RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DEL PÉNDULO SOMETIDO A OSCILACIONES DE GRAN AMPLITUD

Antonio J. Barbero

Fernando Picazo

Antonio García Cifuentes

Antonio J. Barbero, Fernando Picazo y Antonio García Cifuentes están en el Departamento de Física Aplicada, Universidad de Castilla-La Mancha.

RESUMEN

En este trabajo se resuelve el problema de un péndulo que oscila con grandes amplitudes por un método numérico de Runge-Kutta, comparando después el resultado con la solución analítica en forma de desarrollo en serie que se encuentra en la bibliografía. Se aplica también el mismo método para obtener la solución de algunos ejemplos que corresponden a un sistema de péndulo amortiguado. Se presenta un programa de ordenador que puede modificarse fácilmente para resolver otros problemas de integración numérica con condiciones de valor inicial.

INTRODUCCIÓN

La adopción de hipótesis simplificadoras es una práctica habitual cuando se aborda el estudio cuantitativo de muchos problemas físicos, ya que la realidad es tan compleja que el tratamiento matemático de la mayoría de los sistemas ofrece unas dificultades muy considerables. El número de problemas que han sido resueltos de una forma exacta es muy reducido en comparación con el de aquellos otros cuya solución está sometida a hipótesis restrictivas.

El caso del péndulo simple ilustra perfectamente esta situación. Se trata de un sistema con un solo grado de libertad que puede describirse expresando en función del tiempo su distancia angular θ a una dirección de referencia, tal como la vertical en un determinado punto (elongación). Sin embargo, la ecuación diferencial (1) que describe este movimiento tiene una solución analítica en absoluto sencilla.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \operatorname{sen} \theta = 0 \tag{1}$$

La pulsación ω depende de la longitud del péndulo L y de la aceleración de la gravedad g; el término sen θ suele tratarse en la mayoría de los textos de física general [Tipler 1992] simplificando para el caso de pequeñas oscilaciones, es decir, cuando la amplitud del movimiento de oscilación alrededor de la posición de equilibrio es muy pequeña. Entonces puede sustituirse la función seno por el ángulo correspondiente, lo cual conduce a una solución de la forma:

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi) \tag{2}$$

donde θ_0 representa la amplitud y φ es una fase inicial que puede ser elegida a voluntad para situar la elongación en un valor conveniente al tomar el origen de tiempos. Con esta hipótesis simplificadora, el período de la oscilación está dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{3}$$

Sin embargo, un estudio más cuidadoso del problema [Kittel et al. 1968; Pippard 1989; Rañada 1990], entrando a considerar la solución analítica de la ecuación (1), permite escribir el período de oscilación para cualquier amplitud θ_0, siendo el resultado dependiente de dicha amplitud como muestra la ecuación (4):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}\right]^2 \operatorname{sen}^{2n}\frac{\theta_0}{2}\right\} \tag{4}$$

Es evidente que en el estudio de muchos sistemas físicos de interés aparecen situaciones análogas al ejemplo presentado aquí (no debe olvidarse que es uno de los casos más simples), en las cuales la obtención de una solución analítica puede ser tarea muy ardua o incluso imposible. En tales circunstancias los métodos numéricos ofrecen una vía alternativa (y atractiva) para la resolución del problema. El propósito de este trabajo es presentar un enfoque sencillo, basado en el ejemplo del péndulo, para abordar la integración numérica de problemas de valor inicial (se conocen las condiciones iniciales que deben cumplir todas las variables dependientes para un valor dado de la variable independiente). El método empleado aquí para resolver un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias es fácilmente generalizable para un número mayor de ecuaciones introduciendo pequeñas modificaciones en el programa de ordenador que se presenta en el apéndice.

