

Una ingeniería didáctica para la enseñanza de unidades temporales en educación primaria: el reloj digital

Blanca Arteaga-Martínez¹, Noemí Pizarro², Juan Miguel Belmonte³

Recibido: Septiembre 2021 / Evaluado: Febrero 2022 / Aceptado: Marzo 2022

Resumen. Introducción. Las peculiaridades de la coordinación del subsistema de unidades día-hora-minuto en la enseñanza de las unidades de tiempo ha sido un tema poco abordado en la investigación en didáctica de las matemáticas. El objetivo es aportar una descripción de su aprendizaje con estudiantes desde la identificación de procesos y confusiones. **Método.** La investigación, de enfoque cualitativo, describe los resultados de implementación de una ingeniería didáctica, diseñada para el aprendizaje de unidades temporales a partir de la construcción de un reloj digital. La muestra la conforman 67 estudiantes de nueve años de España y Chile, que permiten comparar los datos entre ambos países con tradiciones similares en la enseñanza de los contenidos de medida. **Resultados.** Se muestra la necesidad de un conocimiento profundo del sistema de unidades temporales para la comprensión de la magnitud tiempo, dado su carácter no decimal. **Discusión.** Los errores provienen tanto de aspectos aritméticos como propiamente verbales, al utilizar términos del lenguaje natural sin una enseñanza específica de los mismos.

Palabras clave: ingeniería didáctica; tiempo; instrumentos de medida; educación primaria; reloj digital

[en] Didactic engineering for teaching of time units in elementary education: the digital clock

Abstract Introduction. A little addressed topic in research of mathematics education has been the peculiarities in coordination of the subsystem of units day-hour-minute in the teaching of time units. The aim to describe of its students, starting with the identification of processes and confusions. **Method.** Research based on a qualitative approach describes the implementation results of a didactic engineering designed for the learning of temporal units, using the construction of a digital clock as the main resource. The sample is composed by 67 nine-year-old students from Spain and Chile, which makes it possible to compare the results in both countries, with similar traditions in the teaching of measurement contents. **Results.** As a conclusion, we point out the need of an in-depth knowledge of the system of time units for the comprehension of the time magnitude, given its non-decimal character. **Discussion.** Confusions or mistakes come from both arithmetic aspects and strictly verbal ones, by using natural language terms without any specific teaching of such terms.

Keywords: didactic engineering; time; measuring instruments; elementary education; digital clock

Sumario. 1. Introducción. 2. La enseñanza de las unidades del tiempo. 3. Metodología. 4. Resultados de la experiencia didáctica. 5. Conclusiones. 6. Referencias bibliográficas.

Cómo citar: Arteaga-Martínez, B.; Pizarro, N.; Belmonte, J. M. (2022) Una ingeniería didáctica para la enseñanza de unidades temporales en educación primaria: el reloj digital. *Revista Complutense de Educación*, 33(4), 551-563.

¹ Universidad Nacional de Educación a Distancia, UNED (España)
E-mail: blanca.arteaga@edu.uned.es

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1079-1526>

² Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (Chile)
E-mail: noemi.pizarro@umce.cl

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6743-2145>

³ Universidad Complutense de Madrid (España)
E-mail: belmonte@ucm.es

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1529-9776>

1. Introducción

La humanidad desde la antigüedad ha necesitado medir el tiempo, independientemente de poder ser considerado como una construcción mental. Los conceptos asociados con unidades de medida del tiempo son fundamentales para la vida diaria, que sin embargo, tienen directrices curriculares superficiales para su enseñanza y aprendizaje (Thomas et al., 2016).

La enseñanza del tiempo es uno de los contenidos más complejos para tratar en las aulas (Van Steenbrugge et al., 2010). Aprender el tiempo involucra el trabajo del sentido numérico, espacial y temporal, conteo, habilidades lingüísticas y fracciones (Sarama & Clements, 2009). Además, comprender la división de los patrones temporales permite anticipar eventos futuros (Friedman, 2000) y recordar tiempos pasados (Hudson & Mayhew, 2011).

A pesar de su complejidad e interés, la investigación en educación matemática relacionada con la enseñanza del tiempo ha sido exigua. Por ello es importante que se investigue sobre prácticas de enseñanza centradas en el aprendizaje del tiempo, habilidades numéricas implicadas (Lambert et al., 2020), su representación (Tillman et al., 2018) o instrumentos de medida (Pizarro et al., 2020).

Belmonte (2007) elaboró y experimentó una ingeniería didáctica con estudiantes de nueve años en España, para analizar algunas características de la coordinación del subsistema de unidades día-hora-minuto a partir del uso de un reloj digital. Se observó que los estudiantes necesitaron manipular el reloj para ir poco a poco determinando las cifras necesarias y suficientes para hacerlo funcionar. Los cambios de las unidades eran conocidos, pero no fueron suficientemente operativos en esta tarea. También se observaron consolidados los aspectos sociales de las expresiones horarias, pero presentaron grandes dificultades para incorporarlas en procedimientos aritméticos, especialmente cuando la referencia era el mediodía y la madrugada, que para ellos no quedaban claramente definidas.

Así nuestro estudio surge a fin de comparar los resultados de la investigación de Belmonte (2007) con datos recogidos en la actualidad, desde una muestra de estudiantes chilenos. La Reforma Educacional Chilena de principios de los años noventa considera elementos muy similares a la educación española, tanto en lo curricular como en la propuesta pedagógica (Valenzuela et al., 2008). Por ello, ambos grupos de estudiantes tienen características análogas de acuerdo a edad, conocimiento de unidades de tiempo y manejo de la lectura del reloj. El objetivo es verificar si los resultados mencionados son o no similares, tras más de 11 años, donde el reloj digital parece haber desplazado al reloj analógico.

2. La enseñanza de las unidades de tiempo

Una de las principales ideas acerca de cómo se construye el tiempo corresponden a los trabajos de Piaget y Fraisse. Este último en 1967, clasifica el conocimiento del tiempo en tres facetas: el tiempo vivido, la percepción del tiempo y el control del tiempo. Recientemente, Earnest (2019) se refiere al tiempo como un elemento invisible e intangible que suele representarse mediante intervalos de duración.

El tiempo al ser indisoluble de los contenidos reales, físicos o psicológicos, no se aísla como una cualidad simple, sino que supone una resultante. Y es precisamente aquí donde se presentan diferencias en los resultados de la investigación. Para Piaget, el tiempo es el resultante de la coordinación de movimientos a distintas velocidades, es decir, el tiempo es una consecuencia de la conexión entre espacio y velocidad.

Por el contrario, para Fraisse (1967) tiempo, espacio y velocidad son tres intuiciones elementales que tienen una existencia independiente e identificable, siendo el tiempo una cualidad simple, asegurando que los niños, desde los 5 años ya tienen intuiciones de duración. Posteriormente, en la década de los ochenta, diversos estudios muestran que los niños pueden cuantificar duraciones por medio de información temporal sin necesidad de distancia y velocidad (Levin et al., 1984; Richie & Bickhard, 1988).

