

Los textos matemáticos de Antonio Terry y Rivas

Vicente Meavilla Seguí (Universidad de Zaragoza. España)

Antonio M. Oller Marcén (Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza. España)

Fecha de recepción: 22 de abril de 2015

Fecha de aceptación: 3 de agosto de 2015

Resumen

El siglo XIX, y en particular su último tercio, fue un periodo prolífico en cuanto a la producción de textos matemáticos de autores españoles, muchos de los cuales profesaron la carrera militar y escribían para alumnos militares. Uno de ellos fue Antonio Terry y Rivas, andaluz, marino, académico y senador, que escribió libros de problemas resueltos de Álgebra, Aritmética, Geometría y Trigonometría. En este artículo ofrecemos la descripción de dichos manuales, convencidos de que materiales de este tipo pueden resultar de utilidad para los historiadores de la educación matemática en España.

Palabras clave

Historia de la educación matemática, siglo XIX, problemas resueltos, Antonio Terry y Rivas.

Title

The Mathematical Works by Antonio Terry y Rivas

Abstract

XIX century, and particularly its last third, was a prolific period regarding the production of mathematical texts by Spanish authors, many of which were professional military and wrote for military students. One of them was Antonio Terry y Rivas, Andalusian, sailor, academic and senator, who wrote books of solved problems about Algebra, Arithmetic, Geometry and Trigonometry. In this paper we present a description of those manuals, in the belief that this kind of material might be useful for historians of Mathematics Education.

Keywords

History of Mathematics Education, XIX century, solved problems, Antonio Terry y Rivas.

1. Introducción

El tercio final del siglo XIX supuso para las Matemáticas (García, 1982) “*un periodo de consolidación y en el que se acorta la distancia que hasta entonces separaba el cultivo de esta ciencia en España de la de otros países avanzados*”. Aunque cada vez en menor medida, las academias militares siguen siendo centros de importancia para el desarrollo de las Matemáticas y existe una gran cantidad de manuales y textos matemáticos escritos por y para militares (Velamazán, 1990).

De hecho (Maz, 2005), entre los principales autores españoles de textos matemáticos de la época se encuentran, por citar unos pocos, Manuel Benítez y Parodi (general de división y académico de número de la Real de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales), Miguel Ortega y Sala (coronel de



ingenieros) o Antonio Terry y Rivas. Es a este último autor al que vamos a prestar atención en este trabajo.

Antonio Terry y Rivas nació en Cádiz en 1838. A la edad de 14 años ingresó en el Colegio Naval Militar. Tras una dilatada vida militar con múltiples destinos y cargos (Martínez, 1957) fue designado como diputado a Cortes por la ciudad de Cádiz (elección general verificada el 30 de abril de 1899) y, posteriormente en ese mismo año, fue nombrado senador por la provincia de Canarias. También fue académico correspondiente de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona. Falleció en Madrid el 2 de noviembre de 1900.



Figura 1. Retrato de Antonio Terry y Rivas aparecido en *El Mundo Naval Ilustrado* (Núm. 30 del 10 de Noviembre de 1900, p. 473)

En las líneas que siguen presentamos algunos datos biográficos relativos a su actividad militar, política y científica. Para una biografía detallada se puede consultar el trabajo (García Álvarez de la Villa, 2014)

- | | |
|------|--|
| 1838 | Nace el 26 de noviembre en Cádiz. |
| 1852 | Ingresa en el Colegio Naval Militar. |
| 1875 | Tal como se detalla en la portada de <i>El desvío de la aguja náutica</i> (Terry, 1875b), es Teniente de Navío de primera clase de la Armada y oficial de la sección de Armamentos del Ministerio de Marina. |
| 1875 | Tal como se indica en la portada del <i>Manual del navegante redactado con presencia de los mejores autores modernos</i> (1875c), es Capitán de Fragata de la Armada. |
| 1879 | Tal como se detalla en la portada de los <i>Problemas y ejercicios de cálculo algebraico parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia</i> (Terry, 1879a, 1879b), es Coronel Graduado de Ejército. |
| 1880 | Tal como se indica en la portada de los <i>Ejercicios y problemas de Aritmética parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia</i> (Terry, 1880a, 1880b), es oficial 1.º de Secretaría del Ministerio de Marina. |
| 1884 | Tal como se detalla en la portada de las <i>Tablas de azimutes para todos los astros cuya declinación no excede de 30° y entre los paralelos 0° y 60° en ambos hemisferios seguidas de las tablas de declinación del Sol y de tablas de declinaciones y ascensiones rectas de las primeras estrellas</i> (Terry, |