PROBLEMA DE VALOR INICIAL. SOLUCIÓN NUMÉRICA

Una ecuación diferencial como la ecuación (1) constituye un problema de valor inicial cuando en un punto determinado se conoce el valor de la función y de sus derivadas hasta una unidad menos que el orden de la ecuación; a partir de dichos datos se va construyendo la solución sobre un conjunto de puntos (valores de la variable independiente) en los cuales se estiman los valores numéricos de las derivadas que son empleados para aproximar el valor de la función en el punto siguiente. Un conjunto de métodos de integración numérica muy utilizados para este fin son los métodos de Runge-Kutta [Bronson 1983; Carnahan et al. 1979], y uno de éstos ha sido empleado en este trabajo, con el fin de comparar la concordancia entre el método numérico y la solución para grandes oscilaciones dada por la ecuación (4).

Para la resolución numérica del problema, en primer lugar se reduce la ecuación de segundo orden a un sistema de dos ecuaciones de primer orden. Consideremos una ecuación de la forma general

$$\frac{d^2y}{d^2x} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \tag{5}$$

Haciendo el cambio de variable

$$z_1 = y\,; \qquad z_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{dz_1}{dx} \tag{6}$$

la ecuación (5) puede expresarse como

$$\frac{dz_1}{dx} = z_2\,; \qquad \frac{dz_2}{dx} = f\,(x, z_1, z_2) \tag{7}$$

En el caso de la ecuación del péndulo, el sistema (7) adopta la forma

$$z_1 = \theta \; ; \qquad z_2 = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dz_1}{dt} = z_2 \; ; \qquad \frac{dz_2}{dt} = -\omega^2 \text{ sen } z_1 \tag{8}$$

A partir de aquí, el método Runge-Kutta implementado en el programa escrito en lenguaje Pascal [O'Brien 1991] que figura en el apéndice nos proporciona para cada valor del tiempo los valores de la elongación y de su primera derivada. Tratándose de un sistema de naturaleza oscilatoria, interesa determinar el período. El procedimiento a seguir puede resumirse en las siguientes etapas:

1. Elegir una elongación inicial para tomar la referencia de tiempos; en nuestro caso elegimos arbitrariamente $\varphi = 0$, lo cual equivale físicamente a contar el tiempo desde el momento en que la elongación es máxima (ver ecuación (2)).
2. Dividir un intervalo de tiempo mayor que el período de oscilación en un número N de subintervalos iguales y lo suficientemente pequeños para ajustar bien la solución numérica a la naturaleza oscilatoria del sistema. Hemos realizado los ejemplos que siguen con un valor para la frecuencia angular $\omega = 1$, y hemos dividido un intervalo de 10 segundos en cincuenta partes iguales; nótese que aunque el valor exacto del período del sistema representado por la ecuación (1) no se conoce a priori, pues es función de la amplitud θ_0, contamos con un valor aproximado en el dato del período para pequeñas oscilaciones dado por la ecuación (3).
3. Calcular el período a partir de la solución numérica observando los cambios de signo producidos en la primera derivada al sobrepasar cada semiperíodo de oscilación; el período está comprendido entre el valor inmediato anterior al segundo cambio de signo y el que le sigue. Para incrementar la precisión de la solución obtenida puede iterarse el proceso tomando como valor inicial de tiempo el obtenido en la aproximación precedente y los valores de elongación y su derivada que ha proporcionado el programa. El error del método puede considerarse igual a la división más fina del subintervalo que hayamos utilizado; a diferencia del

error de la solución analítica dada en la ecuación (4), que depende del término en que hayamos truncado la serie y es distinto para cada amplitud, el error del método numérico es constante en todas las amplitudes.

ESTUDIO DE LAS OSCILACIONES DE UN SISTEMA

Con objeto de comprobar la coincidencia entre la solución analítica y el cálculo numérico implementado de acuerdo con los criterios anteriores hemos usado una de las rutinas de integración disponibles en la bibliografía [Press et al. 1989] escogiendo los parámetros siguientes:

$$\begin{gathered}\textit{Intervalo base de integración: } 10 \text{ s}\\ \textit{Número de subintervalos } N = 50\\ \omega = 1 \; ; \qquad \sqrt{\frac{L}{g}} = 1\end{gathered} \tag{9}$$

En la tabla 1 aparecen los períodos (en segundos) calculados integrando la ecuación (1) a partir del método numérico en sólo dos iteraciones y su correspondiente cálculo basado en la ecuación (4) tomando términos hasta la sexta potencia como indica la ecuación (10):

TABLA 1.