Los sistemas convencionales de medida del tiempo juegan un papel especialmente importante en la adquisición del concepto de tiempo. Es quizá uno de los aspectos más distintivos con respecto a la comprensión de otras magnitudes, en los que el sistema convencional de medida no juega un papel muy relevante en los primeros aprendizajes. La necesidad de utilizar distintos factores para realizar razonamientos temporales hace que los sistemas convencionales de medida de tiempo supongan por sí mismos herramientas tempranas para el manejo de tareas temporales. Gran parte de las limitaciones que los niños encuentran en sus razonamientos temporales van disminuyendo con el conocimiento de los sistemas convencionales, observándose un importante desarrollo en la etapa escolar, tras los aprendizajes más formales sobre las nociones temporales; sin embargo, expresar sucesiones por ejemplo de días-meses no asegura que se comprenda el ciclo de la secuencia (Friedman, 1990).

Friedman (1982) asegura que el sistema de unidades temporales se compone de varios subsistemas, que son adquiridos en paralelo, y cuya coordinación no se realiza de manera operativa hasta los nueve años aproximadamente. Otros estudios, por el contrario, observan que el aprendizaje del tiempo depende de la enseñanza, no de la madurez (Hodkinson, 2004; Monroe et al., 2002). Las unidades de tiempo pueden presentar una doble naturaleza: ordinal y cíclica.

Una de las principales dificultades de enseñar el tiempo es su no tangibilidad (Burny et al., 2012; Hurrell, 2017; Russell & Kamii, 2012). Los estudiantes deben desarrollar conciencia del tiempo, comprensión de la sucesión del

tiempo y duración del tiempo, para utilizar herramientas para medir el tiempo (Thomas, 2018). Este desarrollo debe sustentarse en la relación entre horas y minutos, relación que va más allá de los procedimientos para leer la hora en un reloj, así como de referentes de las unidades de medida de las que los estudiantes se apropien, por ello los objetivos curriculares deberían considerar actividades más allá de leer la hora y los minutos del día (Earnest, 2017).

El uso del reloj tiene un papel principal en la construcción de las ideas del tiempo, dado que su homogeneidad resta subjetividad de las duraciones (Fraisie, 1967). Cuando el estudiante se apropia de la comprensión del movimiento del reloj de arena o de las manecillas del reloj, comprobando que sobre estos instrumentos se producen cambios con periodos equivalentes, deja de basarse únicamente en el conocimiento sustentado en experiencias personales. Además, leer el reloj es una oportunidad didáctica para trabajar con sistemas numéricos no decimales, como el sexagesimal; fracciones y patrones numéricos dentro de un contexto de coordinaciones temporales (Friedman & Laycock, 1989).

3. Metodología

La metodología de trabajo es de tipo cualitativo descriptivo, y se enmarca en los principios de la ingeniería didáctica (Barquero et al., 2018). Se diseñan y evalúan secuencias de enseñanza justificadas teóricamente, con la intención de desencadenar la aparición de algunos fenómenos educativos y desarrollar recursos de enseñanza científicamente probados (Artigue, 2011).

La ingeniería didáctica se considera un esquema experimental sustentado en los logros en el aula, es decir, en el concepto, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza (Artigue, 1996, citada en Sampaio & Batista, 2018). La elección radica en su capacidad de validación interna, mostrando un análisis a priori y a posteriori de la experimentación realizada (Belmonte, 2007), conectando el diseño teórico de la didáctica con la implementación en la práctica del aula.

El profesor diseña la situación para lograr unos objetivos dando lugar a dos interacciones independientes, definidas entre el alumno y el medio, o el alumno y el docente (Artigue, 1995).

La ingeniería didáctica se reconoce en dos niveles: la micro y la macroingeniería. Las investigaciones micro sostienen como objetivo el estudio de un tema en particular (Sampaio & Batista, 2018). En nuestro caso las unidades temporales, que se trabajan en el aula y son consideradas desde la complejidad del fenómeno en la clase.

3.1. Diseño de la secuencia didáctica

El reloj digital es uno de los instrumentos de medida del tiempo que tiene una presencia en la cotidianidad del niño. La imagen de esta medida es un número en la pantalla, a diferencia de lo que sucede con los relojes analógicos, que muestran una marca que necesita ser leída.

En España y Chile se ha incrementado la presencia del reloj en los currículos oficiales, sin embargo, parece que se ha hecho desde un tratamiento no contextualizado (Díez et al., 2016). La idea de la transposición didáctica es redimensionar matemáticamente la lectura de las horas, que posiblemente ha sido adquirida solo en ámbitos sociales, para que los estudiantes comprendan y utilicen su significado como imagen de la aplicación de la medida. Por lo tanto, el objetivo general de la secuencia es consolidar algunas de las características del subsistema de unidades temporales día-hora-minuto. La ingeniería didáctica propone 4 fases de trabajo (Artigue, 2015) recogidas en la Tabla 1.

Tabla 1. Fases de la ingeniería didáctica

Fase	Denominación	Características	Registro
1	Análisis preliminar	Se consideran investigaciones sobre la enseñanza para el aprendizaje del tiempo y su epistemología. Se establecen los objetivos específicos.	Se elabora un marco teórico desde la investigación y teorías previas, y se plantean los objetivos de la secuencia didáctica.
2	Análisis a priori de las situaciones propuestas en la secuencia didáctica	El investigador, guiado por un análisis preliminar, define algunas variables relevantes para el problema estudiado.	Se analizan las distintas variables didácticas de la situación, recogido en el apartado del diseño de la secuencia.
3	Experimentación	Es la puesta en escena de la fase anterior, desde que profesor, estudiantes y situación de enseñanza se ponen en contacto.	Es la fase de evidencias. Esta fase fue grabada en vídeo, tanto en España como en Chile.
4	Análisis y evaluación a posteriori	En esta etapa, se lleva a cabo el procesamiento de datos, mediante la selección de los datos más relevantes para el análisis a posteriori. Es la confrontación de los dos análisis a priori y posteriori.	Recoge el análisis del proceso desde una perspectiva evaluadora. Se puede observar en el apartado de resultados de la experiencia didáctica.