- 1884), es Capitán de Fragata de la Armada y del Puerto de Manila.
- 1894 Tal como se indica en la portada de la *Compensación de la aguja de Thomson. Instrucciones* (Terry, 1894), es Capitán de Navío de la Armada y Comandante de Marina de Bilbao.
- 1896 Diputado a Cortes por el distrito de Cádiz. El 21 de noviembre es elegido miembro de la Comisión de Meteorología exógena y endógena de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona.
- 1899 Senador por la provincia de Canarias. Ascende a contralmirante de la Armada. Atendiendo a la información de la portada del *Diccionario de los términos y frases de Marina. Español – Francés – Inglés. Obra útil para las marinas militar y mercante, cónsules, armadores, consignatarios, maquinistas navales, agentes comerciales, sociedades de seguros, etc.* (Terry, 1899) es Subsecretario del Ministerio de Marina.
- 1900 Fallece el 2 de noviembre en Madrid.

Terry y Rivas escribió diversos libros sobre temas náuticos. En concreto, hemos localizado las siguientes obras sobre estos temas:

- *El compañero del navegante a la vista de las tierras* (Terry, 1875a).
- *El desvío de la aguja náutica* (Terry, 1875b).
- *Manual del navegante redactado con presencia de los mejores autores modernos* (Terry, 1875c).
- *Tablas náuticas para aprender los cuadros de navegación partes recopiladas y partes compuestas* (Terry, 1879c).
- *Tablas de azimutes para todos los astros cuya declinación no excede de 30° y entre los paralelos 0° y 60° en ambos hemisferios seguidas de las tablas de declinación del Sol y de tablas de declinaciones y ascensiones rectas de las primeras estrellas* (Terry, 1884)
- *Guía del marino en el puente* (Terry, 1892).
- *Compensación de la aguja de Thomson. Instrucciones* (Terry, 1894).
- *Diccionario de los términos y frases de Marina. Español – Francés – Inglés. Obra útil para las marinas militar y mercante, cónsules, armadores, consignatarios, maquinistas navales, agentes comerciales, sociedades de seguros, etc.* (Terry, 1899).
- *Apuntes de Meteorología Náutica, oceanografía y derrotas* (Terry & Suances, 1899).

Además de estos libros sobre navegación, hemos encontrado cinco (aunque, como veremos, esencialmente fueron cuatro) textos de problemas y ejercicios resueltos de Álgebra, Aritmética, Geometría y Trigonometría (todos ellos declarados obra de texto para las oposiciones de ingreso en el Cuerpo General de la Armada), que son los que aquí nos ocupan:

- *Problemas y ejercicios de Cálculo algebraico, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia* (Terry, 1879a, 1879b).
- *Ejercicios y problemas de Aritmética, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia* (Terry, 1880a, 1880b).
- *Ejercicios de Geometría, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia* (Terry, 1881a).
- *Ejercicios de Trigonometría, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia* (Terry, 1881b).
- *Ejercicios de Álgebra parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia* (Terry, 1885a, 1885b).



Además, en la sección «Obras del mismo autor», que aparece al final de los dos tomos de los *Ejercicios de Álgebra* que hemos consultado para escribir este artículo, se publicitan los siguientes manuales de matemáticas que no hemos sido capaces de localizar:

- *Teoría de las desigualdades y análisis indeterminado de primer grado*. Complemento al programa de Álgebra, declarado de texto para las oposiciones de ingreso en el Cuerpo General de la Armada.
- *Ejercicios de Aritmética y Álgebra*, arreglados en presencia del programa para el estudio de estas asignaturas en los Institutos de segunda enseñanza. (Próximo a publicarse.)
- *Ejercicios del cálculo diferencial e integral*. (En estudio.)

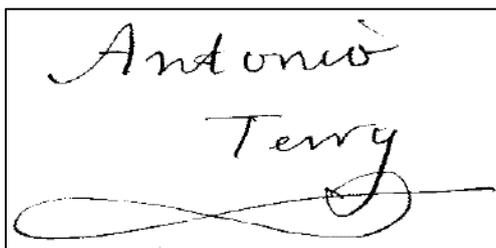
The image shows a handwritten signature in black ink on a white background. The signature reads "Antonio Terry" in a cursive script. Below the name, there is a long, horizontal flourish that starts with a large loop on the left and ends with a smaller loop on the right, crossing itself in the middle.

