NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 89, julio de 2015, páginas 87-110

Los números impares y las potencias de los números naturales (II)

Luis Barrios Calmaestra (Instituto de Enseñanza Secundaria José de Mora. España)

Fecha de recepción: 04 de enero de 2015
Fecha de aceptación: 13 de abril de 2015

Resumen En el artículo anterior se han calculado las potencias de los números naturales sumando números impares. En dicho trabajo, se fijaba el exponente y se modificaba la base. En este nuevo artículo se hace un estudio similar, pero ahora se considera fija la base y se modifica el exponente, calculando todas las potencias de cada uno de los números naturales mediante suma de números impares. Además, de la misma forma que se hizo en el primero, se estudia una distribución de los números impares, utilizados en cada suma, y también de los no utilizados, en figuras y cuerpos geométricos.

Palabras clave Divulgación, Aritmética, Números impares, Destrezas, Secundaria.

Title **Odd numbers and the powers of natural numbers II**

Abstract In the previous article, powers of natural numbers were calculated adding odd numbers. In that article, the exponent was fixed and the base was modified. In this new article, a similar study was done, but now the base was fixed and the exponent was modified, calculating all the powers of each natural number adding odd numbers. Furthermore, in the same way as it was done in the first article, a distribution of odd numbers that were used in each amount was studied, and other distribution of those unused numbers in geometric shapes was studied as well.

Keywords Divulgation, Arithmetic, Odd numbers, Skills, Secondary.

1. Introducción

En (L. Barrios, 2015, pp. 55-74) se expone la forma de obtener las potencias de los números naturales como suma de números impares consecutivos. En cada uno de los apartados del citado artículo, se fija el exponente y se modifica la base, calculando todas las potencias de los números naturales de cualquier base y de dicho exponente. Además se vio que los números impares utilizados en cada suma se pueden distribuir en figuras y cuerpos geométricos.

En este nuevo artículo se utilizan las fórmulas obtenidas en el primero, pero agrupándolas de forma diferente, ahora se fija la base y se modifica el exponente. Así que, en cada uno de los apartados que siguen, figura la forma de obtener todas las potencias naturales de un mismo número natural y su relación con ciertos objetos geométricos.

Pero, además, se pondrá de manifiesto que, considerando agrupadas por parejas consecutivas disjuntas todas las sumas que permiten obtener las potencias de un determinado número natural, pueden observarse regularidades curiosas. Así, para la base 2, las sumas consecutivas presentan números repetidos cuya suma, a su vez, se calculará; si la base es 3, los números que integran la suma de la segunda potencia son los consecutivos de los que aparecen en las sumas de la primera; y, a partir de base 4, entre ese último sumando y el primero de la suma de la potencia consecutiva, queda una cantidad cada vez mayor de números impares sin utilizar sobre los que también se efectuará alguna observación y se calculará su suma.

Cada apartado finaliza con la generalización de las fórmulas obtenidas en los casos particulares.

Se ha considerado conveniente omitir algunas demostraciones rigurosas para aligerar en lo posible el contenido del artículo.

Hay que indicar que se trata de un estudio original, continuación de (L. Barrios, 2015, pp. 55-74), por lo que no ha sido posible encontrar bibliografía, ni referencias en internet, sobre el tema. Se ha intentado buscar algún artículo relacionado para contrastar lo que aquí se expone, pero no se ha conseguido encontrar ninguna referencia.

2. Potencias de base 2

Observamos las sumas obtenidas para 2^2 y 2^3.

$$1 + 3 = 4 = 2^2 \qquad \sum_{k=1}^{2}(2k-1) = 4 = 2^2$$

$$3 + 5 = 8 = 2^3 \qquad \sum_{k=2}^{3}(2k-1) = 8 = 2^3$$

En ambas sumas coincide uno de los sumandos, se repite el número 3. La suma de los números repetidos es 3. Se verifica que:

$$3 = \frac{2^2 + 2^3}{4}$$

Para obtener 2^4 y 2^5, los números impares se disponen formando cuadrados.

1	3
5	7

$$\sum_{k=1}^{4}(2k-1) = 16 = 2^4$$

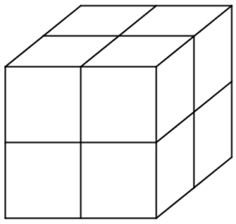
5	7
9	11

$$\sum_{k=3}^{6}(2k-1) = 32 = 2^5$$

Coincide la mitad de los sumandos en las dos sumas. Ambas sumas tienen 2 números iguales, el 5 y el 7. La suma de estos números es $12 = 2^2 \cdot 3$. Se verifica que:

$$12 = \frac{2^4 + 2^5}{4}$$

Para obtener 2^6 y 2^7, hay que distribuir los números impares en cubos.

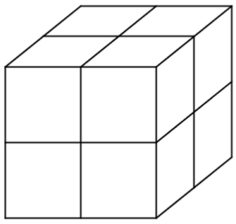


en cada capa se colocan

1	3
5	7

9	11
13	15

$$\sum_{k=1}^{8}(2\text{k} - 1) = 64 = 2^6$$



en cada capa se colocan

9	11
13	15

17	19
21	23

$$\sum_{k=5}^{12}(2\text{k} - 1) = 128 = 2^7$$

También coincide la mitad de los sumandos en las dos sumas. Ambas sumas tienen 4 números repetidos, desde el 9 hasta el 15. La suma de estos números es $48 = 2^4 \cdot 3$. Se verifica que:

$$48 = \frac{2^6 + 2^7}{4}$$

Para las siguientes ya no es posible una distribución de los números impares en objetos geométricos. Las potencias 2^8 y 2^9 se obtienen como:

$$1 + \cdots + 15 + 17 + \cdots + 31 = \sum_{k=1}^{16}(2\text{k} - 1) = 2^8$$

$$17 + \cdots + 31 + 33 + \cdots + 47 = \sum_{k=9}^{24}(2\text{k} - 1) = 2^9$$

Coincide la mitad de los sumandos en las dos sumas. Ambas sumas tienen 8 números repetidos, desde el 17 hasta el 31. La suma de estos números es $192 = 2^6 \cdot 3$.

$$192 = \frac{2^8 + 2^9}{4}$$

Y de igual forma sucede con las siguientes parejas:

$$\sum_{k=1}^{32}(2\text{k} - 1) = 2^{10} \qquad \sum_{k=17}^{48}(2\text{k} - 1) = 2^{11}$$

Una vez más coincide la mitad de los sumandos en las dos sumas. Ambas sumas tienen 16 números repetidos, desde el 33 hasta el 63. La suma de estos números es 768 = $2^8 \cdot 3$.

