudiantes de 2º de bachillerato y los de 1º de ADE. Los niveles caracterizados fueron:

– Nivel bajo: los alumnos no manejan correctamente los significados del concepto de derivada en ninguno de los registros y no realizan conversiones entre registros.

– Nivel intermedio: los estudiantes utilizan el concepto de derivada con acierto en algunas ocasiones y en ambos registros, realizando intentos de conversiones entre ambos registros aunque sin éxito.

– Nivel alto-alg: el concepto de la derivada es tratado y utilizado para resolver problemas económicos dentro del registro algebraico, mostrando dificultades en el registro gráfico, con conversiones solamente del algebraico al gráfico.

– Nivel alto-gra: el concepto de la derivada es tratado y utilizado para resolver problemas económicos dentro del registro gráfico, mostrando dificultades en el registro algebraico, con conversiones del gráfico al algebraico fundamentalmente.

– Nivel superior: los alumnos aplican y utilizan la derivada en todos los registros con éxito, realizando conversiones en ambos sentidos entre registros.

La tabla 4 recoge la distribución de los estudiantes en los diferentes niveles:

Tabla 4
Niveles generados; alumnos numerados del 1 al 9 en bachillerato y ADE.

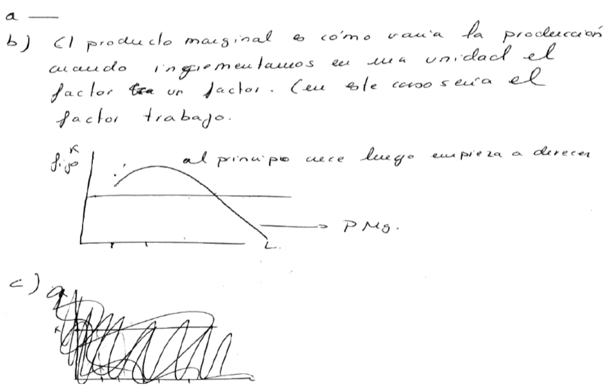
ALUMNOS			NIVEL
B	A	TOTAL	
1, 9	1, 4	cuatro	bajo
3, 7	–	dos	intermedio
2, 4, 6, 8	3, 5, 6, 9	ocho	alto-alg
5	2	dos	alto-gra
–	7, 8	dos	superior

B= bachillerato; A= universidad
(ADE= Administración y Dirección de Empresas)

A continuación explicamos las características en cada grupo y lo que ha servido para diferenciarlos, mostrando ejemplos de las respuestas de los estudiantes para ejemplificar la característica identificada.

Nivel bajo

Los 4 alumnos encuadrados en este nivel (2 de bachillerato y 2 de universidad), aunque identifican los conceptos económicos representados en dos registros diferentes, presentan dificultades con el significado de la derivada en el tratamiento en ambos registros (gráfico y algebraico) y en su uso para explicar los conceptos económicos. Los descriptores de los comportamientos asignados han sido dificultades en el tratamiento de ambos registros y escasa capacidad de conversión entre registros (sólo del algebraico al gráfico en determinadas tareas). Estos estudiantes desde la perspectiva de la comprensión de la derivada identifican elementos matemáticos pero sin ser capaces de establecer relaciones. Por ejemplo, el estudiante A1 de 1º de ADE en la tarea 4 da la definición de producto marginal, pero es incapaz de representarlo correctamente, no representando la función inicial del producto total.



Fuente: **Tarea 4; Alumno A1.**

El estudiante no intenta calcular las expresiones algebraicas ni aplica la derivada para explicar la relación entre estos dos conceptos y funciones económicas en ninguno de los registros gráfico o analítico. Al no representar la función inicial, pierde todo el soporte para representar gráficamente y obtener la expresión del producto marginal no usando la idea de derivada para obtener y explicar las funciones económicas demandadas. Este comportamiento es prototípico de los alumnos de este grupo mostrando la dificultad que tienen algunos estudiantes para usar los significados de la idea de derivada como una medida de cambio para explicar las relaciones entre las dos funciones que modelizan situaciones económicas (la función producto total y la función producto marginal).