Figura 2. Autógrafo de Antonio Terry y Rivas, según aparece en su expediente personal del Senado de España (ref. ES.28079.HIS-0462-01)

Como ya hemos indicado, todos ellos consisten en colecciones de problemas resueltos de cada una de las materias consideradas. En algunos casos, como en los textos de Álgebra y Aritmética, se presentan en un tomo los enunciados y en un tomo aparte las soluciones junto con breves introducciones teóricas de cada tema. Sin embargo, en los textos de Geometría y Trigonometría se presentan los enunciados con sus soluciones desarrolladas inmediatamente a continuación.

Este tipo de textos (colecciones estructuradas de problemas resueltos) eran muy poco habituales en la época (aunque no únicos, como ilustra la obra de Guillermo Stirling (1849) *Repertorio para marinos y matemáticos de problemas de Trigonometría esférica*). Así lo hace notar el propio autor en el prólogo de sus *Problemas y ejercicios de Cálculo algebraico* (su primera obra):

Es seguro que las personas ilustradas [...] no dejarán de hallar en esta obra bastantes defectos inherentes a un trabajo casi único en España, por las dificultades que he tenido que vencer.

Por su parte, en el informe de la Junta de exámenes e ingresos de la Escuela Naval que precede a los *Ejercicios y problemas de Aritmética*, se hace énfasis no sólo en la singularidad del texto, sino también en la utilidad y el valor pedagógico de este tipo de obras:

La Junta entiende que el desarrollo práctico de la Aritmética en ejercicios y problemas, es el procedimiento de mejores resultados para aquilatar el grado de seguridad y de soltura con que el examinando posee y utiliza las reglas teóricas, y en tal concepto, concede grandísimo valor y utilidad a la citada obra que, siendo en nuestro idioma la única en su género, viene a complementar los tratados que sirven de texto y en los que, dando, como es justo, primordial importancia a la teoría, no es posible incluir sin dañar a la claridad de su exposición, una tan variada y completa colección de ejercicios como presenta el Sr. Terry.

Pensamos que esta originalidad (en su tiempo) en la presentación de los temas merece el estudio detenido de las obras matemáticas de este autor, que abordamos a continuación.

2. Los Problemas y ejercicios de Cálculo algebraico

Los *Problemas y ejercicios de Cálculo algebraico: parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia* se editaron por primera vez en Madrid, el año de 1879. Constituyeron la primera obra de carácter matemático de Terry y Rivas.

El objetivo didáctico de Antonio Terry al escribir esta obra queda claro en su prólogo:

Al presentar esta obra, mi objeto ha sido ofrecer a los discípulos una colección de problemas y ejercicios de todas las operaciones del Álgebra elemental, componiendo la primera parte los datos, y la segunda las soluciones y resultados. Todos los problemas y ejercicios se hallan ordenados convenientemente, y de tal suerte, que en cada artículo se hallan al principio aquellos que son muy elementales; después, a medida que se adelanta, las dificultades se complican poco a poco, resultando que los últimos de cada serie son bastante difíciles. He creído deber dar en muchos de los problemas y ejercicios las soluciones completas para que los discípulos puedan estudiarlos por sí mismos, y exponerlos después en las clases a presencia del profesor, y también para acostumbrarlos a los razonamientos y a todas las transformaciones necesarias a la práctica de los cálculos del mismo género que deben proponérseles con frecuencia.

El libro se estructura en dos tomos. El primero se desarrolla en ciento noventa y ocho páginas y contiene los enunciados de tres mil ejercicios y problemas; el segundo, presenta las soluciones o resultados (según se trate de problemas o ejercicios, respectivamente) de los mismos a lo largo de doscientas sesenta y dos páginas.