$$768 = \frac{2^{10} + 2^{11}}{4}$$

2.1. Cualquier potencia de base 2. Expresión general

Para las potencias de exponente par:

$$\sum_{k=1}^{2^{\mathrm{m}}} (2\mathrm{k} - 1) = 2^{2\mathrm{m}}$$

Para demostrarlo, se puede aplicar la suma de los términos de una progresión aritmética:

$$\sum_{k=1}^{2^{\mathrm{m}}} (2\mathrm{k} - 1) = \frac{\big((2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2^{\mathrm{m}} - 1)\big) \cdot 2^{\mathrm{m}}}{2} = \frac{2 \cdot 2^{\mathrm{m}} \cdot 2^{\mathrm{m}}}{2} = 2^{2\mathrm{m}}$$

Para las potencias de exponente impar:

$$\sum_{k=\frac{2^m - 2^{m-1} + 2}{2}}^{\frac{2^m + 2^{m-1}}{2}} (2\mathrm{k} - 1) = 2^{2\mathrm{m}-1}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{2^m - 2^{m-1} + 2}{2} = \frac{2^{m-1} \cdot (2 - 1) + 2}{2} = \frac{2^{m-1} + 2}{2} = 2^{m-2} + 1$$

$$\frac{2^m + 2^{m-1}}{2} = \frac{2^{m-1} \cdot (2 + 1)}{2} = \frac{2^{m-1} \cdot 3}{2} = 3 \cdot 2^{m-2}$$

la fórmula queda de la forma:

$$\sum_{k=2^{m-2}+1}^{3 \cdot 2^{m-2}} (2\mathrm{k} - 1) = 2^{2\mathrm{m}-1}$$

También la demostración se puede hacer con la suma de los términos de una progresión aritmética.

El número de términos es:

$$3 \cdot 2^{m-2} - (2^{m-2} + 1) + 1 = 2 \cdot 2^{m-2} = 2^{m-1}$$

y la suma de los términos:

$$\sum_{k=2^{m-2}+1}^{3\cdot 2^{m-2}}(2\mathrm{k}-1)=\frac{\left((2\cdot(2^{\mathrm{m}-2}+1)-1)+(2\cdot 3\cdot 2^{\mathrm{m}-2}-1)\right)\cdot 2^{\mathrm{m}-1}}{2}=$$

$$=\frac{(2^{\mathrm{m}-1}+2-1+6\cdot 2^{\mathrm{m}-2}-1)\cdot 2^{\mathrm{m}-1}}{2}=\frac{(2^{\mathrm{m}-1}+6\cdot 2^{\mathrm{m}-2})\cdot 2^{\mathrm{m}-1}}{2}=$$

$$=\frac{2^{\mathrm{m}-2}\cdot(2+6)\cdot 2^{\mathrm{m}-1}}{2}=4\cdot 2^{2\mathrm{m}-3}=2^{2\mathrm{m}-1}$$

Aunque este apartado se centra en la obtención de las potencias de 2, se puede apreciar también una regularidad con los números impares que se repiten en cada pareja de sumas.

2.2. Los números impares repetidos y su suma

En cada pareja de sumas que se ha utilizado, con la primera se obtiene una potencia de exponente par:

$$\sum_{k=1}^{2^{\mathrm{m}}}(2\mathrm{k}-1)=2^{2\mathrm{m}}$$

y con la segunda se obtiene la potencia de exponente impar siguiente, que se obtendría cambiando m por m+1 en la suma correspondiente a potencias de exponente impar.

$$\sum_{k=2^{(m+1)-2}+1}^{3\cdot 2^{(m+1)-2}}(2\mathrm{k}-1)=\sum_{\mathrm{k}=2^{m-1}+1}^{3\cdot 2^{m-1}}(2\mathrm{k}-1)=2^{2(\mathrm{m}+1)-1}=2^{2\mathrm{m}+1}$$

Como 2^{m-1} es la mitad de 2^m, en ambas sumas coinciden 2^{m-1} términos, desde $2^{m-1}+1$ hasta 2^m. Su suma es:

$$\sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^{m}}(2\mathrm{k}-1)=\frac{\left((2\cdot(2^{\mathrm{m}-1}+1)-1)+(2\cdot 2^{\mathrm{m}}-1)\right)\cdot 2^{\mathrm{m}-1}}{2}=$$

$$=\frac{(2^{\mathrm{m}}+2-1+2^{\mathrm{m}+1}-1)\cdot 2^{\mathrm{m}-1}}{2}=\frac{(2^{\mathrm{m}}+2^{\mathrm{m}+1})\cdot 2^{\mathrm{m}-1}}{2}=$$

$$=\frac{2^{\mathrm{m}}\cdot(1+2)\cdot 2^{\mathrm{m}-1}}{2}=\frac{3\cdot 2^{2\mathrm{m}-1}}{2}=3\cdot 2^{2\mathrm{m}-2}$$

También se podía haber obtenido esta fórmula con la otra relación utilizada:

$$\frac{2^{2m} + 2^{2m+1}}{4} = \frac{2^{2m}(1+2)}{4} = 3 \cdot 2^{2m-2}$$

3. Potencias de base 3

Observamos las sumas obtenidas para 3^2 y 3^3.

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$ $\qquad$ $\sum_{k=1}^{3}(2k-1) = 9 = 3^2$

$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$ $\qquad$ $\sum_{k=4}^{6}(2k-1) = 27 = 3^3$

Los números impares de ambas sumas son consecutivos.

Para obtener 3^4 y 3^5, los números impares se disponen formando cuadrados.

1	3	5
7	9	11
13	15	17

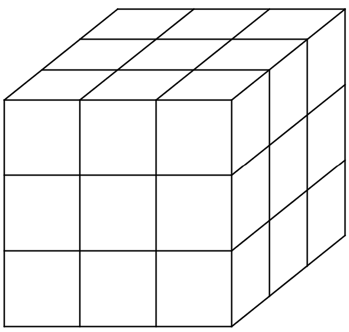
$$\sum_{k=1}^{9}(2k-1) = 81 = 3^4$$

19	21	23
25	27	29
31	33	35

$$\sum_{k=10}^{18}(2k-1) = 243 = 3^5$$

Los números impares de ambas sumas también son consecutivos.

Para obtener 3^6 y 3^7, hay que distribuir los números impares en cubos.



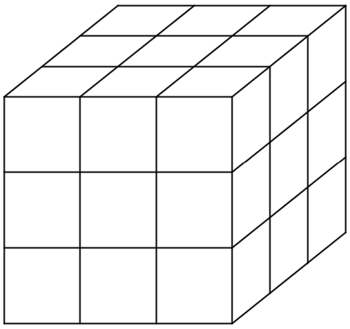
en cada capa se colocan

1	3	5
7	9	11
13	15	17

19	21	23
25	27	29
31	33	35

37	39	41
43	45	47
49	51	53

$$\sum_{k=1}^{27}(2k-1) = 729 = 3^6$$



en cada capa se colocan

55	57	59
61	63	65
67	69	71

73	75	77
79	81	83
85	87	89

91	93	95
97	99	101
103	105	107

$$\sum_{k=28}^{54}(2k-1) = 2187 = 3^7$$

Los números impares de ambas sumas son consecutivos.