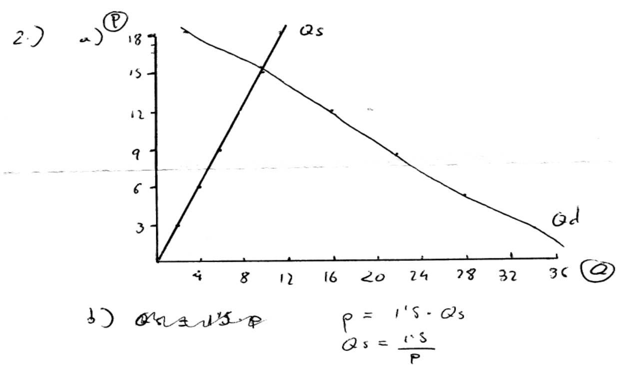
Nivel intermedio

En este nivel están situados dos alumnos de bachillerato que comparten características del anterior nivel y del siguiente desde el punto de vista de su capacidad para identificar las nociones económicas representadas en dos registros diferentes pero teniendo dificultades en relacionar los diferentes significados de la idea de derivada para explicar la situación económica. Lo hemos distinguido del nivel anterior, ya que en este caso los estudiantes, sin llegar a realizar tratamientos en algunos de los registros ni conversiones, muestran en determinadas tareas algunos éxitos que creemos indican un proceso de desarrollo mayor. Las características de los estudiantes que hemos situado en este nivel intermedio son:

– Cierta capacidad de conversión entre registros, tanto en un sentido como en otro.

– Solamente entienden y aplican los significados de la derivada como modelización de determinadas situaciones (conceptos económicos) en determinadas situaciones o contextos pero no en otros.

Por ejemplo, el estudiante B7 de bachillerato en la tarea 2 representa bien las gráficas relativas a las funciones de la demanda y la oferta desde la tabla dada, demostrando así que utilizando la información (punto, punto) dada por la tabla es capaz de realizar la conversión al registro gráfico. Sin embargo, tiene dificultades en obtener las expresiones algebraicas. En la «función de oferta» consigue dar la pendiente (en la entrevista dijo que la obtuvo «por intuición»), no completando la función de demanda; observamos que como en casi todas las tareas de este nivel el alumno lo consigue sólo en parte. Este tipo de comportamientos fue situado en un nivel intermedio en el manejo de los significados de las ideas matemáticas en contextos económicos.



Fuente: **Tarea 2; Alumno B7.**

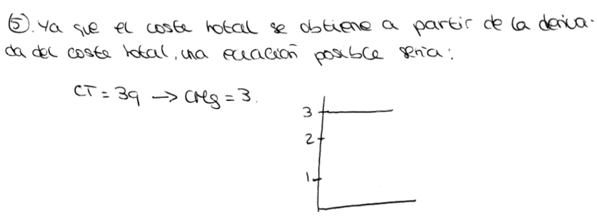
Nivel alto-alg

Es el más numeroso en cuanto a número de alumnos, un total de 8 (4 de ADE y 4 de bachillerato). Los estudiantes situados en este nivel utilizan el concepto de derivada con un mejor tratamiento en el registro algebraico que en el gráfico. Estos estudiantes pueden establecer asociación entre el registro inicial y otro distinto pero tienen dificultades en el uso de los significados de la idea de derivada para explicar las diferentes características de las situaciones económicas. Las características de este nivel son:

– Buen tratamiento del registro algebraico en la utilización de la derivada; derivan bien y calculan correctamente tasas de variación.

– Realizan conversiones desde el algebraico al gráfico, aunque no así al contrario.