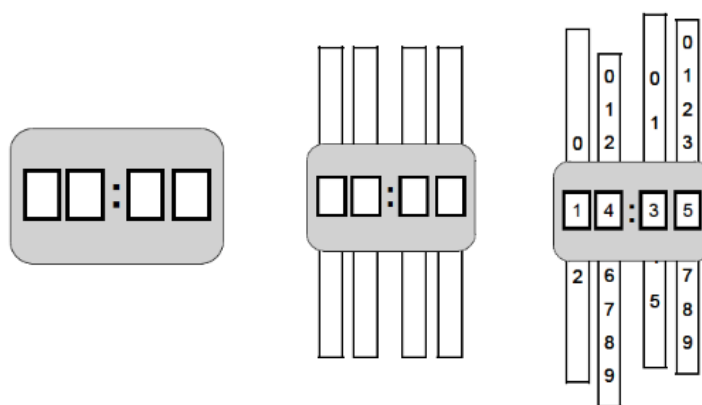
El reloj analógico parece adaptarse mejor a nuestro día a día que el digital, sobre todo cuando el niño inicia el aprendizaje del tiempo como ciclo, donde el reloj facilita marcas desde la posición de las manecillas (Earnest et al., 2018), y la propia noción de ciclo. Esta diferencia tiene un importante valor didáctico, dado que comprender la información del reloj obliga a los estudiantes a utilizar de manera consciente el sistema de unidades temporales (Fraisie, 1967; Friedman, 1990). Además, las lecturas horarias como posibles imágenes de la aplicación medida, pueden propiciar el trabajo aritmético en sistemas numéricos no decimales.

Considerando lo anterior, se diseñaron situaciones didácticas a partir del reloj digital, dado que exige al alumnado movilizar los cambios entre horas, minutos y segundos, así como confrontar este subsistema con el cambio de día (Friedman, 1982). Por ello, se consideraron los siguientes objetivos específicos para la actividad:

- Conocer el sistema de unidades minuto-hora-día.
- Identificar la estructura horaria del día.
- Saber traducir los distintos tipos de escrituras horarias.
- Utilizar los cambios entre las distintas unidades temporales.

Para desarrollarlos, se plantea la elaboración de un reloj digital de cartón, que cada estudiante manejará individualmente. La plantilla se construye con cartón pluma simulando un reloj digital, con cuatro agujeros rectangulares; las bandas en blanco de la misma longitud, será donde deberán colocar los números pertinentes. Las bandas pueden introducirse verticalmente pasando por las ventanas rectangulares, lo que permite poner la escritura horaria que se desee cuando las bandas contengan los números necesarios (Figura 1).

Figura 1. Material utilizado por los estudiantes con horas y minutos



Nota. Belmonte (2007, p.300).

De manera previa a la actividad se formulan algunas preguntas, para constatar que los estudiantes comprenden, según sus edades y su nivel curricular, las ideas de día, hora y minuto.

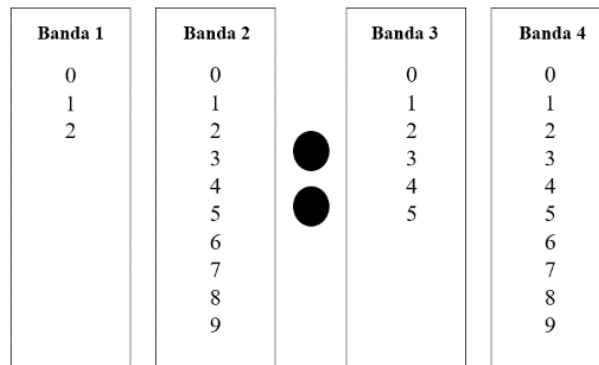
¿Cuántos minutos tiene una hora? ¿Aparecerá el “60” en el reloj?
 ¿Cuántas horas distintas puede marcar un reloj? ¿Por qué? ¿Por qué hay
 relojes de 12 horas y de 24 horas? ¿Aparecerá “24” en el lugar de las horas?
 Si el reloj sólo cuenta hasta 12, ¿aparecerá “12” en el lugar de las horas?

Especial atención se deberá prestar al hecho del cambio de día que se realiza, arbitrariamente, a medianoche. Tanto las longitudes de las bandas como la presencia o no de la plantilla son variables didácticas. Si damos bandas de distintas longitudes podemos inducir a pensar que no en todas deben considerarse la misma cantidad de cifras. Incluso se les puede entregar bandas con los dígitos del 0 al 9, y solicitar que los estudiantes analicen si hay números que no van a utilizar.

En esta experiencia se facilitan bandas iguales con los números del 0 al 9, de manera que los estudiantes son quienes deciden si los cortan o no. De esta manera nos aseguramos de que haya la misma distancia entre los números escritos.

La estrategia óptima de realización de la actividad es que los estudiantes consideren números de izquierda a derecha, diferenciando los que ponen en una u otra banda (Figura 2).

Figura 2. Estrategia óptima en la construcción del reloj



Se consideran otras estrategias posibles, como que el estudiante considere que se deben utilizar todos los dígitos, del 0 al 9, para asegurarse que todas las horas podrán escribirse. Otra es introducir las bandas e intentar, de una en una, anotar todas las escrituras horarias posibles.

Al terminar la actividad, se realiza una puesta en común con los relojes construidos defectuosamente, tanto desde lecturas incorrectas como de la escritura de horas. La puesta en común debe permitir dejar en claro las condiciones que debe cumplir un reloj digital para que puedan escribir cualquier hora. Es importante considerar las escrituras sobre 12 y 24 horas.

Para terminar, se entregan dos guías de trabajo para complementar la actividad anterior. La primera de ellas consiste en un dictado de horas (Figura 3) para posteriormente escribir la hora que indica el reloj (Figura 4).

Figura 3. Actividad en guía de trabajo 1

Las nueve menos diez de la mañana	→	□□:□□		→	1 8:2 5
Las dos y cuarto del mediodía	→	□□:□□		→	1 3:4 5
Las tres menos cuarto de la madrugada	→	□□:□□		→	0 4:5 5
Las doce menos veinte de la noche	→	□□:□□		→	1 5:4 5
Las doce y cinco de la noche	→	□□:□□		→	0 0:3 4

Nota. Belmonte (2007, p.301).

Las variables didácticas de estas dos actividades están asociadas a distintos aspectos en los ejemplos:

- Las lecturas desde 13:00 a 00:00 exigen la traducción entre ciclos 0-12 y 0-24.
- Las lecturas de XY:30 a XY:59 obligan a traducirlas a los modelos verbales sustractivos tradicionales.
- Las próximas a las doce de la noche hacen necesario el uso del conocimiento del cambio de día.
- Si los minutos no vienen expresados por un múltiplo de cinco, las lecturas exigen un poco más de atención, ya que no son las habituales.

Figura 4. Actividad en guía de trabajo 2

Las nueve menos diez de la mañana	→	□□:□□		→	1 8:2 5
Las dos y cuarto del mediodía	→	□□:□□		→	1 3:4 5
Las tres menos cuarto de la madrugada	→	□□:□□		→	0 4:5 5
Las doce menos veinte de la noche	→	□□:□□		→	1 5:4 5
Las doce y cinco de la noche	→	□□:□□		→	0 0:3 4

Nota. Belmonte (2007, p. 302).

Se plantean a priori algunas hipótesis con las posibles confusiones de los estudiantes.

- Las lecturas desde 13:00 a las 00:00 pueden confundirlas con las de 00:00 a 12:00.
- Las lecturas de XY:30 a XY:59 la traducción entre los modelos sustractivos tradicionales y las escrituras digitales pueden provocar simplificaciones del tipo “son las tres y cuarenta y cinco”.
- Las próximas a las doce de la noche pueden producir escrituras erróneas con 12:XY en lugar de 00:XY.