Para las siguientes ya no es posible una distribución de los números impares en objetos geométricos. Las potencias 3^8 y 3^9 se obtienen como:

$$\sum_{k=1}^{81}(2k-1) = 3^8 \qquad \sum_{k=82}^{162}(2k-1) = 3^9$$

Y de igual forma sucede con las siguientes parejas. Para 3^{10} y 3^{11}:

$$\sum_{k=1}^{243}(2k-1) = 3^{10} \qquad \sum_{k=244}^{486}(2k-1) = 3^{11}$$

También los números impares de cada pareja de suma son consecutivos.

3.1. Cualquier potencia de base 3. Expresión general

Para las potencias de exponente par:

$$\sum_{k=1}^{3^m}(2k-1) = 3^{2m}$$

Para demostrarlo, se puede aplicar la suma de los términos de una progresión aritmética:

$$\sum_{k=1}^{3^m}(2k-1)=\frac{\big((2\cdot 1-1)+(2\cdot 3^m-1)\big)\cdot 3^m}{2}=\frac{2\cdot 3^m\cdot 3^m}{2}=3^{2m}$$

Para las potencias de exponente impar:

$$\sum_{k=\frac{3^m-3^{m-1}+2}{2}}^{\frac{3^m+3^{m-1}}{2}}(2k-1)=3^{2m-1}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{3^m-3^{m-1}+2}{2}=\frac{3^{m-1}\cdot(3-1)+2}{2}=\frac{3^{m-1}\cdot 2+2}{2}=3^{m-1}+1$$

$$\frac{3^m+3^{m-1}}{2}=\frac{3^{m-1}\cdot(3+1)}{2}=\frac{3^{m-1}\cdot 4}{2}=2\cdot 3^{m-1}$$

la fórmula queda de la forma:

$$\sum_{k=3^{m-1}+1}^{2\cdot 3^{m-1}}(2k-1)=3^{2m-1}$$

También la demostración se puede hacer con la suma de los términos de una progresión aritmética.

El número de términos es:

$$2\cdot 3^{m-1}-(3^{m-1}+1)+1=3^{m-1}$$

y la suma de los términos:

$$\sum_{k=3^{m-1}+1}^{2\cdot 3^{m-1}}(2k-1)=\frac{\big((2\cdot(3^{m-1}+1)-1)+(2\cdot 2\cdot 3^{m-1}-1)\big)\cdot 3^{m-1}}{2}=$$

$$=\frac{(2\cdot 3^{m-1}+2-1+4\cdot 3^{m-1}-1)\cdot 3^{m-1}}{2}=\frac{(2\cdot 3^{m-1}+4\cdot 3^{m-1})\cdot 3^{m-1}}{2}=$$

$$=\frac{6\cdot 3^{m-1}\cdot 3^{m-1}}{2}=3\cdot 3^{2m-2}=3^{2m-1}$$

Cambiando en esta última fórmula m por m+1, obtenemos:

$$\sum_{k=3^{(m+1)-1}+1}^{2\cdot 3^{(m+1)-1}} (2k-1) = \sum_{k=3^m+1}^{2\cdot 3^m} (2k-1) = 3^{2m+1}$$

En la suma para obtener la potencia 3^{2m} el límite superior es 3^m. En la suma para obtener la potencia 3^{2m+1} el límite inferior es 3^m+1. Por tanto, los números impares utilizados en las sumas para obtener las potencias 3^{2m} y 3^{2m+1} son consecutivos.

4. Potencias de base 4

Observamos las sumas obtenidas para 4^2 y 4^3.

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$ $\qquad \sum_{k=1}^{4}(2k-1) = 16 = 4^2$

$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$ $\qquad \sum_{k=7}^{10}(2k-1) = 64 = 4^3$

Entre ambas sumas quedan 2 números impares, el 9 y el 11. La suma de estos números intermedios es $20 = 2^2\cdot 5$.

$$20 = \frac{4^2 + 4^3}{4} = 4 + 4^2$$

Para obtener 4^4 y 4^5, los números impares se disponen formando cuadrados.

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

$$\sum_{k=1}^{16}(2k-1) = 256 = 4^4$$

49	51	53	55
57	59	61	63
65	67	69	71
73	75	77	79

$$\sum_{k=25}^{40}(2k-1) = 1024 = 4^5$$

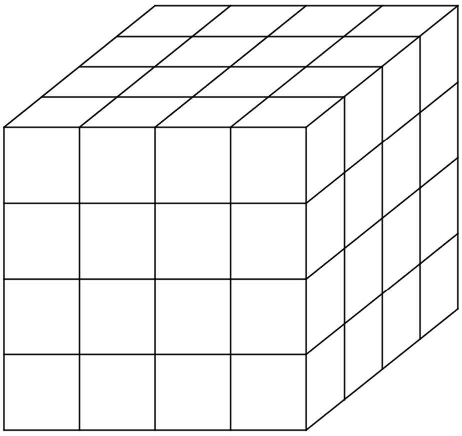
Entre ambas sumas quedan $8 = 2^3$ números impares, desde el 33 hasta el 47, que se podrían colocar formando medio cuadrado anterior. La suma de estos números es $320 = 2^6\cdot 5$.

$$320 = \frac{4^4 + 4^5}{4} = 4^3 + 4^4$$

33	35	37	39
41	43	45	47

$$\sum_{k=17}^{24} (2k - 1) = 320$$

Para obtener 4^6 y 4^7, hay que distribuir los números impares en cubos.



en cada capa se colocan

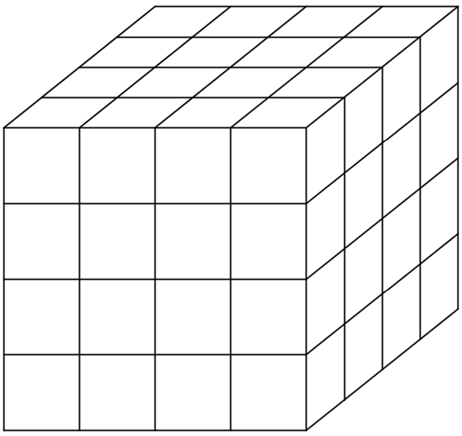
1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63