Por ejemplo, el estudiante B4 (bachillerato) necesita del registro algebraico en una tarea gráfica sin llegar a la solución. Gráficamente vuelve a dibujar una función igual que la daba en la tarea correspondiente al coste marginal; sin embargo, y con un ejemplo algebraico que el alumno inventa por sí mismo, da una expresión correcta de la función que se pide (coste total) pero no lo lleva a término en la gráfica. Por tanto, este estudiante (B4) aplica y utiliza la derivada para comprender ambos conceptos de coste pero solamente en el registro algebraico, presentando dificultades en el gráfico. Este comportamiento fue el más numeroso entre los estudiantes de ambos grupos y permitió identificar la dificultad que algunos alumnos tienen en el manejo del registro gráfico frente al manejo del registro algebraico.



Fuente: **Tarea 5; Alumno B4.**

Nivel alto-gra

Es el menos numeroso con tan sólo dos alumnos (uno de ADE y uno de bachillerato). Los estudiantes situados en este nivel muestran un mejor tratamiento en el registro gráfico que en el algebraico. Las características en este nivel son:

– Buen tratamiento del registro gráfico en la utilización de la derivada; interpretan correctamente los conceptos económicos a través del concepto geométrico o gráfico de la derivada.

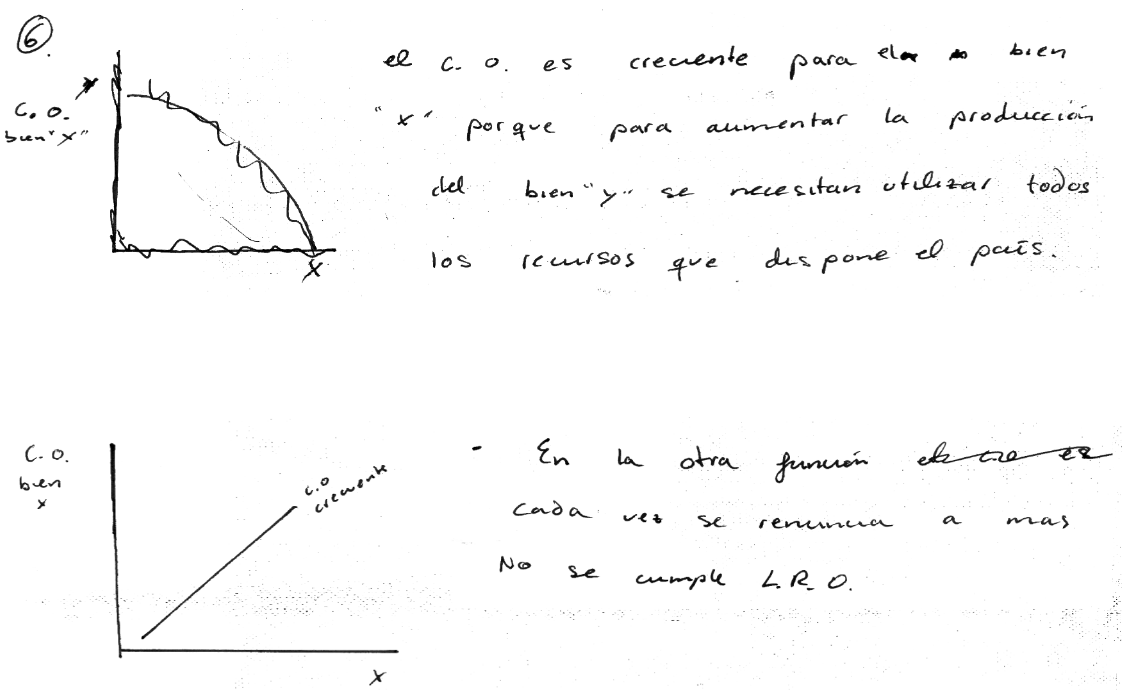
– Presentan dificultades a la hora de utilizar la derivada en el registro algebraico (problemas al derivar y calcular tasas de variación).

– Realizan conversiones entre ambos registros indistintamente, con algunas dificultades desde el algebraico al gráfico.