2.1. Contenidos del Tomo I (Primera parte: enunciados)

Los problemas y ejercicios que forman el texto se van presentando secuencialmente organizados en una serie de temas que presentamos a continuación. Indicamos entre paréntesis los números de orden de los problemas (ejercicios) correspondientes a cada tópico:

- Valores numéricos de las cantidades algebraicas (1-25).
- Adición de las cantidades algebraicas (26-48).
- Sustracción de las cantidades algebraicas (49-82).
- Multiplicación de las cantidades algebraicas (83-151).
- División de las cantidades algebraicas (152-242).
- Descomposición en factores de ciertas expresiones algebraicas (243-297).
- Máximo común divisor (298-387).
- Mínimo común múltiplo (388-449).
- Reducción de fracciones algebraicas a su más simple expresión (450-526).
- Adición y sustracción de las fracciones algebraicas (527-635).
- Multiplicación de las fracciones algebraicas (636-684).
- División de las fracciones algebraicas (685-722).
- Combinación de las operaciones anteriores (723-795).
- Elevación a potencias (796-824).
- Extracción de la raíz cuadrada (825-882).



- Extracción de la raíz cuarta (883-892).
- Extracción de la raíz octava (893-894).
- Extracción de la raíz cúbica (895-917).
- Extracción de la raíz sexta (918-923).
- Reducción de radicales (924-951).
- Adición y sustracción de radicales (952-1000).
- Multiplicación de radicales (1001-1070).
- División de radicales (1071-1104).
- Elevación a potencias de radicales (1105-1134).
- Extracción de raíces de radicales (1135-1153).
- Módulos (1154-1172).
- Transformación de un quebrado en que el denominador sea irracional o imaginario en otro cuyo denominador sea racional (1173-1230).
- Transformación de expresiones de la forma $\sqrt{A + \sqrt{B}}$, $\sqrt{A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D}}$ y $\sqrt[3]{A + \sqrt{B}}$ (1231-1308).
- Adición y sustracción de cantidades afectadas de exponentes negativos y fraccionarios (1309-1326).
- Multiplicación y división de cantidades afectadas de exponentes negativos y fraccionarios (1327-1365).
- Simplificación de expresiones (1366-1372).
- Elevación a potencias y extracción de raíces de cantidades afectadas de exponentes negativos y fraccionarios (1373-1404).
- Resolución de las ecuaciones de primer grado con una sola incógnita (1405-1533).
- Ecuaciones de primer grado con una sola incógnita que contienen radicales (1534-1631).
- Problemas de primer grado con una sola incógnita (1632-1726).
- Resolución de las ecuaciones de primer grado con varias incógnitas (1727-1869).
- Ecuaciones que requieren ciertos artificios particulares para su más pronta resolución (1870-1882).
- Problemas de primer grado con varias incógnitas (1883-1945).
- Desigualdades de primer grado (1946-1968).
- Resolución de las ecuaciones de segundo grado con una sola incógnita (1969-2058).
- Ecuaciones que pueden resolverse como las de segundo grado (2059-2211).
- Resolución de las ecuaciones de segundo grado con varias incógnitas (2212-2316).
- Ecuaciones que requieren ciertos artificios particulares para su resolución (2317-2321).
- Problemas de segundo grado con una o varias incógnitas (2322-2366).
- Cuestiones sobre máximos y mínimos que pueden resolverse por las ecuaciones de segundo grado (2367-2402).
- Resolución de las ecuaciones indeterminadas de primero y segundo grado en números enteros y positivos (2403-2454).
- Problemas indeterminados de primero y segundo grado (2455-2491).
- Permutaciones y combinaciones (2492-2525).
- Desarrollo de las potencias de los binomios y polinomios por medio del binomio de Newton (2526-2546).
- Hallar uno o varios términos determinados en el desarrollo de la potencia de un binomio (2547-2560).
- Desarrollo de los polinomios (2561-2584).
- Progresiones por diferencia (2585-2651).
- Progresiones geométricas (2652-2712).
- Suma de las potencias semejantes y enteras de varias cantidades en progresión aritmética. Pilas de balas (2713-2725).

- Fracciones continuas. Reducir las fracciones ordinarias a fracciones continuas; formar las reducidas y reducir las fracciones continuas a ordinarias (2726-2744).
- Reducir los radicales a fracciones continuas y formar las reducidas (2745-2772).
- Logaritmos (2773-2946).
- Intereses y anualidades (2947-3000).

2.2. Contenidos del Tomo II (Segunda parte: soluciones de los problemas y resultados de los ejercicios)

En el tomo II se ofrecen las soluciones o resoluciones de los problemas y ejercicios propuestos en el tomo I. La secuencia de capítulos es idéntica y cada uno de ellos se abre con una breve introducción teórica en la que se repasan los aspectos clave necesarios para resolver las cuestiones.