65	67	69	71
73	75	77	79
81	83	85	87
89	91	93	95

97	99	101	103
105	107	109	111
113	115	117	119
121	123	125	127

$$\sum_{k=1}^{64} (2k - 1) = 4096 = 4^6$$



en cada capa se colocan

193	195	197	199
201	203	205	207
209	211	213	215
217	219	221	223

225	227	229	231
233	235	237	239
241	243	245	247
249	251	253	255

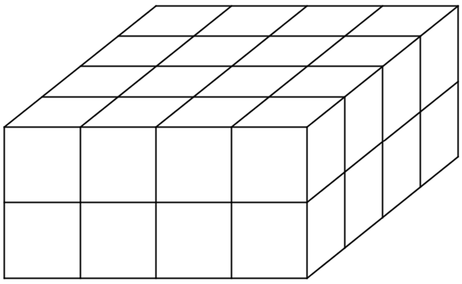
257	259	261	263
265	267	269	271
273	275	277	279
281	283	285	287

289	291	293	295
297	299	301	303
305	307	309	311
313	315	317	319

$$\sum_{k=97}^{160}(2\mathrm{k}-1)=16384=4^7$$

Entre ambas sumas quedan $32 = 2^5$ números impares, desde el 129 hasta el 191, que se podrían colocar formando medio cubo. La suma de estos números es $5120 = 2^{10}\cdot 5$.

$$5120=\frac{4^6+4^7}{4}=4^5+4^6$$



129	131	133	135
137	139	141	143
145	147	149	151
153	155	157	159

161	163	165	167
169	171	173	175
177	179	181	183
185	187	189	191

$$\sum_{k=65}^{96}(2\mathrm{k}-1)=5120$$

Para las siguientes ya no es posible una distribución de los números impares en objetos geométricos. Las potencias 4^8 y 4^9 se obtienen como:

$$\sum_{k=1}^{256}(2\mathrm{k}-1)=4^8 \qquad \sum_{k=385}^{640}(2\mathrm{k}-1)=4^9$$

Entre ambas sumas quedan $128 = 2^7$ números impares, desde el 513 hasta el 767. La suma de estos números es $81920 = 2^{14}\cdot 5$.

$$81920=\frac{4^8+4^9}{4}=4^7+4^8$$

Y de igual forma sucede con las siguientes parejas:

$$\sum_{k=1}^{1024}(2\mathrm{k}-1)=4^{10} \qquad \sum_{k=1537}^{2560}(2\mathrm{k}-1)=4^{11}$$

Entre ambas sumas quedan $512 = 2^9$ números impares, desde el 2049 hasta el 3071. La suma de estos números es $1310720 = 2^{18}\cdot 5$.

$$1310720=\frac{4^{10}+4^{11}}{4}=4^9+4^{10}$$

4.1. Cualquier potencia de base 4. Expresión general

Para las potencias de exponente par:

$$\sum_{k=1}^{4^{\mathrm{m}}}(2\mathrm{k}-1)=4^{2\mathrm{m}}$$

Para demostrarlo, se puede aplicar la suma de los términos de una progresión aritmética:

$$\sum_{k=1}^{4^{\mathrm{m}}}(2\mathrm{k}-1)=\frac{\left((2\cdot 1-1)+(2\cdot 4^{\mathrm{m}}-1)\right)\cdot 4^{\mathrm{m}}}{2}=\frac{2\cdot 4^{\mathrm{m}}\cdot 4^{\mathrm{m}}}{2}=4^{2\mathrm{m}}$$

Para las potencias de exponente impar:

$$\sum_{k=\frac{4^m-4^{m-1}+2}{2}}^{\frac{4^m+4^{m-1}}{2}}(2\mathrm{k}-1)=4^{2\mathrm{m}-1}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{4^m-4^{m-1}+2}{2}=\frac{4^{m-1}\cdot(4-1)+2}{2}=\frac{4^{m-1}\cdot 3+2}{2}=3\cdot 2^{2m-3}+1$$

$$\frac{4^m+4^{m-1}}{2}=\frac{4^{m-1}\cdot(4+1)}{2}=\frac{4^{m-1}\cdot 5}{2}=5\cdot 2^{2m-3}$$

la fórmula queda de la forma:

$$\sum_{k=3\cdot 2^{2m-3}+1}^{5\cdot 2^{2m-3}}(2\mathrm{k}-1)=4^{2\mathrm{m}-1}$$

También la demostración se puede hacer con la suma de los términos de una progresión aritmética.

El número de términos es:

$$5\cdot 2^{2m-3}-(3\cdot 2^{2m-3}+1)+1=2\cdot 2^{2m-3}=2^{2m-2}=4^{m-1}$$

y la suma de los términos:

$$\sum_{k=3\cdot 2^{2m-3}+1}^{5\cdot 2^{2m-3}}(2\mathrm{k}-1)=\frac{\left((2\cdot(3\cdot 2^{2\mathrm{m}-3}+1)-1)+(2\cdot 5\cdot 2^{2\mathrm{m}-3}-1)\right)\cdot 2^{2\mathrm{m}-2}}{2}=$$

$$= \frac{(6 \cdot 2^{2m-3} + 2 - 1 + 10 \cdot 2^{2m-3} - 1) \cdot 2^{2m-2}}{2} = \frac{(16 \cdot 2^{2m-3}) \cdot 2^{2m-2}}{2} =$$

$$= 8 \cdot 2^{4m-5} = 2^{4m-2} = 4^{2m-1}$$

Aunque este apartado se centra en la obtención de las potencias de 4, se puede apreciar también una regularidad con los números impares no utilizados.

4.2. Los números impares intermedios y su suma

En cada pareja de sumas que se ha utilizado, con la primera se obtiene una potencia de exponente par:

$$\sum_{k=1}^{4^m} (2k-1) = 4^{2m}$$

y con la segunda se obtiene la potencia de exponente impar siguiente, que se obtendría cambiando m por m+1 en la suma correspondiente a potencias de exponente impar.

$$\sum_{k=3\cdot 2^{2(m+1)-3}+1}^{5\cdot 2^{2(m+1)-3}} (2k-1) = \sum_{k=3\cdot 2^{2m-1}+1}^{5\cdot 2^{2m-1}} (2k-1) = 4^{2(m+1)-1} = 4^{2m+1}$$

Desde el límite superior de la primera suma, 4^m , hasta el límite inferior de la segunda suma, $3\cdot 2^{2m-1}+1$, hay:

$$3 \cdot 2^{2m-1} - 4^m = \frac{3}{2} \cdot 2^{2m} - 2^{2m} = \frac{1}{2} \cdot 2^{2m} = 2^{2m-1} \text{ números impares.}$$