– Muestran una muy alta compresión de la derivada en los conceptos económicos.

Este nivel viene caracterizado por la discriminación por parte de los estudiantes de las diferentes nociones económicas dadas por el registro gráfico manejando las relaciones entre los elementos matemáticos del concepto de derivada que facilitan el uso de los significados de la idea de derivada en la explicación de las situaciones económicas.

Por ejemplo, en la tarea 6, el estudiante B5 (alumno número 5 de bachillerato) dibuja una gráfica creciente a partir de la función inicial, y la justifica indicando que el concepto de coste de oportunidad es cada vez mayor debido a que la función inicial es cóncava como señaló en la entrevista. En este caso el estudiante traslada el hecho de que el coste de oportunidad es creciente en una función inicial cóncava a una sola función que recoge lo anterior (pasa de la derivada en un punto a la función derivada). Es importante reseñar el hecho de que esta función derivada que se les pide no la conocen como tal, es decir, no la han aprendido más que como un punto (derivada en un punto), de ahí la importancia de este comportamiento durante la resolución del problema: aplicar el concepto de derivada en el registro gráfico para modelizar a través de una función un concepto económico.



Fuente: **Tarea 6; Alumno B5.**

Nivel superior

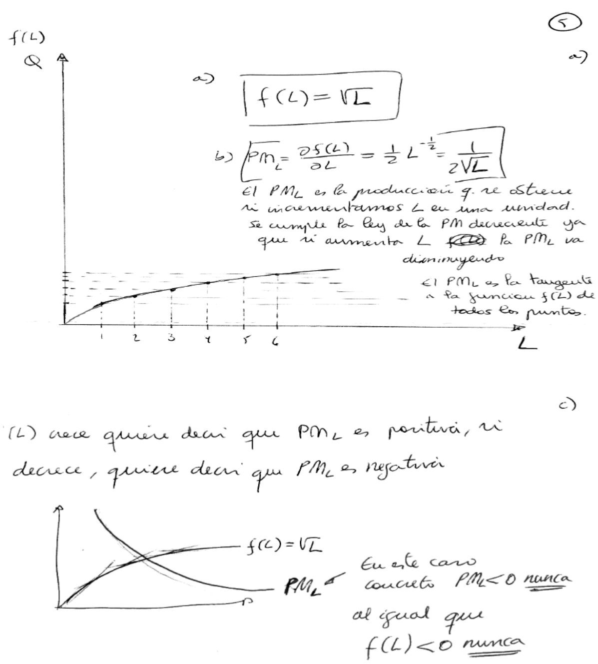
Dos alumnos del grupo de ADE presentan las siguientes características en la utilización del concepto de derivada en ambos registros. Las características son:

– Aplican las reglas de derivación en el registro algebraico (derivan bien y calculan sin dificultades las tasas de variación medias).

– Uso adecuado del significado geométrico de la idea de derivada en las tareas donde aparece solamente el registro gráfico.

– Realizan conversiones en ambos sentidos entre ambos registros.

Para este nivel volvemos a mostrar otro ejemplo de la tarea 4. El estudiante A7 (alumno 7 de ADE) obtiene gráficamente ambas funciones, relaciona sus formas diciendo que si la función de producción, f (L), crece entonces la función producto marginal (PML = PMg) es positiva y al contrario. En este sentido el estudiante tiene en cuenta también la información que le proporciona cada una de las funciones, y obtiene las expresiones algebraicas de ambas, mostrando comprender y utilizar los significados de la función derivada y su relación con la función de la que procede. Es capaz de obtener la función producto marginal (PML = PMg) que es la función derivada tanto gráfica como algebraicamente a partir de la función de producción f (L) (con L = número de trabajadores) que es la inicial. Gracias al uso correcto de los significados del concepto de derivada y a su capacidad de conversión entre registros consigue obtener, explicar y relacionar la forma las dos funciones.