4. Resultados de la experiencia didáctica

La experimentación se lleva a cabo en España y en Chile (Tabla 2), en los años 2004 y 2018, respectivamente. Participan estudiantes de 9 años (4º primaria) de un colegio de cada país con características similares.

Tabla 2. Datos de los participantes

Grupo	n (estudiantes)	Minutos de grabación
España	32	120
Chile	35	180

Ambos grupos no poseen ninguna particularidad, no hay estudiantes con necesidades específicas de apoyo educativo. En ambos casos los contenidos tratados son parte del currículo vigente, han trabajado otras magnitudes como longitud, capacidad y masa y disponen de conocimientos matemáticos adecuados para abordar la ingeniería planteada.

La experimentación la realizan formadores de profesores (FP) y las maestras (M) de matemáticas de los cursos de los estudiantes (E) españoles o chilenos. Se registró en vídeo para facilitar verla en reiteradas ocasiones, y entender con detalle qué sucede (Erickson, 2006).

4.1. Desarrollo de la construcción del reloj

El trabajo se inicia con la consigna “Vais a construir un reloj digital. Para ello debéis colocar en cada una de las cuatro bandas sólo los números necesarios para que vuestro reloj pueda funcionar correctamente”.

En los grupos, los estudiantes trabajan en parejas formadas aleatoriamente. En la Tabla 3 se registra la primera reacción ante la tarea.

Tabla 3. Primeras acciones de los estudiantes al construir el reloj

España	Chile
Utilizan todos los dígitos del cero al nueve. Solo una pareja no utiliza todos los números.	Utilizan todos los dígitos del cero al nueve. Solo en una pareja no hay consenso, dado que una estudiante indica que en la fila de las horas se deben considerar los dígitos del 0 al 2.

Frente a esta confusión se facilita retroalimentación a los estudiantes, en la Tabla 4 se puede observar la intervención de los FP.

Tabla 4. Discusiones con estudiantes para comenzar a cuestionar el uso del sistema decimal

España	Chile
FP1: <i>Pero os ha dicho la maestra que tienen que estar sólo los números que hacen falta, es decir, que no haya ningún número que no sea necesario, que no sobre ninguno. Entonces, por ejemplo, ¿esta hora cuál es? (escribimos 55:55).</i>	E3: <i>Aquí no estamos de acuerdo. Se ocupan todos los números.</i>
E1: <i>Las cincuenta y cinco, cincuenta y cinco.</i>	E4: <i>No, porque los de abajo (señalando desde el 3 hacia abajo de la primera fila de las horas) no se ocupan tanto.</i>
E2: <i>No las...</i>	FP2: <i>A ver, entonces ¿cuándo usarás el 4?</i>
FP1: <i>¿Y esa hora cuál es, por la mañana o por la tarde o... ¿Yo como a esa hora, a las cincuenta y cinco, o qué hago, o estoy jugando al fútbol?</i>	E3: <i>uhm.. cuando sean a ver (mueve la banda entre el 0 y el 2)... cuando sean las 14:58 (escribiendo las 41:48)</i>
E2: <i>Ay, claro. Estos sobran.</i>	FP2: <i>Pero ahí yo no veo 14.</i>
FP1: <i>Tú verás.</i>	E3: <i>(Moviendo las bandas) Ahora sí (escribe 14:58)</i>
E2: <i>Necesitamos el uno, el dos y el cero. Uno, dos, cero, claro.</i>	FP2: <i>Entonces dime ¿Cuándo usamos el 4?</i>
E1: <i>Ya está.</i>	E3: <i>Uhm... Nunca.</i>
E2: <i>Bueno, borra todos los números, no, de estos son, son de éstos, que éstos son las horas primeras.</i>	FP2: <i>¿Entonces tendremos que hacer cortes?</i>
	E3: <i>Mm se ocupa hasta el 2.</i>
	FP2: <i>¿Y por qué no el 3?</i>
	E3: <i>Sí estas son las horas (moviendo la banda) ... a las 4 de la mañana.</i>
	FP2: <i>A ver...</i>
	E3: <i>Ella no, pero yo sí (escribe 40:00 y E4 04:00)</i>
	FP2: <i>Pero ahí dice “las 40”.</i>
	E3: <i>Ah, entonces se corta aquí (cortando después del 2)</i>

En varias parejas se observa que cuando se contextualizan los números que se utilizan en la lectura de la hora, los estudiantes dudan de sus escrituras.

La Tabla 5 recoge el registro de las confusiones observadas durante la fase de construcción del reloj.

Tabla 5. Confusiones de los estudiantes al construir el reloj

	España	Chile
Uso de todas las cifras del 0 al 9	X	X
Uso del seis en las decenas de los minutos	X	X
Uso hasta el cinco en las unidades de la hora	X	
Uso hasta el cuatro en las unidades de la hora	X	X
Usan el reloj en horario 12	X	

Se puede observar que en los dos grupos el sistema decimal se impone en la construcción del reloj. La mayoría de los estudiantes considera que hay que usar todos los números sin atender a las indicaciones de la actividad, que señalaban que únicamente se debían utilizar los números necesarios.

Una confusión recurrente es el uso del seis en las decenas de los minutos, esto radica en el cambio sexagesimal de minutos a horas, que provoca que los estudiantes coloquen el cinco en las unidades de la hora.

Otra confusión similar consiste en usar las unidades de hora sólo hasta el cuatro, con el intento de que no se pueda sobrepasar 24 en la parte correspondiente a las horas. Esto imposibilita muchas escrituras horarias y es debido al intento fallido de aplicar el cambio entre horas y días. Para poder conseguir todas las escrituras horarias posibles es necesario que figuren en las unidades de hora las cifras del cero al nueve, aunque esto permita que se puedan producir escrituras incorrectas como las 27:00 por ejemplo. En un intento de querer corregir este hecho, que no tiene alternativa, algunos estudiantes cometen esta equivocación al retirar algunas cifras de las unidades de horas.

Las confusiones fueron abordadas manipulando el reloj, haciendo aparecer escrituras que se sometían a juicio. No hubo una previsión para predecir, antes de manipular el reloj, los números necesarios para trabajar con él.

Solo un grupo, de España, utiliza un reloj de 12 horas y no de 24.

Para finalizar la primera actividad, se realiza una puesta en común (Tabla 6) para establecer el funcionamiento del reloj.