La suma de estos números impares es:

$$\sum_{k=4^m+1}^{3\cdot 2^{2m-1}} (2k-1) = \frac{\left((2 \cdot (4^m + 1) - 1) + (2 \cdot 3 \cdot 2^{2m-1} - 1)\right) \cdot 2^{2m-1}}{2} =$$

$$= \frac{(2 \cdot 4^m + 2 - 1 + 6 \cdot 2^{2m-1} - 1) \cdot 2^{2m-1}}{2} = \frac{(2 \cdot 2^{2m} + 6 \cdot 2^{2m-1}) \cdot 2^{2m-1}}{2} =$$

$$= \frac{(2 \cdot 2^{2m} + 3 \cdot 2^{2m}) \cdot 2^{2m-1}}{2} = \frac{5 \cdot 2^{2m} \cdot 2^{2m-1}}{2} = 5 \cdot 2^{4m-2} = 5 \cdot 4^{2m-1}$$

También se podía haber obtenido esta fórmula con la otra relación utilizada:

$$\frac{4^{2m} + 4^{2m+1}}{4} = 4^{2m-1} + 4^{2m} = 4^{2m-1} \cdot (1+4) = 5 \cdot 4^{2m-1} = 5 \cdot 2^{4m-2}$$

5. Potencias de base 5

Observamos las sumas obtenidas para 5^2 y 5^3.

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$ $\qquad$ $$\sum_{k=1}^{5}(2k-1) = 25 = 5^2$$

$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$ $\qquad$ $$\sum_{k=11}^{15}(2k-1) = 125 = 5^3$$

Entre ambas sumas quedan otros 5 números impares, desde el 11 hasta el 19. La suma de estos números es $75 = 3\cdot 5^2$.

$$75 = \frac{5^2 + 5^3}{2}$$

Para obtener 5^4 y 5^5, los números impares se disponen formando cuadrados.

1	3	5	7	9
11	13	15	17	19
21	23	25	27	29
31	33	35	37	39
41	43	45	47	49

$$\sum_{k=1}^{25}(2k-1) = 625 = 5^4$$

101	103	105	107	109
111	113	115	117	119
121	123	125	127	129
131	133	135	137	139
141	143	145	147	149

$$\sum_{k=51}^{75}(2k-1) = 3125 = 5^5$$

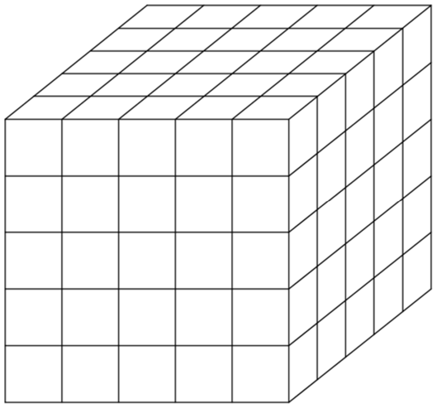
Entre ambas sumas quedan $25 = 5^2$ números impares, desde el 51 hasta el 99, que se podrían colocar formando otro cuadrado. La suma de estos números es $1875 = 3\cdot 5^4$.

$$1875 = \frac{5^4 + 5^5}{2}$$

51	53	55	57	59
61	63	65	67	69
71	73	75	77	79
81	83	85	87	89
91	93	95	97	99

$$\sum_{k=26}^{50}(2k-1)=1875$$

Para obtener 5^6 y 5^7, hay que distribuir los números impares en cubos.



1	3	5	7	9
11	13	15	17	19
21	23	25	27	29
31	33	35	37	39
41	43	45	47	49

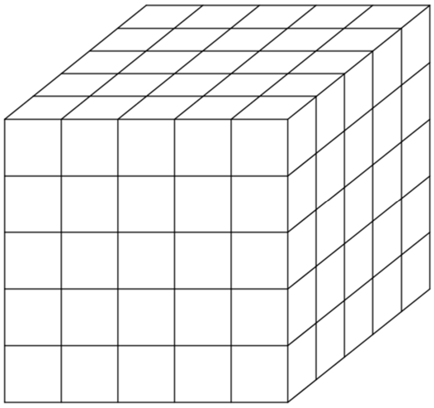
51	53	55	57	59
61	63	65	67	69
71	73	75	77	79
81	83	85	87	89
91	93	95	97	99

101	103	105	107	109
111	113	115	117	119
121	123	125	127	129
131	133	135	137	139
141	143	145	147	149

151	153	155	157	159
161	163	165	167	169
171	173	175	177	179
181	183	185	187	189
191	193	195	197	199

201	203	205	207	209
211	213	215	217	219
221	223	225	227	229
231	233	235	237	239
241	243	245	247	249

$$\sum_{k=1}^{125}(2k-1)=15625=5^6$$



501	503	505	507	509
511	513	515	517	519
521	523	525	527	529
531	533	535	537	539
541	543	545	547	549

551	553	555	557	559
561	563	565	567	569
571	573	575	577	579
581	583	585	587	589
591	593	595	597	599

601	603	605	607	609
611	613	615	617	619
621	623	625	627	629
631	633	635	637	639
641	643	645	647	649

651	653	655	657	659
661	663	665	667	669
671	673	675	677	679
681	683	685	687	689
691	693	695	697	699

701	703	705	707	709
711	713	715	717	719
721	723	725	727	729
731	733	735	737	739
741	743	745	747	749

$$\sum_{k=251}^{375} (2\mathrm{k}-1) = 78125 = 5^7$$

Entre ambas sumas quedan $125 = 5^3$ números impares, desde el 251 hasta el 499, que se podrían colocar formando otro cubo igual a los anteriores. La suma de estos números es $46875 = 3 \cdot 5^6$.

$$\sum_{k=126}^{250} (2k-1) = 46875 = \frac{5^6 + 5^7}{2}$$

Para las siguientes ya no es posible una distribución de los números impares en objetos geométricos. Las potencias 5^8 y 5^9 se obtienen como:

$$\sum_{k=1}^{625} (2\mathrm{k}-1) = 5^8 \qquad \sum_{k=1251}^{1875} (2\mathrm{k}-1) = 5^9$$

Entre ambas sumas quedan $625 = 5^4$ números impares, desde el 1251 hasta el 2499. La suma de estos números es $1171875 = 3 \cdot 5^8$.

$$1171875 = \frac{5^8 + 5^9}{2}$$

Y de igual forma sucede con las siguientes parejas:

$$\sum_{k=1}^{3125} (2\mathrm{k} - 1) = 5^{10} \qquad\qquad \sum_{k=6251}^{9375} (2\mathrm{k} - 1) = 5^{11}$$

Entre ambas sumas quedan $3125 = 5^5$ números impares, desde el 6251 hasta el 12499. La suma de estos números es $29296875 = 3 \cdot 5^{10}$.