θ_0 (°)	T (ec. 4)	ΔT (ec. 4)	T (num)	ΔT (num)
60	6.7407	$1.5 \cdot 10^{-3}$	6.740	$4 \cdot 10^{-3}$
55	6.6642	$1 \cdot 10^{-3}$	6.664	$4 \cdot 10^{-3}$
50	6.5954	$6 \cdot 10^{-4}$	6.596	$4 \cdot 10^{-3}$
45	6.5341	$3 \cdot 10^{-4}$	6.532	$4 \cdot 10^{-3}$
40	6.4800	$2 \cdot 10^{-4}$	6.480	$4 \cdot 10^{-3}$
35	6.43290	$7 \cdot 10^{-5}$	6.432	$4 \cdot 10^{-3}$
30	6.39256	$3 \cdot 10^{-5}$	6.392	$4 \cdot 10^{-3}$
25	6.35877	$1 \cdot 10^{-5}$	6.356	$4 \cdot 10^{-3}$
20	6.33137	$>1 \cdot 10^{-5}$	6.328	$4 \cdot 10^{-3}$
15	6.31021	$>1 \cdot 10^{-5}$	6.308	$4 \cdot 10^{-3}$
10	6.29517	$>1 \cdot 10^{-5}$	6.292	$4 \cdot 10^{-3}$
5	6.28618	$>1 \cdot 10^{-5}$	6.284	$4 \cdot 10^{-3}$

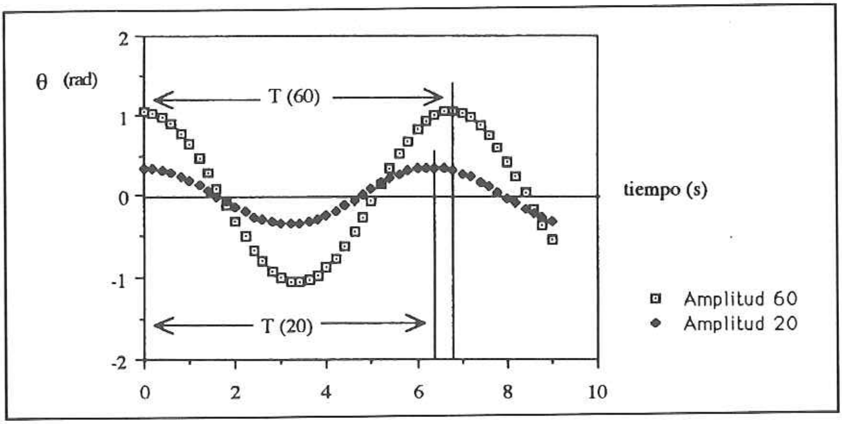

FIGURA 1.
Oscilación no amortiguada.

$$T = \sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64}\operatorname{sen}^4\frac{\theta_0}{2} + \frac{225}{2304}\operatorname{sen}^6\frac{\theta_0}{2}\right) \qquad (10)$$

El error del método numérico es el correspondiente a dos iteraciones, que puede expresarse en la forma que indica la relación siguiente:

$$\Delta T = \frac{\textit{intervalo temporal}}{(\textit{núm. subintervalos})^{\text{núm. iteraciones}}} = \frac{10}{50^2} = 4 \cdot 10^{-3} \qquad (11)$$

En la figura 1 aparece una representación gráfica de las soluciones numéricas para dos de las amplitudes listadas en la tabla 1; obsérvese el decrecimiento del valor del período a medida que disminuye la amplitud, tendiendo hacia el valor 2π como corresponde al caso de pequeñas oscilaciones.