Tabla 6 . Funcionamiento de los minutos en el reloj digital

España	Chile
FP1: <i>Y ¿cuál es el número más grande que puede aparecer ahí, en esas dos casillas? (Se refiere a los minutos)</i>	FP2: Entonces ¿Las 17:80 existen?
E2: <i>El cinco.</i>	Varios estudiantes: <i>No</i>
FP1: <i>¿El cinco?</i>	E4: <i>Ahhhh....</i>
E2: <i>El cinco, y en la otra, el nueve.</i>	Varios estudiantes: <i>Se tiene que cortar</i>
FP1: <i>El cincuenta y nueve. Ya, sesenta ya no lo ponéis, ¿no lo pone nunca un reloj?</i>	E5: <i>Hasta el 5.</i>
E2: <i>No, ya pone cero, cero.</i>	E7: <i>Hasta el 6...</i>
FP1: <i>¿Por qué?</i>	Varios estudiantes: <i>Hasta el 5</i>
E2: <i>Porque pasa una hora.</i>	E9: <i>Porque después se hubiese pasado a las 18.</i>
M1: <i>Y entonces hay otro cambio, ¿no?</i>	FP2: <i>¿Cuándo pasa a las 18?</i>
	E9: <i>Cuando queda en 00</i>
	FP2: <i>¿Antes de 00 qué hay?</i>
	E7: <i>El 59.</i>
	E8: <i>Pero también se puede el 60</i>
	E7: <i>No... no se puede, queda en 00.</i>
	FP2: <i>A ver si tengo las 17:59 después ¿pongo el 60?</i>
	E8 y varios estudiantes: <i>No....</i>
	FP2: <i>¿Por qué?</i>
	E7: <i>Porque pasó una hora.</i>

En la Tabla 7 se puede observar que, en ambos grupos, la marca del 60 suscita confusión al comprender los dígitos involucrados en la lectura de los minutos, y como los estudiantes consideran que no se incluye, porque después del minuto 59, se vuelve a 00, porque comienza otra hora.

Tabla 7. Funcionamiento de la hora en el reloj digital

España	Chile
<p>M1: <i>El día tiene veinticuatro horas, ¿no? ¿Y en estos relojes aparecería el veinticuatro?</i> Estudiantes: <i>Sí.</i> M1: <i>¿Sí?, ¿aparecería el veinticuatro?</i> E10: <i>No, no, no, ya si... sí son las doce de la mañana...</i> E11: <i>Aparecería cero, cero.</i> M1: <i>¿Cero, cero? ¿Por qué?</i> E2: <i>Porque son las doce de la noche y empieza el día</i> M1: <i>Porque pasa un día, ¿no? Volvemos a empezar, ¿no? Pues nada, ahora vamos a poner nuestros relojes, nuestros relojes bien. Lo vais a mirar y los números que os sobren, pues los quitáis, ¿de acuerdo?</i></p>	<p>FP2: <i>entonces ¿Hasta qué número usaremos la segunda banda?</i> E8: <i>Hasta el 3.</i> E6: <i>Hasta el 23.</i> FP2: <i>(Sacando los números desde el 4 en delante de la segunda banda) Hasta el 3.</i> E12: <i>Esos si se van ocupar. Hay números que se componen de dos bandas</i> FP2: <i>¿Cómo cuál?</i> E12: <i>Como el 17.</i> FP2: <i>Oops... yo no podré poner el 17.</i> Varios estudiantes: <i>Es que así está mal</i> FP2: <i>Voy a usar otra banda</i> Varios estudiantes: <i>Con todos los números</i> FP2: <i>¿Y aquí, en la primera banda, usaré el 3?</i> Varios estudiantes: <i>No...</i> FP2: <i>¿La corto?</i> Varios estudiantes: <i>Síiii.</i> FP2: <i>¿Y por qué no puedo poner el 3?</i> E5: <i>Porque el día tiene 24 horas.</i></p>

Además, en ambos grupos se consideran las 24 horas del día para determinar los dígitos que se utilizan en las bandas correspondientes a la hora (Tabla 8).

Tabla 8. Funcionamiento del cambio de día en el reloj digital

España	Chile
<p>FP1: <i>Y cuando llega el reloj a las veintitrés cincuenta y nueve, ¿Cómo sigue?</i> E11: <i>Cero, cero, cero, cero.</i> FP1: <i>¿Y por qué hace eso?</i> E11: <i>Porque empieza un nuevo día.</i> FP1: <i>Ah, porque empieza un nuevo día y entonces empieza otra vez a contar.</i> E11: <i>Sí.</i> FP1: <i>¿Entonces, a qué hora empiezan los días?</i> E11: <i>A, a las...</i> FP1: <i>¿Cuándo cambiamos el día?</i> E11: <i>Cuando son las doce de la noche.</i> FP1: <i>Las doce de la noche, que son las cero, cero, cero, cero. Por eso pone cero, cero, cero, cero.</i></p>	<p>FP2: <i>¿Y las 24 horas?</i> Varios estudiantes: <i>No existen.</i> FP2: <i>¿Cómo no van a existir?</i> E6: <i>Es que es el último.</i> Varios estudiantes: <i>Sí, es el último.</i> E13: <i>Antes viene el 23:59.</i> E6: <i>Después empieza el 00:00.</i></p>

Se puede observar que el cambio de la hora y el cambio de día tienen el mismo razonamiento en todos los grupos, después de las 23:59 comienza otro día, y el reloj no marca las 24:00 sino las 00:00.

Posteriormente, los estudiantes realizaron una práctica de dictado y lectura de las horas (Tabla 9).

Tabla 9. Escritura de las horas dictadas en el reloj

Hora dictada	Respuestas	España	Chile	Total (%)
Las nueve menos diez (España) Diez para las nueve (Chile)	8:50	22	15	55
	9:50	5	5	15
	8:10	2	8	15
	9:10	0	4	6
	Otras respuestas	2		3
	Ninguna	1	3	6

Hora dictada	Respuestas	España	Chile	Total (%)
Las dos y cuarto del medio día	14:15	25	28	79
	2:15	6	7	19
	Otras respuestas	1		2
Las tres menos cuarto de la madrugada (España) Un cuarto para las tres de la madrugada (Chile)	2:45	20	25	67
	3:45	3	7	15
	15:45	3		4
	14:45	2		3
	3: 15	0	2	3
	Otras respuestas	1		2
	Ninguna	3	1	6
Las doce menos veinte de la noche (España) Veinte para las doce de la noche (Chile)	23:40	17	28	67
	00:40	3	2	7
	24:40	1		2
	12:40	3		4
	Otras respuestas	4	5	13
	Ninguna	4		6
Las doce y cinco de la noche	00:05	21	27	72
	12:05	7	7	21
	Otras respuestas	2	1	4
	Ninguna	2		3

En la Tabla 9 se puede observar que las escrituras en que los minutos van de 00 a 30 generan menos dificultades que aquellas que exigen un procedimiento sustractivo. El ciclo 24 horas presenta algunas confusiones, pero no surge el clásico error asociado al uso del cambio decimal, por ejemplo, las 16:00 por las 6 de la tarde. Las doce de la noche genera ambigüedad, hay bastantes estudiantes que escriben como 12 y no como 00. La expresión “de la madrugada” genera cierta confusión en los estudiantes españoles (Tabla 10).