$$29296875 = \frac{5^{10} + 5^{11}}{2}$$

5.1. Cualquier potencia de base 5. Expresión general

Para las potencias de exponente par:

$$\sum_{k=1}^{5^{\mathrm{m}}} (2\mathrm{k} - 1) = 5^{2\mathrm{m}}$$

Para demostrarlo, se puede aplicar la suma de los términos de una progresión aritmética:

$$\sum_{k=1}^{5^{\mathrm{m}}} (2\mathrm{k} - 1) = \frac{\big((2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 5^{\mathrm{m}} - 1)\big) \cdot 5^{\mathrm{m}}}{2} = \frac{2 \cdot 5^{\mathrm{m}} \cdot 5^{\mathrm{m}}}{2} = 5^{2\mathrm{m}}$$

Para las potencias de exponente impar:

$$\sum_{k=\frac{5^m - 5^{m-1} + 2}{2}}^{\frac{5^m + 5^{m-1}}{2}} (2\mathrm{k} - 1) = 5^{2\mathrm{m}-1}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{5^m - 5^{m-1} + 2}{2} = \frac{5^{m-1} \cdot (5 - 1) + 2}{2} = \frac{5^{m-1} \cdot 4 + 2}{2} = 2 \cdot 5^{m-1} + 1$$

$$\frac{5^m + 5^{m-1}}{2} = \frac{5^{m-1} \cdot (5 + 1)}{2} = \frac{5^{m-1} \cdot 6}{2} = 3 \cdot 5^{m-1}$$

la fórmula queda de la forma:

$$\sum_{k=2\cdot 5^{m-1}+1}^{3\cdot 5^{m-1}} (2\mathrm{k}-1) = 5^{2\mathrm{m}-1}$$

También la demostración se puede hacer con la suma de los términos de una progresión aritmética.

El número de términos es:

$$3\cdot 5^{m-1} - (2\cdot 5^{m-1} + 1) + 1 = 5^{m-1}$$

y la suma de los términos:

$$\sum_{k=2\cdot 5^{m-1}+1}^{3\cdot 5^{m-1}} (2\mathrm{k}-1) = \frac{\left((2\cdot(2\cdot 5^{\mathrm{m}-1}+1)-1)+(2\cdot 3\cdot 5^{\mathrm{m}-1}-1)\right)\cdot 5^{\mathrm{m}-1}}{2} =$$

$$= \frac{(4\cdot 5^{\mathrm{m}-1}+2-1+6\cdot 5^{\mathrm{m}-1}-1)\cdot 5^{\mathrm{m}-1}}{2} = \frac{10\cdot 5^{\mathrm{m}-1}\cdot 5^{\mathrm{m}-1}}{2} =$$

$$= 5\cdot 5^{2\mathrm{m}-2} = 5^{2\mathrm{m}-1}$$

Aunque este apartado se centra en la obtención de las potencias de 5, se puede apreciar también una regularidad con los números impares no utilizados.

5.2. Los números impares intermedios y su suma

En cada pareja de sumas que se ha utilizado, con la primera se obtiene una potencia de exponente par:

$$\sum_{k=1}^{5^{\mathrm{m}}} (2\mathrm{k}-1) = 5^{2\mathrm{m}}$$

y con la segunda se obtiene la potencia de exponente impar siguiente, que se obtendría cambiando m por m+1 en la suma correspondiente a potencias de exponente impar.

$$\sum_{k=2\cdot 5^{(m+1)-1}+1}^{3\cdot 5^{(m+1)-1}} (2\mathrm{k}-1) = \sum_{\mathrm{k}=2\cdot 5^{m}+1}^{3\cdot 5^{m}} (2\mathrm{k}-1) = 5^{2(\mathrm{m}+1)-1} = 5^{2\mathrm{m}+1}$$

Desde el límite superior de la primera suma, 5^{m} , hasta el límite inferior de la segunda suma, $2\cdot 5^{m}+1$, hay:

$$2\cdot 5^{m} - 5^{m} = 5^{m} \text{ números impares.}$$

La suma de estos números impares es:

$$\sum_{k=5^m+1}^{2\cdot 5^m}(2\mathrm{k}-1)=\frac{\big((2\cdot(5^{\mathrm{m}}+1)-1)+(2\cdot 2\cdot 5^{\mathrm{m}}-1)\big)\cdot 5^{\mathrm{m}}}{2}=$$

$$=\frac{(2\cdot 5^{\mathrm{m}}+2-1+4\cdot 5^{\mathrm{m}}-1)\cdot 5^{\mathrm{m}}}{2}=\frac{(2\cdot 5^{\mathrm{m}}+4\cdot 5^{\mathrm{m}})\cdot 5^{\mathrm{m}}}{2}=$$

$$=\frac{6\cdot 5^{\mathrm{m}}\cdot 5^{\mathrm{m}}}{2}=3\cdot 5^{2\mathrm{m}}$$

También se podía haber obtenido esta fórmula con la otra relación utilizada:

$$\frac{5^{2\mathrm{m}}+5^{2\mathrm{m}+1}}{2}=\frac{5^{2\mathrm{m}}(1+5)}{2}=3\cdot 5^{2\mathrm{m}}$$

6. Caso general. Potencias de base n

En (L. Barrios, 2015, pp. 55-74) se dedujo la forma de calcular cualquier potencia de exponente par de los números naturales, con la fórmula:

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{n}^{\mathrm{m}}}(2\mathrm{k}-1)=\mathrm{n}^{2\mathrm{m}} \qquad (1)$$

siendo n y m números naturales.

Y también la forma de calcular cualquier potencia de exponente impar de los números naturales, con la fórmula:

$$\sum_{k=\frac{n^m-n^{m-1}+2}{2}}^{\frac{n^m+n^{m-1}}{2}}(2\mathrm{k}-1)=\mathrm{n}^{2\mathrm{m}-1} \qquad (2)$$

con n y m números naturales y m>1.

6.1. Los números impares intermedios

Las parejas disjuntas de potencias consideradas en el artículo habían de tener, en este orden, exponente par y exponente impar, esto es $\mathrm{n}^{2\mathrm{m}}$, la primera, y $\mathrm{n}^{2\mathrm{m}+1}$ la segunda, con m>1.

La fórmula (1) del apartado anterior recoge una de las potencias que nos interesan. Para obtener la fórmula de $\mathrm{n}^{2\mathrm{m}+1}$, basta que sustituyamos en (2) m por m+1. Así obtenemos:

$$\sum_{k=\frac{n^{(m+1)}-n^{(m+1)-1}+2}{2}}^{\frac{n^{(m+1)}+n^{(m+1)-1}}{2}}(2\mathrm{k}-1)=\sum_{k=\frac{n^{m+1}-n^{m}+2}{2}}^{\frac{n^{m+1}+n^{m}}{2}}(2\mathrm{k}-1)=\mathrm{n}^{2\mathrm{m}+1} \qquad (3)$$

En el sumatorio (1), el límite inferior de la suma es 1 y el límite superior es n^m. Este sumatorio tiene, por tanto, n^m sumandos.