Fuente: **Tarea 4; Alumno A7**

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Observando los niveles generados y sus características podemos identificar las siguientes ideas:

i) Existe entre los estudiantes un predominio del manejo del registro algebraico.

ii) El manejo del registro gráfico en los alumnos de ADE es mayor que en los de bachillerato.

iii) El buen manejo de ambos registros es el que garantiza un mayor grado de comprensión y aplicación de la derivada como concepto matemático en la mejor comprensión de los conceptos económicos, como muestran los alumnos 7 y 8 de ADE (nivel superior).

Con respecto a la primera idea, de los 12 alumnos situados en un nivel alto o superior, 8 de ellos (66%) están situados en el nivel alto-alg. Este hecho puede interpretarse si analizamos las características de los currículos actuales de matemáticas en el bachillerato, en los cuales el registro algebraico sigue siendo el predominante al presentarse los contenidos matemáticos de manera predominante en éste. Con respecto a la segunda idea, y a pesar de lo comentado anteriormente, existen importantes diferencias entre los alumnos de bachillerato y universidad en el tratamiento del registro gráfico, tanto dentro del nivel alto-alg como en el resto de niveles. Con respecto a las características de este nivel, formado por cuatro estudiantes de bachillerato y 4 de universidad, si bien es cierto que los estudiantes de universidad dominan de forma predominante el registro algebraico no es menos cierto que el tratamiento que muestran del gráfico y las conversiones del gráfico al algebraico son sensiblemente mejores que las mostradas por sus compañeros de bachillerato. Además, los dos alumnos situados en el nivel superior son de universidad, hecho que puede apoyar el que los estudiantes universitarios dominan más el registro gráfico. Si observamos los currículos, hemos de destacar el hecho de que la economía es una ciencia con contenidos eminentemente gráficos, donde el paralelismo entre registro gráfico y algebraico es necesario al introducir los conceptos económicos. Estos alumnos universitarios tienen más recorrido en este sentido, lo cual puede justificar estos datos con respecto a los de bachillerato, quienes arrastran déficits matemáticos importantes derivados del no tratamiento de otros registros distintos al algebraico y también debido al hecho de llevar poco tiempo aprendiendo economía.

De estas dos situaciones, y haciendo mención a la tercera idea que antes destacábamos, se puede indicar que el mejor modo de usar la idea de derivada en situaciones económicas consiste en abordar todos los registros posibles y transfiriendo de uno a otro indistintamente y desde una perspectiva eminentemente práctica (es decir, en contextos económicos). Por otra parte, desde el punto de vista del papel de las conversiones y tratamiento de los registros, la comprensión y uso del concepto matemático de la derivada en el aprendizaje de la economía será tanto más avanzada cuanto mayor sea la capacidad de realizar tratamientos y conversiones entre los registros algebraico y gráfico, sin confundirlo con su representación en cualquiera de ellos. Ello conllevará una mejor comprensión de los conceptos económicos modelizados. Así lo muestra la manera en la que los alumnos A7 y A8 han resuelto las diferentes tareas propuestas. No se puede confundir la derivada con una determinada forma de representación en un registro (por ejemplo f'(x) o CMg en el algebraico, o una determinada forma de la función en el gráfico). El éxito en este tipo de tareas puede relacionarse con el tratamiento y la conversión en los distintos registros y sin asociar el concepto a una determinada representación.

En este sentido, es importante observar el hipotético camino a recorrer hasta alcanzar el nivel superior, es decir, debemos detenernos en cuáles son los nexos de unión entre un nivel y otro, y buscar los mecanismos que hacen posible el paso de uno a otro. Consideramos que es un proceso de aprendizaje continuo, al estilo del que mostraron Elia y Spyrou (2006), al afirmar que existen tres niveles conceptuales y semióticos de entendimiento del concepto de función, los cuales están relacionados con la habilidad de utilización en diferentes sistemas de representación; estos tres niveles conceptuales son concebidos como un proceso continuado en el aprendizaje. En este sentido nosotros podemos trasladar estas características al caso de la comprensión de la derivada y su relación con el desempeño de las tareas económicas. Desde esta perspectiva, los cinco niveles identificados en nuestra investigación podrían agruparse en tres, como concluimos en la parte de análisis, en donde dos de ellos contienen dos subniveles:

– Nivel 0R: niveles bajo e intermedio.