OSCILACIONES AMORTIGUADAS

En el problema descrito por la ecuación (1) se supone ausente cualquier tipo de proceso disipativo, de tal modo que la energía total del péndulo se conserva indefinidamente. Pero si queremos describir el caso real de movimiento de un péndulo, es necesario introducir un término proporcional a la primera derivada, que representa físicamente una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad [Alonso et al. 1976; Rañada 1990]. Cuando se trata de un oscilador armónico ideal (caso límite del péndulo cuando las oscilaciones son pequeñas), la ecuación del movimiento es

$$\frac{d^2\theta}{dt} + 2\gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\,\theta = 0 \tag{12}$$

donde ω_0 representa la frecuencia angular de la oscilación no amortiguada y la cantidad γ es la constante de amortiguamiento. La solución de la ecuación (12) puede escribirse como una función seno o coseno cuya amplitud decrece exponencialmente con el tiempo, siempre que el amortiguamiento sea «pequeño», como se muestra en la ecuación (13):

$$\theta = \theta_0\, e^{-\gamma t} \cos\,(\omega t + \varphi) \tag{13}$$

donde la frecuencia angular de la oscilación amortiguada viene dada por

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{14}$$

Es decir, por una parte decrete la amplitud, y por otra la frecuencia se hace menor.

Sin embargo, debe hacerse notar que la solución general de la ecuación (12) depende críticamente de cuál sea la mayor de las cantidades ω_0 y γ; de acuerdo con la ecuación (14) pueden presentarse tres casos:

a) Si $\omega_0 > \gamma$, entonces es válida la solución recogida en la ecuación (13); el término γ «pequeño» tiene sentido en este contexto: se dice que la oscilación es subamortiguada, y la amplitud de la misma va decreciendo continuamente a medida que transcurre el tiempo.
b) Si $\omega_0 < \gamma$, la cantidad ω se hace imaginaria (ecuación (14)). Estamos en el caso de sobreamortiguamiento, en el cual no hay oscilaciones, sino que el sistema se aproxima gradualmente a su posición de equilibrio sin sobrepasarla o sobrepasándola a lo sumo una vez antes de quedar en reposo.
c) Finalmente, si $\omega_0 = \gamma$, tenemos la situación de amortiguamiento crítico. La elongación tiende también a cero sin oscilar alrededor del punto de equilibrio.

Lo señalado hasta aquí es válido para un péndulo que describe pequeñas oscilaciones o para cualquier otro oscilador armónico simple; en nuestro caso, la resolución numérica de la ecuación (15) nos permite comprobar de un modo sencillo que el movimiento para grandes oscilaciones conserva los mismos rasgos.

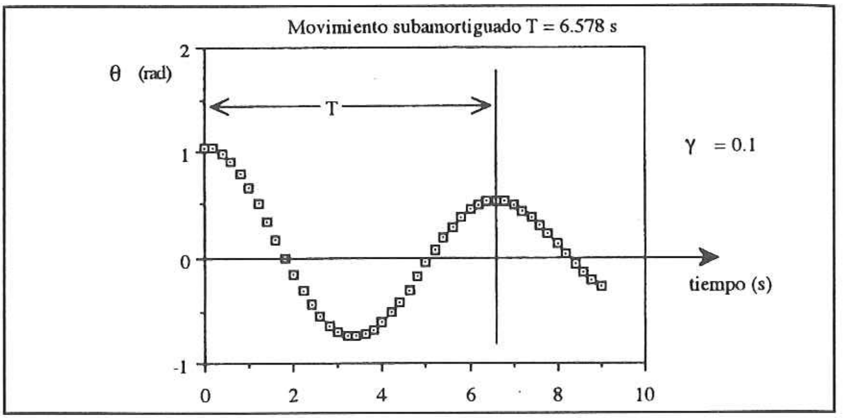

FIGURA 2.
Movimiento subamortiguado T = 6.578 s.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \operatorname{sen}\theta = 0 \qquad (15)$$

En la figura 2 aparecen las soluciones numéricas para $\omega_0 = 1$ en el caso de amortiguamiento subcrítico ($\gamma = 0.1$ y $\gamma = 0.4$), obtenidas introduciendo la ecuación (15) en la rutina derivs del programa del apéndice. En la figura 3 aparecen las soluciones con el mismo parámetro ω_0 en los casos crítico ($\gamma = 1$ y supercrítico ($\gamma = 2$). Los períodos correspondientes pueden obtenerse por el mismo procedimiento que se señala en el apartado de oscilaciones no amortiguadas.