En el sumatorio (3), el límite inferior de la suma es $\frac{n^{m+1}-n^m+2}{2}$ y el límite superior es $\frac{n^{m+1}+n^m}{2}$. El número de sumandos de este sumatorio es:

$$\frac{n^{m+1}+n^m}{2}-\frac{n^{m+1}-n^m+2}{2}+1=\frac{2n^m-2}{2}+1=n^m-1+1=n^m$$

Ambos sumatorios tienen el mismo número de sumandos.

Para n=2 el límite superior del sumatorio (1) es 2^m y el límite inferior del sumatorio (3) es $\frac{2^{m+1}-2^m+2}{2}=\frac{2^m\cdot 2-2^m+2}{2}=\frac{2^m+2}{2}=2^{m-1}+1$.

Para $m>1$ se verifica que $2^{m-1}+1<2^m$, por lo que ambas sumas tienen términos comunes. La cantidad de números impares repetidos es:

$$n^m-\frac{n^{m+1}-n^m+2}{2}+1=\frac{3n^m-n^{m+1}}{2}=\frac{\mathrm{n}^{\mathrm{m}}(3-\mathrm{n})}{2}$$

$$2^m-\frac{2^{m+1}-2^m+2}{2}+1=2^m-(2^{m-1}+1)+1=2^m-2^{m-1}=2^{m-1}$$

Para los distintos valores de m, se tiene la sucesión: 1, 2, 4, 8,... , 2^{m-1}, ... La cantidad de números impares repetidos en las dos sumas coincide con la mitad de los números utilizados en cada una de ellas, pues $2^{m-1}=\frac{1}{2}\cdot 2^m$.

Para n=3 el límite superior del sumatorio (1) es 3^m y el límite inferior del sumatorio (3) es $\frac{3^{m+1}-3^m+2}{2}=\frac{3^m\cdot 3-3^m+2}{2}=\frac{2\cdot 3^m+2}{2}=3^m+1$. Los números impares utilizados en ambas sumas son consecutivos, no hay sumandos repetidos ni sumandos intermedios.

Para valores de n mayores que 3, el límite superior del sumatorio (1) es n^m y el límite inferior del sumatorio (3) es $\frac{n^{m+1}-n^m+2}{2}=\frac{n^m\cdot n-n^m+2}{2}=\frac{n^m\cdot(n-1)+2}{2}=n^m\cdot\frac{n-1}{2}+1$.

Si $n>3$, se verifica que $n^m\cdot\frac{n-1}{2}+1>n^m$, (basta darle valores a n). Por tanto, quedan números impares intermedios entre ambos sumatorios. La cantidad de números impares que hay entre ambas sumas es:

$$\frac{n^{m+1}-n^m+2}{2}-n^m+1=\frac{n^{m+1}-3n^m}{2}=\frac{\mathrm{n}^{\mathrm{m}}(\mathrm{n}-3)}{2} \qquad (4)$$

Cuando n=4, la cantidad anterior es $\frac{1}{2}\cdot 4^m$ y, como la cantidad de sumandos de (1) y (3) es $n^m = 4^m$, volvemos a encontrar que la cantidad de números impares intermedios es la mitad de sumandos del sumatorio (1) o del (3) que nos dan, respectivamente, los valores de 4^{2m} y 4^{2m+1}.

Al variar m se obtiene la sucesión 2, 8, 32 , 128, ... , $\frac{4^m}{2}$, ... , que nos va dando la cantidad de impares consecutivos no utilizados en la obtención de cada pareja sucesiva de potencias de 4.

Si n=5, la cantidad de números impares intermedios, dada por (4), es 5^m, que coincide con la cantidad de sumandos de (1) o de (3) que es $n^m = 5^m$. Al variar m se obtiene la sucesión 5, 25, 125, 625, ... , 5^m, ... , que nos va dando la cantidad de impares consecutivos no utilizados en la obtención de cada pareja sucesiva de potencias de 5.

Para n=6, la cantidad de números impares intermedios, dada por (4), es $\frac{3}{2}6^m$, luego el número de impares intermedios son los tres medios de la cantidad de sumandos de (1) o de (3) que es $n^m = 6^m$. Al variar m se obtiene la sucesión 9, 54, 324, 1944, ..., $\frac{3}{2}\cdot 6^m$, ... que nos va dando la cantidad de impares consecutivos no utilizados en la obtención de cada pareja sucesiva de potencias de 6.

Cuando n=7, la cantidad de números impares intermedios, dada por (4), es $2\cdot 7^m$, esto es, el doble de la cantidad de sumandos de (1) o de (3) que es $n^m = 7^m$. Al variar m se obtiene la sucesión 14, 98, 686, 4802, ..., $2\cdot 7^m\ldots$, que nos va dando la cantidad de impares consecutivos no utilizados en la obtención de cada pareja sucesiva de potencias de 7.

Y así concluimos que, para $n > 3$, la cantidad de números impares intermedios entre las sumas dadas por las expresiones (1) y (3), viene dada por la sucesión:

$$\frac{1}{2}\cdot 4^m\ ,\ \frac{2}{2}\cdot 5^m = 5^m\ ,\ \frac{3}{2}\cdot 6^m\ ,\ \frac{4}{2}\cdot 7^m = 2\cdot 7^m\ ,\ \frac{5}{2}\cdot 8^m\ ,\ \ldots,\ \frac{n-3}{2}\cdot n^m\ ,\ \ldots$$

6.2. Suma de los números impares intermedios

La suma de todos los números impares intermedios es:

$$\sum_{k=n^m+1}^{\frac{n^{m+1}-n^m}{2}}(2k-1) = \frac{\left((2\cdot(n^m+1)-1)+\left(2\cdot\frac{n^{m+1}-n^m}{2}-1\right)\right)\cdot\frac{n^m(n-3)}{2}}{2} =$$

$$= \frac{(2\cdot n^m+2-1+n^{m+1}-n^m-1)\cdot n^m(n-3)}{4} = \frac{(n^m+n^{m+1})\cdot n^m\cdot(n-3)}{4} =$$

$$= \frac{n^m\cdot(1+n)\cdot n^m\cdot(n-3)}{4} = \frac{(n+1)\cdot(n-3)\cdot n^{2m}}{4}$$

Al sustituir n por 2, 3, 4 y 5 se obtiene el valor de la suma calculada en los anteriores apartados.