– Nivel 1R: niveles alto-alg y alto-gra.

– Nivel 2R: nivel superior.

Duval (2006-b), al analizar la importancia de las conversiones, estableció tres niveles en la capacidad de los alumnos de realizarlas: nivel superficial (*Surface level*), nivel intermedio (*Intermediate level*), nivel profundo (*Deep level*). En el contexto de la comprensión de la idea de derivada se han identificado distintos niveles: Nivel INTRA, Nivel INTER, Nivel TRANS (Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2006) dados por la manera en la que los estudiantes son capaces de integrar los diferentes registros y traslaciones entre ellos. Estos dos trabajos muestran la importancia que tiene la capacidad de relacionar y tratar un concepto matemático en diferentes registros y con otros conceptos. En nuestra investigación se muestra cómo los estudiantes con mayor habilidad para relacionar el concepto matemático con el económico en diferentes registros son los que alcanzan un mejor entendimiento y aprendizaje de ambos. Así, en el contexto del uso de la idea de derivada en la resolución de situaciones económicas existe cierta correspondencia entre la clasificación de niveles de nuestra investigación y las de Duval (2006b) y Sánchez-Matamoros (2006).

Desde la información reunida hasta estos momentos, el avance del nivel 0R (nivel bajo-intermedio) al nivel 2R (superior) viene caracterizado por la mejora en el tratamiento de ambos registros por separado y, sobre todo, en sus conversiones así como por la naturaleza de las relaciones entre los diferentes elementos matemáticos del concepto de derivada (tasa de variación media, derivada en un punto y función derivada). De ahí que sea fundamental dar una especial importancia al tratamiento del registro gráfico (por estar discriminado en cierta medida en el sistema educativo por el registro algebraico) y a las conversiones desde el gráfico al algebraico al mismo tiempo que se potencian las relaciones entre las ideas de tasa de variación, derivada en un punto (como un paso al límite) y la función derivada (como un operador). Para conseguir estas conexiones y poder avanzar hasta el nivel 2R, los conceptos económicos deberán enfatizar el uso de los significados que la idea de función derivada tiene en los dos registros, de manera que se afiance el nivel correspondiente al 0R (nivel superficial desde el punto de vista de Duval –2006– e Intra desde el punto de vista de Sánchez-Matamoros –2006). En este punto entrarían en juego las conversiones; puede que los alumnos se vayan decantando en su proceso de aprendizaje por un mayor dominio de uno de los registros (de ahí que el nivel 1R se bifurque en alto-alg y alto-gra); el último paso será perfeccionar el tratamiento y conversiones de los registros en que el alumno tenga más dificultades, que generalmente serán el gráfico y conversión del gráfico al algebraico.

Por ejemplo, para una mejor comprensión del concepto de noste marginal y su relación con el CT (que muestra la relación entre la función derivada y la función indicando cómo crece el coste al aumentar la producción), el nivel 0R se encargaría de presentarlos en los diferentes registros, el nivel 1R fomentaría los tratamientos de ambos en los dos registros, y el nivel 2R iniciaría las conversiones de los dos de un registro a otro indistintamente. De este modo, al tiempo que se alcanza una mayor comprensión de aquéllos, se construye una mejor comprensión del concepto de derivada desde todos los registros, y con ella los conceptos económicos que modeliza (CT-CMg, FP-PMg, FPP-C.O., C.I-R.M.S., Isocuanta-R.M.S.T.), generando un *feed-back* entre el concepto puramente matemático y el económico.