Tabla 10. Escritura en palabras de las horas del reloj

Hora en el reloj	Respuestas	España	Chile	Total (%)
18:25	Las seis y veinticinco de la tarde	20	10	45
	Las seis y veinticinco	5	18	34
	Las dieciocho y veinticinco	1	5	9
	Otras respuestas	4	2	9
	Ninguna	>		3
13:45	Las dos menos cuarto del mediodía/un cuarto para las dos del medio día	9		13
	Las dos menos cuarto de la tarde/ un cuarto para las dos de la tarde	3	7	15
	La una y cuarenta y cinco	2	3	7
	La una menos cuarto del medio día/ un cuarto para una del medio día	4		6
	Las dos menos cuarto/un cuarto para las dos	1	10	16
	Trece y cuarenta y cinco	1	12	19
	Otras respuestas	6	3	13
	Ninguna	6		9
15:45	Las cuatro menos cuarto de la tarde/ un cuarto para las cuatro de la tarde	10	12	33
	Las tres menos cuarto de la tarde/ un cuarto para las tres de la tarde	2	2	6
	Las cuatro menos cuarto del medio día/ un cuarto para las cuatro del medio día	4		6
	Las tres menos cuarto del medio día / un cuarto para las tres del medio día	3		4
	Las cuatro menos cuarto/ un cuarto para las cuatro	2	8	15
	Las tres y cuarenta y cinco	2	5	10
	Las quince y cuarenta y cinco	1	5	9
	Otras respuestas	4	3	10
Ninguna	4		6	

Hora en el reloj	Respuestas	España	Chile	Total (%)
04:55	Las cinco menos cinco de la madrugada/ cinco para las cinco de la madrugada	7		10
	Las cinco menos cinco de la mañana/ cinco para las cinco de la mañana	3	10	19
	Las cinco menos cinco de la noche/cinco para las cinco de la noche	3		4
	Las cuatro y cincuenta y cinco	3	12	22
	Otras respuestas	11	10	31
	Ninguna	5	3	12
00:34	La una menos veintiséis de la madrugada/ veintiséis para la una de la madrugada	3		5
	Las doce treinta y cuatro de la noche	6	2	12
	Las doce treinta y cuatro de la mañana	1	5	9
	Las doce y treinta y cuatro	8	18	39
	La doce y media pasadas (o de la noche)	3		5
	Otras respuestas	4	3	10
	Ninguna	7	7	21

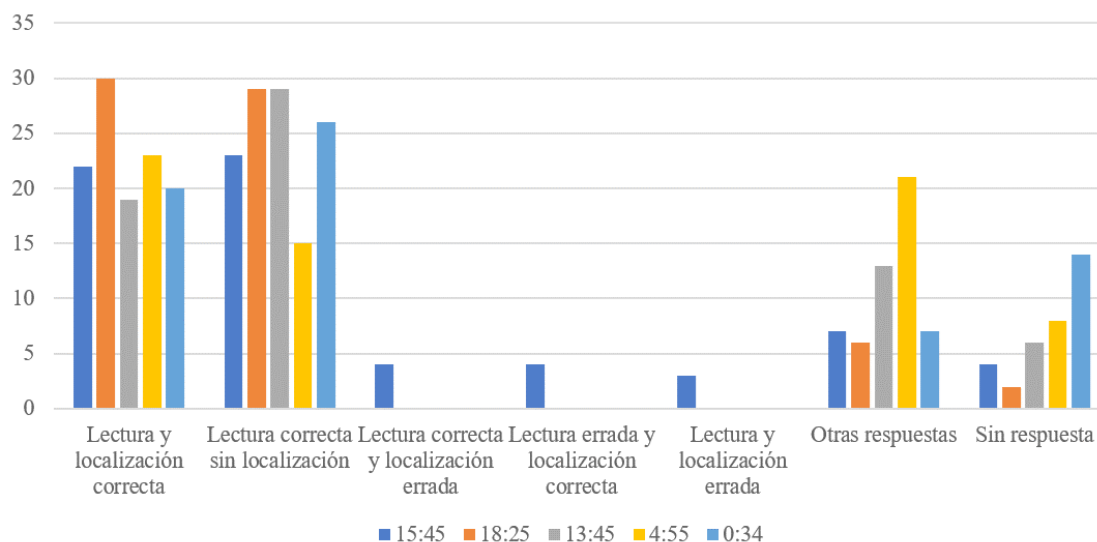
Analizando estos datos, podemos observar que en el horario 18:25 se observan 30 respuestas con localización diaria, todas son correctas. Hay 23 estudiantes, que transforman el horario 24/12, sin indicar la localización diaria, casi el 80% de los estudiantes son chilenos. Hay seis lecturas directas de la escritura del reloj, que no necesitan la localización diaria.

En el horario 13:45 hay 26 respuestas que indican localización diaria, 20 de ellas son correctas. Hay trece estudiantes que realizan el cambio horario 24/12 horas sin considerar, en forma escrita, la localización temporal, pero realizan un cálculo correcto para escribir la hora.

En el horario 15:45 hay 33 respuestas que indican localizaciones temporales, 22 son correctas, todas con el cálculo del cambio del ciclo de 24 a 12 horas. Sin embargo, hay 10 que realizan bien los cálculos, pero no dan ninguna referencia diaria. Es notable la presencia de la marca de localización “mediodía” en esa franja. No parece muy adecuada, pero denota la gran subjetividad del uso social de dicha marca, muy difusa entre la mañana y la tarde. Los estudiantes chilenos no la utilizan, dado que en Chile el mediodía equivale sólo a las 12:00pm.

Podemos observar cómo la gestión de las variables didácticas hace emerger algunas características significativas del uso de los estudiantes de las escrituras horarias y su localización diaria. En los siguientes gráficos se resumen las respuestas respecto a las localizaciones diarias (Figura 5) y los aspectos aritméticos (Figura 6).

Figura 5. Localizaciones diarias



En el horario 04:55 hay 31 respuestas que consideran la localización diaria, todas ellas con un cálculo sustractivo para escribir la respuesta, de las cuales 20 son correctas. Hubo 18 respuestas de lectura directa. En el horario 00:34 hay 20 respuestas que consideran la localización diaria, aunque repartidas entre madrugada, mañana y noche. 45 de ellas reconocen explícitamente las 00:00 como las 12:00 (de la noche o mañana). Además, hay 3 estudiantes que redondean el horario. Hubo sólo tres estudiantes que utilizaron un cálculo de sustracción para leer la hora, muchos menos que en las otras preguntas. Es relevante que es la lectura que más ausencia de respuestas provoca.

Se observa una cantidad importante de expresiones horarias sin la localización diaria necesaria para no generar ambigüedad. Este hecho es más importante en la escritura cercana a las 12 de la noche, donde diez estudiantes no

han expresado la parte del día. El hecho de que se trate de horarios no habituales para estas edades puede influir en esta ausencia.