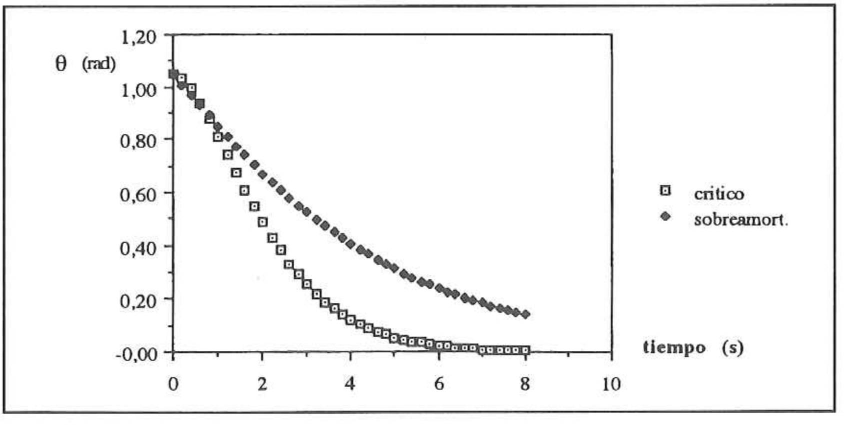

FIGURA 3.
Oscilación crítica y sobreamortiguada.

CONCLUSIONES

El estudio de algunos casos concretos ejemplifica el modo en que puede utilizarse el método numérico descrito para la resolución de prácticamente cualquier problema de valor inicial. Hay que resaltar que en los casos aquí planteados la elección de los parámetros del programa (especialmente el intervalo de valores de la variable independiente y el número de subdivisiones de este intervalo) es evidente puesto que se conoce a priori la forma de la solución analítica; pero en caso de que ello no sea así puede plantearse fácilmente una estrategia de ensayo y error eligiendo arbitrariamente los parámetros en el intervalo de interés y comprobando si el programa converge ampliando en un factor adecuado (un factor dos suele ser suficiente) el número de subintervalos hasta que en dos iteraciones consecutivas se obtenga la convergencia deseada.

REFERENCIAS

ALONSO, M. y FINN, E. J. (1976): *Física. Vol. 1 (Mecánica)*. Caracas. Fondo Educativo Interamericano.

BRONSON, R. (1983): *Ecuaciones diferenciales modernas*. México. McGraw-Hill (Schaum).

CARNAHAN, B.; LUTHER, H. A. y WILKES, J. O. (1979): *Cálculo numérico, Métodos, aplicaciones*. Madrid. Ed. Rueda.

KITTEL, C.; KNIGHT, W. D. y RUDERMAN, M. A. (1968): *Berkeley Physics Course. Vol. I: Mecánica*. Barcelona, Ed. Reverté.

O'BRIEN, S. (1991): *Turbo Pascal 6. Manual de referencia*. Madrid. McGraw-Hill.

PIPPARD, A. B. (1989): *The physics of vibration*. Cambridge. Cambridge University Press.

PRESS, W. H.; FLANNERY, B. P.; TEUKOLSKY, S.A. y VETTERLING, W. T. (1989): *Numerical Recipes in Pascal. The Art of Scientific Computing*. Cambridge. Cambridge University Press.

RAÑADA, A. (1990): *Dinámica clásica*. Madrid. Alianza Universidad Textos.

TIPLER, P.A. (1992): *Física*. Barcelona, Ed. Reverté.