Para n=2, en el numerador el factor es "3-n" en lugar de "n-3" y se obtiene:

$$\frac{(n+1)\cdot(3-n)\cdot n^{2m}}{4}=\frac{(2+1)\cdot(3-2)\cdot 2^{2m}}{4}=3\cdot 2^{2m-2}$$

Para n=3, no hay términos repetidos ni intermedios. Al sustituir en la fórmula se obtiene 0 en todos los casos.

Para n=4, se obtiene:

$$\frac{(n+1)\cdot(n-3)\cdot n^{2m}}{4}=\frac{(4+1)\cdot(4-3)\cdot 4^{2m}}{4}=5\cdot 4^{2m-1}$$

Para n=5, se obtiene

$$\frac{(n+1)\cdot(n-3)\cdot n^{2m}}{4}=\frac{(5+1)\cdot(5-3)\cdot 5^{2m}}{4}=3\cdot 5^{2m}$$

Coincide el valor de cada una de las sumas con el valor obtenido en el apartado correspondiente.

A continuación de la bibliografía, figuran dos tablas con un resumen de las sumas de números impares vistas en los dos artículos, para obtener las potencias de los números naturales.

Bibliografía

Barrios, L. (2015). Los números impares y las potencias de los números naturales. *Números*. 88.

Luis Barrios Calmaestra. I.E.S. José de Mora, Baza, Granada. Natural de Torredonjimeno, Jaén. Profesor de Secundaria y Bachillerato. Colaborador con el Proyecto Descartes. Tiene varias publicaciones de materiales didácticos para el Proyecto Descartes y algunas unidades didácticas con calculadoras gráficas CASIO.
Email: luisbarrioscalmaestra@gmail.com

Los números impares y las potencias de exponente par de los números naturales					
$\sum_{k=1}^{2}(2k-1)=2^2$	$\sum_{k=1}^{3}(2k-1)=3^2$	$\sum_{k=1}^{4}(2k-1)=4^2$	$\sum_{k=1}^{5}(2k-1)=5^2$	...	$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$
$\sum_{k=1}^{4}(2k-1)=2^4$	$\sum_{k=1}^{9}(2k-1)=3^4$	$\sum_{k=1}^{16}(2k-1)=4^4$	$\sum_{k=1}^{25}(2k-1)=5^4$	...	$\sum_{k=1}^{n^2}(2k-1)=n^4$
$\sum_{k=1}^{8}(2k-1)=2^6$	$\sum_{k=1}^{27}(2k-1)=3^6$	$\sum_{k=1}^{64}(2k-1)=4^6$	$\sum_{k=1}^{125}(2k-1)=5^6$	...	$\sum_{k=1}^{n^3}(2k-1)=n^6$
$\sum_{k=1}^{16}(2k-1)=2^8$	$\sum_{k=1}^{81}(2k-1)=3^8$	$\sum_{k=1}^{256}(2k-1)=4^8$	$\sum_{k=1}^{625}(2k-1)=5^8$	...	$\sum_{k=1}^{n^4}(2k-1)=n^8$
$\sum_{k=1}^{32}(2k-1)=2^{10}$	$\sum_{k=1}^{243}(2k-1)=3^{10}$	$\sum_{k=1}^{1024}(2k-1)=4^{10}$	$\sum_{k=1}^{3125}(2k-1)=5^{10}$	...	$\sum_{k=1}^{n^5}(2k-1)=n^{10}$
...	...	...	...		...
$\sum_{k=1}^{2^m}(2k-1)=2^{2m}$	$\sum_{k=1}^{3^m}(2k-1)=3^{2m}$	$\sum_{k=1}^{4^m}(2k-1)=4^{2m}$	$\sum_{k=1}^{5^m}(2k-1)=5^{2m}$	...	$\sum_{k=1}^{n^m}(2k-1)=n^{2m}$

Los números impares y las potencias de exponente impar de los números naturales					
$\sum_{k=2}^{3}(2k-1)=2^3$	$\sum_{k=4}^{6}(2k-1)=3^3$	$\sum_{k=7}^{10}(2k-1)=4^3$	$\sum_{k=11}^{15}(2k-1)=5^3$	...	$\sum_{k=\frac{n^2-n+2}{2}}^{\frac{n^2+n}{2}}(2k-1)=n^3$
$\sum_{k=3}^{6}(2k-1)=2^5$	$\sum_{k=10}^{18}(2k-1)=3^5$	$\sum_{k=25}^{40}(2k-1)=4^5$	$\sum_{k=51}^{75}(2k-1)=5^5$	...	$\sum_{k=\frac{n^3-n^2+2}{2}}^{\frac{n^3+n^2}{2}}(2k-1)=n^5$
$\sum_{k=5}^{12}(2k-1)=2^7$	$\sum_{k=28}^{54}(2k-1)=3^7$	$\sum_{k=97}^{160}(2k-1)=4^7$	$\sum_{k=251}^{375}(2k-1)=5^7$	...	$\sum_{k=\frac{n^4-n^3+2}{2}}^{\frac{n^4+n^3}{2}}(2k-1)=n^7$
$\sum_{k=9}^{24}(2k-1)=2^9$	$\sum_{k=82}^{162}(2k-1)=3^9$	$\sum_{k=385}^{640}(2k-1)=4^9$	$\sum_{k=1251}^{1875}(2k-1)=5^9$	...	$\sum_{k=\frac{n^5-n^4+2}{2}}^{\frac{n^5+n^4}{2}}(2k-1)=n^9$
$\sum_{k=17}^{48}(2k-1)=2^{11}$	$\sum_{k=244}^{486}(2k-1)=3^{11}$	$\sum_{k=1537}^{2560}(2k-1)=4^{11}$	$\sum_{k=6251}^{9375}(2k-1)=5^{11}$	...	$\sum_{k=\frac{n^6-n^5+2}{2}}^{\frac{n^6+n^5}{2}}(2k-1)=n^{11}$
...	...	...	...		...
$\sum_{k=\frac{2^m-2^{m-1}+2}{2}}^{\frac{2^m+2^{m-1}}{2}}(2k-1)=2^{2m-1}$	$\sum_{k=\frac{3^m-3^{m-1}+2}{2}}^{\frac{3^m+3^{m-1}}{2}}(2k-1)=3^{2m-1}$	$\sum_{k=\frac{4^m-4^{m-1}+2}{2}}^{\frac{4^m+4^{m-1}}{2}}(2k-1)=4^{2m-1}$	$\sum_{k=\frac{5^m-5^{m-1}+2}{2}}^{\frac{5^m+5^{m-1}}{2}}(2k-1)=5^{2m-1}$	...	$\sum_{k=\frac{n^m-n^{m-1}+2}{2}}^{\frac{n^m+n^{m-1}}{2}}(2k-1)=n^{2m-1}$