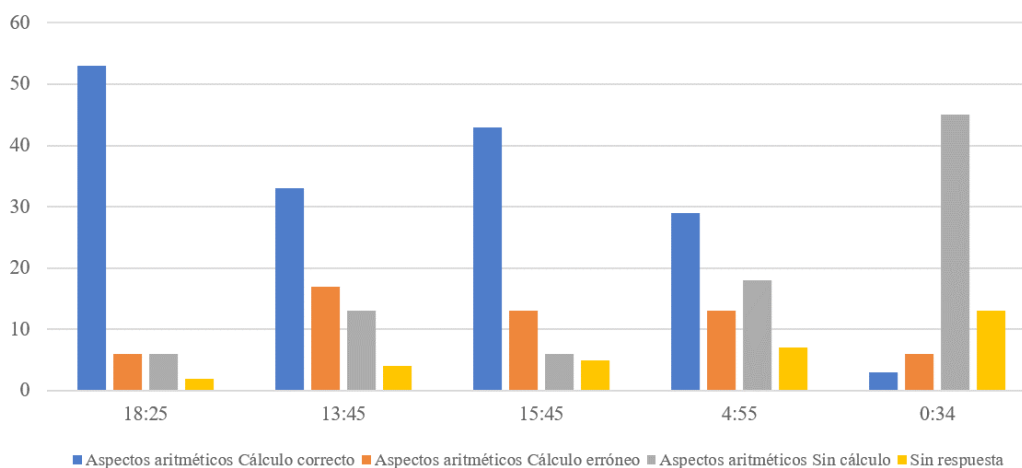
Además, en las escrituras de las 15:45 y 04:55 se produce un importante porcentaje de confusiones. Entendemos que quizá sean debidos a la poca definición con que en España dividimos las partes del día. ¿Hasta dónde llega el mediodía? En el caso de los estudiantes chilenos, esta equivocación apenas se produce.

La proporción de expresiones que no gestionan bien, o simplemente no gestionan, la localización diaria es bastante alto. Esto puede indicar que no está muy asentada la correspondencia de las escrituras 0-24 con los ciclos cotidianos diarios, que les hubiera podido establecer una correcta localización de las partes del día.

Las marcas 15:45 y 04:55 tienden a provocar más errores de cálculo que el resto de lecturas consideradas.

La variable didáctica que distingue expresiones que contengan minutos comprendidos entre 31 y 59 se observa en que provocan más dificultades porque se debe obtener su complemento sobre sesenta para poder traducirlas. Además, la hora que se escribe lingüísticamente es una hora más que la que figura en la escritura digital. Esas son las causas de una mayor cantidad de confusiones.

Figura 6. Aspectos aritméticos



Las 00:34 se distinguen porque una mayor cantidad de estudiantes no realiza un cálculo para leerla, posiblemente porque no es una hora habitual, al no ser múltiplo de 5 y al estar tan cercana a 30, por ello además que tres estudiantes españoles redondearon la lectura. Los chilenos no mencionan las 00:34 como la madrugada en ni a las 04:55 ni a las 00:34, posiblemente por el poco uso de la palabra madrugada.

5. Conclusiones

Como ya suponíamos, los y las estudiantes tienen conocimiento acerca de las unidades de medida de tiempo utilizadas en esta situación: minuto, hora y día. Su gran presencia en nuestro entorno cultural y el trabajo realizado en cursos anteriores lo justifica. Sin embargo, es probable que los y las estudiantes no tengan referencias de dichas unidades (Pizarro et al., 2020).

Las equivalencias entre las distintas unidades de tiempo son conocidas por los y las estudiantes, incluso la localización del cambio de día es conocida, tanto en España como en Chile. Pero este conocimiento no ha sido suficiente para la previsión de las cifras necesarias en la construcción del reloj digital. Casi todos los grupos han necesitado manipular el reloj para ir poco a poco determinando las cifras necesarias y suficientes para hacerlo funcionar. Los cambios de las unidades eran conocidos, pero no han sido suficientemente operativos en esta tarea; no han ido mucho más allá de un mero conocimiento social, sin alcanzar la estructura propia de los conocimientos lógico-matemáticos, hecho compatible con los resultados de Friedman (1990).

En el sistema horario es cuando los y las estudiantes se enfrentan por primera vez a un sistema distinto al decimal. En este trabajo se ha observado la importancia del planteamiento y gestión de situaciones que exijan la movilización de los aspectos matemáticos de las unidades temporales para potenciar la construcción de estas nociones con pleno significado. Además, el uso de sistemas no decimales puede facilitar la comprensión y manejo de las técnicas de cálculo diseñadas para el sistema decimal (Belmonte, 2007).

Uno de los principales aportes de este trabajo es que, en las actividades de traducción entre escrituras horarias digitales y las lingüísticas, se observan bastante consolidados los aspectos sociales de las expresiones horarias, pero presentan grandes dificultades para incorporarlas en procedimientos aritméticos. Nos parece importante que el estudiante se vea obligado a traducir expresiones horarias ya que se trata de conseguir que, de manera autónoma, sepa decidir el uso de la herramienta que mejor se adapte a cada contexto. Por un lado, la comunicación oral se desarrolla mejor con las expresiones lingüísticas que son portadoras de significado suficiente para lo que están diseñadas. Por

otro lado, las expresiones de los relojes digitales permiten un trabajo matemático más consistente. No se trata de dilucidar entre una y otra, sino que se conozcan las dos y eso sólo es posible cuando se conoce de manera precisa sus correspondencias.

Además, este trabajo de doble traducción tiene un importante valor didáctico porque obliga a utilizar de manera consciente los cambios entre las unidades fomentando los aspectos aritméticos del sistema y porque provoca la identificación de las referencias cotidianas temporales diarios con el ciclo 0-24, que como hemos visto en la última actividad de la situación presenta algunas carencias (Godard & Labelle, 1998).

Hemos constatado la ambigüedad de la cultura hispano hablante en las referencias de las partes del día. Se ha visto que las confusiones aumentan cuando la referencia es el mediodía y la madrugada, dado que para ellos no están muy bien definidas, ni en España ni en Chile. Quizá este carácter difuso de los límites revalorice las expresiones que utilizan el ciclo 0-24.

Leer las segundas mitades de horas es complejo para los y las estudiantes. Si el reloj marca las 8:50, es lógico que no lean “las nueve menos 10”, dado que no hay ni un 9 ni un 10 en lo que observan. Esta dificultad es constante en el cambio de horas, de días, meses y años; por ello, es fundamental que se realicen actividades que permitan analizar matemáticamente el funcionamiento del reloj, dejando así de delegar a la sociedad su aprendizaje.

Se observan pocas diferencias entre ambos grupos de estudiantes. En su mayoría, tuvieron problemas similares para resolver las situaciones planteadas, como se observa en las tablas del apartado anterior.

Una de las limitaciones del trabajo es que sólo hemos podido trabajar con estudiantes españoles y chilenos, dado que parte de los conocimientos puestos en juego tienen un carácter marcadamente social, sería pertinente extender estos estudios a otras culturas y observar cómo intervienen los conocimientos sociales en la construcción matemática de los sistemas de unidades temporales. Además, sería conveniente observar la naturaleza de los errores o confusiones de los estudiantes al usar el reloj digital.