De la misma manera que contrastó Hähkiöniemi (2006), quien identificó numerosas dificultades en los estudiantes al analizar cómo percibían la derivada desde la gráfica de una función y qué tipo de representaciones usaban para ello, los alumnos de Economía en bachillerato y en los estudios de ADE en su inmensa mayoría conciben la derivada como un instrumento mecánico para contestar o resolver problemas, no llegando a entender qué es lo que hacen ni qué les aporta un concepto como es la derivada de una función en la comprensión de la teoría y práctica microeconómicas. Otra de las conclusiones de esta investigación es la constatación de la naturaleza compleja del uso de los conceptos matemáticos en las situaciones económicas y las características de cómo se van desarrollando las capacidades de los estudiantes de usarlos. Esta complejidad ha podido ser puesta de manifiesto al integrar dos tipos de información en nuestra manera de interpretar los datos. Por una parte, la perspectiva cognitiva dada por los planteamientos de Duval, y por otra la información desde las investigaciones sobre pensamiento matemático avanzado. Posiblemente este tipo de enfoques son los que pueden proporcionar nuevas maneras de entender los nuevos problemas de investigación educativa que plantean los contextos interdisciplinares como han sido en este caso el aprendizaje de conceptos de microeconomía y los recursos proporcionados por la investigación en didáctica de las matemáticas.

A partir de estas consideraciones podemos generar algunas implicaciones desde nuestra investigación en el sentido de que el aprendizaje de los conceptos económicos podrá tener más éxito en la medida que se enfaticen los significados de los conceptos matemáticos que ayudan a modelizar las situaciones económicas y por tanto en la medida que se incida más en la relación y dominio de ambos registros.

Posiblemente sea necesario en una futura investigación utilizar una muestra más amplia de estudiantes para definir con mayor precisión los niveles aquí encontrados y sus características y encontrar evidencias de los mecanismos de cambio de un nivel a otro. Sin embargo, creemos que el estudio de la relación entre la manera en la que se comprenden los conceptos matemáticos y su relación con la manera en la que los estudiantes de Economía usan estos significados para modelizar y entender las situaciones económicas es un camino que puede aportar beneficios para la educación económica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALLARD, C.L. y JOHNSON, M.F. (2004). Basic Math Skills and Performance in an Introductory Economics Class. *Journal of Economic Education*, 35(1), pp. 3-23.

BUTLER, J.S., FINEGAN, T.A. y SIEGFRIED, J.J. (1998). Does more calculus improve student learning in intermediate micro- and macroeconomic theory? *Journal of Applied Econometrics,* 13(2), pp. 185-202.

CLEMENT, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability, en Kelly, A.E. & Lesh, R.A. (eds.), Handbook of research design in mathematics and science education (pp. 547-590). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

COHN, E., COHN, S., HULT, R. E., BRADLEY, J. y BALCH, D.C. (2000). Improved knowledge of mathematics and enrolment in a principles of economics course: is there a link? *International Journal of Mathematical Edcuation in Science and Technology,* 31(2), pp.195-203.

DUVAL, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels Paris: Peter lang [traducción: *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*].

DUVAL, R. (2006a). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(1), pp. 45-82.

DUVAL, R. (2006b). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* 9(1), pp. 143-168.

ELIA, I. y SPYROU, P. (2006). How students conceive function: a triadic conceptual-semiotic model of the understanding of a complex concept. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 3(2), pp. 256-272.

GAGATSIS, A. y SHIAKALLI, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology,* 24(5), pp. 645-657.

GAGATSIS, A., ELIA, I. y MOUSOULIDES, N. (2006). Are registers of representations and problem solving processes on functions compartmentalized in students thinking? *Department of Education,* University of Cyprus.

GARCÍA, L., AZCARATE, C. y MORENO, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 9(1), pp. 85-116.

GOLDIN, G. (2000). A scientific perspectives on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A.E. Kelly & R.A. Lesh (Eds.), Handbook of research design in mathematics and science education (pp. 517-546). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

GUZMÁN, F. y DUVAL, R. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa,* 1(1), pp. 5-21.