APÉNDICE

```
Program pendulo;
uses crt,printer;
{$R+}
constr nvar = 2; NumVeces = 50; numberstep = 1;
     h = 0.2;     pi = 3.141592654;
type float = real;
     vector = array[1..nvar] of float;
var i,j,k,n: integer;
     x0,x: float;
     y0,y,dydx,yout: vector;
{ * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
            USO DEL PROGRAMA
1. Resuelve un sistema de n ecuaciones diferen-
   ciales ordinarias de primer orden (ODE's) por
   un método de Runge-Kutta de 4º orden, con con-
   diciones iniciales x0, y1 (x0), y2(x0)... datos.
   Cualquier ODE de orden superior al primero y
   con condiciones iniciales de este tipo puede
   reducirse a uno de tales sistemas y resolverse.
2. Partiendo del punto x0, el programa integra el
   sistema dando la solución en tantos puntos como
   indica la constante entera NumVeces. La distan-
   cia entre puntos está dada por el producto
                    numberstep*h
   Ejemplo: NumVeces = 10, numberstep = 1, h = 01
   integra el sistema ODE para x = 0.1,0.2...1.0
3. El sistema de ecuaciones a integrar debe escri-
   birse en el procedimiento drivs, donde:
   dydx[1] contiene la derivada primera de la va-
           riable i-ésima.
   y[1]    contiene la variable i-éxima.
   x       contiene la variable independiente.
4. Los valores iniciales de x y de las variables y
   deben escribirse en la tercera línea después
   del begin del programa principal.
5. El funcionamiento del programa ha sido verifi-
   cado utilizando ejemplos de R. Bronson, "E.D.
   modernas", McGraw-Hill, cap. 36.
* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * }
        procedure Teclamen;
        var ch : char;
        begin
        Repeat until KeyPressed;
```

```
      ch: = ReadKey;
      end;

   procedure derivs (x:float;
                     y:vector;
                     var dydx:vector);
   { Calcula las derivadas del sis- }
   { tema de ecuaciones dado          }
   begin
   dydx[1]: = y[2];
   dydx[2]: = -sin(y[1]);
   end; {de derivs}

   procedure rk4(y,dydx:vector;
                 n:integer;
                 x,h:float;
                 VAR yout:vector);
   { Numerical Recipes, página 777 }
   { Realiza un paso RK en un sis- }
   { tema de n ODE's                }
   var ii:integer; xh,hh,h6:float;
       dym,dyt,yt:vector;
   begin
   hh: = h*0.5; h6: = h/6; xh: = x + hh;
   for ii: = 1 tp n do yt[ii]: = y[ii] + hh*dydx[ii];
   derivs(xh,yt,dyt);
   for ii: = 1 to n do yt[ii]: = y[ii] + hh*dyt[ii];
   derivs(xh,yt,dym);
   for ii: = 1 to n do
       begin
       yt[ii]: = y[ii] + h*dym[ii];
       dym[ii]: = dy[ii] + dym[ii];
       end;
   derivs(x + h,yt,dyt);
   for ii: = 1 to n do
       yout[ii]: = y[ii] + h6*(dydx[ii] + dyt[ii] + 2*dym[ii]);
   end; {de rk4}
{ * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * }
begin
ClrScr;
n: = nvar;
x0: = 0; y0[1]: = 60; y0[1]: = 60*pi/180; yp[2]: = 0;
     {Línea que establece valores iniciales}
          {x0,y,y', en sistema de dos ODES}
       {Debe modificarse para cada problema}
```

```
x: = x0; for j: = 1 to n do y[j]: = y0[j];
   {Asignación de valores iniciales para}
         {comenzar el cálculo}
for k: = 1 to NumVeces do
begin
   for i: = 1 to numberstep do
      begin
      derivs(x,y,dydx);
      rk4(y,dydx,n,x,h,yout);
      for j: = 1 to n do y[j]: = yout[j];
      x: = x + h;
      end;
   write (lst,'x = ',x:5:3);
   for i: = 1 to n do
      begin
      y[i]: = yout[i];
      write (lst,'     y',t,' = ',y[i]:7:6);
      end;
writeln(lst);
end;{de for k}
Teclamen;
end.
```