Se considera necesario que se continúe investigando sobre la evolución de la enseñanza de la medida del tiempo, las actividades y tareas comunes que se presentan al estudiantado, el uso de la referencia y la temporalidad, y por supuesto, la matematización involucrada en el proceso, ya que “la importancia de comprender el tiempo no comienza y termina con la capacidad de leer un reloj o seguir un horario durante el día” (Earnest, 2017, p.220).

6. Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez, *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 33-59). Grupo Editorial Iberoamérica.
- Artigue, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. En C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 15-25). La Pensée Sauvage.
- Artigue, M. (2015). Perspectives on design research: The case of didactical engineering. En A. Bikner-Ahsbals, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 467-496). Springer Verlag.
- Barquero, B., Bosch, M., & Romo, A. (2018). Mathematical Modelling in Teacher Education: Dealing with Institutional Constraints. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 50 (1-2), 31-43. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0907-z>
- Belmonte, J.M. (2007). Evolución de las nociones temporales en alumnos de Educación Primaria. Investigación de la Ingeniería Didáctica. [Tesis doctoral]. UNED, España.
- Burny, E., Valcke, M., & Desoete, A. (2012). Clock reading: An underestimated topic in children with mathematics difficulties. *Journal of learning disabilities*, 45(4), 351-360. <https://doi.org/10.1177/0022219411407773>
- Díez, Á., Cañadas, M. C., Picado, M., Rico, L., & Castro, E. (2016). Magnitudes y su medida en el currículo de primaria en España (1945-2013). *Profesorado. Revista de curriculum y formación de profesorado*, 20(1), 341-363.
- Earnest, D. (2017). Clock work: How tools for time mediate problem solving and reveal understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 48(2), 191-223. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.48.2.0191>
- Earnest, D. (2019). La cantidad invisible: los intervalos de tiempo en el álgebra temprana. *Infancia y Aprendizaje*, 42(3), 664-720. <https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1615199>
- Earnest, D., Gonzales, A. C., & Plant, A. M. (2018). Time as a measure: Elementary students positioning the hands of an analog clock. *Journal of Numerical Cognition*, 4(1), 188-214. <https://doi.org/10.5964/jnc.v4i1.94>
- Erickson, F. (2006) Definition and analysis of data from videotape: some research procedures and their rationales. En J. Green, G. Camili, & P. Elmore (Eds.) *Handbook of complementary methods in education research* (pp. 177-191). American Educational Research Association.
- Fraisse, P. (1967). *Psychologie du temps*. PUF.
- Friedman, W.J. (1982). Conventional time concepts and children's structuring of time. En W.J. Friedman (Ed) *The developmental psychology of time* (pp. 171-208). Academic Press.
- Friedman, W. J. (1990). *About time: Inventing the fourth dimension*. MIT Press.
- Friedman, W. J. (2000). The development of children's knowledge of the times of future events. *Child Development*, 71 (4), 913-932.
- Friedman, W. J., & Laycock, F. (1989). Childrens Analog and Digital Clock Knowledge. *Child Development*, 60(2), 357-371. <https://doi.org/10.2307/1130982>

- Godard, L., & Labelle, M. (1998). Le développement de la localisation dans le temps chez des enfants de 5 à 9 ans de milieux socio-économiques différents. *L'Année Psychologique*, 98, 233-270. <https://doi.org/10.3406/psy.1998.28592>
- Hodkinson, A. (2004). Does the English Curriculum for History and its Schemes of Work effectively promote primary-aged children's assimilation of the concepts of historical time? Some observations based on current research. *Educational Research*, 46(2), 99-117. <https://doi.org/10.1080/0013188042000222403>
- Hudson, J. A., & Mayhew, E. M. Y. (2011). Children's temporal judgements for autobiographical past and future events. *Cognitive Development*, 26 (4), 331-342. <https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2011.09.005>
- Hurrell, D. (2017). Is it time to start reconsidering the teaching of time? *Australian Primary Mathematics Classroom*, 22 (3), 33-37.
- Lambert, K., Wortha, S., & Moeller, K. (2020). Time Reading in Middle and Secondary School Students: The Influence of Basic-Numerical Abilities. *The Journal of Genetic Psychology*, 181(4), 255-277. <https://doi.org/10.1080/00221325.2020.1760778>
- Levin, I., Wilkening, F., & Dembo, Y. (1984). Development of time quantification: Integration and nonintegration of beginnings and endings in comparing durations. *Child Development*, 55(6), 2160-2172.
- Monroe, E. E., Orme, M. P., & Erickson, L. B. (2002). Working cotton: toward an understanding of time. *Teaching children mathematics*, 8(8), 475-479. <https://doi.org/10.5951/TCM.8.8.0475>
- Pizarro, N., Belmonte, J., & Arteaga-Martínez, B. (2020). Un análisis didáctico de la práctica docente en la enseñanza de la lectura del reloj analógico. *Educación XXI*, 23(1), 409-436. <https://doi.org/10.5944/educxx1.23913>
- Richie, D. M., & Bickhard, M. H. (1988). The ability to perceive duration: Its relation to the development of the logical concept of time. *Developmental Psychology*, 24(3), 318-323. <https://doi.org/10.1037/0012-1649.24.3.318>
- Russell, K. A., & Kamii, C. (2012). Children's Judgments of Durations: A Modified Replication of Piaget's Study. *School Science and Mathematics*, 112(8), 476-482. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00166.x>
- Sampaio, H.R., & Batista, I.L. (2018). Mathematics history and cognitive values on a didactic sequence: Teaching trigonometry. *REDIMAT. Journal of Research in Mathematics Education*, 7(3), 311-332. <https://doi.org/10.4471/redimat.2018.2727>
- Sarama, J., & Clements, D. (2014). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203883785>
- Thomas, M. (2018). *A Matter of Time: an Investigation into the Learning and Teaching of Time in the Middle Primary Years* [Doctoral thesis]. Australian Catholic University. <https://doi.org/10.26199/5b85d77599793>
- Thomas, M., Clarke, D., McDonough, A., & Clarkson, P. (2016). Understanding Time: A Research Based Framework. En B. White, M. Chinnappan & S. Trenholm (Eds.). *Opening up mathematics education research. Proceedings of the 39th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 592–599). MERGA.
- Tillman, K., Tulagan, N., Fukuda, E., & Barner, D. (2018). The mental timeline is gradually constructed in childhood. *Development Science*, 21, e12679. <https://doi.org/10.1111/desc.12679>
- Valenzuela, J. M., Labarrera, P., & Rodríguez, P. (2008). Educación en Chile: entre la continuidad y las rupturas. Principales hitos de las políticas educativas. *Revista iberoamericana de educación*, 48(10), 129-145. <https://doi.org/10.35362/rie480693>
- Van Steenbrugge, H., Valcke, M., & Desoete, A. (2010). Mathematics learning difficulties in primary education: teachers' professional knowledge and the use of commercially available learning packages. *Educational Studies*, 36(1), 59-71. <https://doi.org/10.1080/03055690903148639>