HABRE, S. y ABBOUD, M. (2005). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior,* 25 (2), pp. 57-72.

HÄHKIÖNIEMI, M. (2006). Associative and reflective connections between the limit of the difference quotient and limiting process. *Journal of Mathematical Behavior,* 25(2), pp.170-184.

HÄHKIÖNIEMI, M. (2006). Perceiving the derivate: the case of Susana. *Nordic Studies in Mathematics Education,* 11(1), pp. 51-73.

HEY, J.D. (2005). I Teach Economics, Not Algebra and Calculus. *Journal of Economic Education*. 36(3), pp. 292-304.

LLINARES, S. y ROIG, A.I. (2008). Secondary School students' construction and use of mathematical models in solving word problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 6 (3), pp. 505-532.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. (2004). *Análisis de la comprensión de los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto).* Tesis doctoral inédita. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Sevilla, España.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, G., GARCÍA, M. y LLINARES, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las ciencias*, 24(1), pp. 85-98.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, G., GARCÍA, M. y LLINARES, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa –RELIME*, vol. 11(2), pp. 267–296.

The usefulness of derivative concept in learning economic concepts by high school and university students

Ariza, Ángel y Llinares, Salvador
Departamento de Formación e Innovación Didáctica de la Facultad de Educación de la Universidad de Alicante.
angelariza@merlin.fae.ua.es
sllinares@ua.es

Abstract

Many scientific domains deal with mathematical concepts to construct their postulates. Therefore, in order to understand them it is important to consider how mathematical concepts are used to model the situations. Specifically, the mathematic concept of the derivate function is a key concept in the understanding of microeconomic concepts. This context has supported the emergence of research about the relationships between the understanding of economic concepts and how the mathematical concepts are used in modelling economic situations and how economics teachers were able to link mathematical and economical concepts in teaching.

In this study we analyzed the use of the derivate in microeconomic concepts among high school students (17 or 18 years old) and 1st year business administration degree students. Specifically, we address the follow research questions:

– How do high school and university economics students use the derivative concept in solving economic problems?

– What performance levels and understanding of the derivative concept can be identified when high school and university students solve economic problems?

Via a questionnaire composed of 6 microeconomic tasks and the interviews with the students, we analysed how students use the graphical and analytical meanings of the derivate concept in solving economic problems. We analysed the answers using as a theoretical reference Duval's theoretical information and specifically the relationships between different representation modes and the three levels of cognitive processing: surface level, intermediate level, and deep level. According to Duval, there are two typical features of mathematic knowledge: first, the activity of solving problems requires the use of several semiotic registers of representation. Second, mathematic objects are not accessible by perception; that is the reason why designating them always requires the use of one mode of representation. The best manifestation of acquiring knowledge is to be able to relocate the learned concepts into new representation modes; this process implies the development of conversion.

We identified five levels of performance considering how students used the different translations between the representation modes and conversions within the same representation.

We linked these five levels of performance to different development levels of the derivative concept when solving economics problems. The findings display the difficulties that students have by using the meanings of the derivate concept, mainly in the graphical representation, when they are solving economics problems.

We were able to identify the following characteristics from the different levels of performance:

i) There was an over-use of algebraic register among students.

ii) University students used the graphic register more than high school students.

However, we discovered that the synthesis of both registers (graphic and algebraic) supports the understanding and use of the derivative concept as a mathematical concept in the modelling of economic concepts. The students conceived the derivative as a mechanical procedure to apply to the activities and they did not understand how this concept contributes to the management of economic situations

The marginalization of the graphic representation and favouring of the algebraic one in the mathematics curriculum and the limited relevance given to conversion tasks in teaching economic concepts could explain these results. From these findings, we think that the learning of economic and mathematic concepts would improve if the teaching process paid due attention to the graphic and algebraic representation modes.

[Artículo recibido en octubre de 2008 y aceptado en octubre de 2008]