3. Los Ejercicios y problemas de Aritmética

Los *Ejercicios y problemas de Aritmética: parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia* se editaron por primera vez en Madrid, el año de 1880. Fueron dedicados a Don Joaquín Garralda y Oñate, coronel capitán de fragata “*en testimonio de gratitud y sincera amistad, de su antiguo amigo y compañero*”.

La obra se estructura en dos tomos. En el primero, a lo largo de doscientas veinticuatro páginas, se presentan los enunciados de dos mil trescientos noventa y seis problemas (agrupando bajo este término tanto ejercicios como problemas, según la distinción actual). En el segundo, a lo largo de doscientas ochenta y cinco páginas, se proponen las soluciones de dichos problemas.

Llama la atención el gran número de problemas propuestos que, como veremos inmediatamente, abarcan esencialmente los contenidos típicos de un tratado de Aritmética de la época.

3.1. Contenidos del Tomo I (Primera parte: enunciados)

Los ejercicios y problemas planteados por el autor se organizan en torno a siete grandes bloques de contenido (entre paréntesis los números de orden de los enunciados correspondientes a cada tópico):

1. Números enteros:
Adición (1-70). Sustracción (71-141). Multiplicación (142-219). División (220-293). Ejercicios diversos sobre las cuatro reglas de los números enteros (294-385). Máximo común divisor (386-426). Mínimo común múltiplo (427-463). Factores simples y compuestos (464-481).
2. Fracciones:
Reducción de fracciones a su más simple expresión (482-514). Adición (515-579). Sustracción (580-634). Multiplicación (635-699). División (700-768). Ejercicios diversos sobre las fracciones (769-909).
3. Decimales:
Transformación de los decimales en fracciones ordinarias (910-921). Expresar las fracciones en decimales (922-933). Adición (934-957). Sustracción (958-983). Multiplicación (984-1014). División (1015-1051). Transformación de las fracciones en decimales (1052-1081). Generatrices de las fracciones decimales, periódicas puras y periódicas mixtas (1082-1101). Ejercicios diversos sobre las operaciones decimales (1102-1265).
4. Extracción de raíces:



- Raíz Cuadrada (1266-1405). Raíz cúbica (1406-1537). Raíces de diferentes grados, cuya determinación depende de las raíces cuadradas y cúbicas (1538-1567).
5. Números complejos:
Reducción de números complejos a incomplejos y vice-versa (1568-1604). Adición (1605-1627). Sustracción (1628-1654). Multiplicación (1655-1696). División (1697-1731). Ejercicios diversos (1732-1762).
 6. Sistema métrico:
Medidas longitudinales (1763-1807). Medidas superficiales y agrarias (1808-1874). Medidas de sólidos (1875-1913). Medidas de capacidad (1914-1970). Medidas de peso (1971-2037). Problemas diversos sobre el sistema métrico (2038-2137). Proporciones: Regla de tres simple y compuesta (2138-2274). Interés simple y compuesto (2275-2377). Regla de descuento (2378-2443). Repartimientos proporcionales: Regla de compañía (2444-2516). Regla de aligación (2517-2567). Regla conjunta (2568-2593). Tanto por % en general: Rentas sobre el papel del Estado o fondos públicos y Corretajes (2594-2631). Ganancias, Pérdidas, Taras, Comisiones e Impuestos (2632-2669). Seguros (2670-2683).
 7. Progresiones:
Progresiones por diferencia (2684-2723). Progresiones por cociente (2724-2757). Logaritmos (2758-2901). Apéndice: Diferentes sistemas de numeración (2902-2936).

3.2. Contenidos del Tomo II (Segunda parte: soluciones razonadas)

La estructura de la segunda parte es análoga a la de la primera y contiene las resoluciones de los problemas propuestos en el tomo I. El tomo concluye con las tres tablas siguientes:

- Tabla I, que sirve para hallar el número de días comprendidos entre dos épocas cualesquiera del año.
- Tabla II, que da al final de un número de años el valor de 1 peseta colocada a interés compuesto.
- Tabla III, que indica la cantidad que hay que desembolsar para recibir 1 peseta después de un número determinado de años.

4. Los Ejercicios de Geometría

Los *Ejercicios de Geometría: parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia* se editaron por primera vez en Madrid, el año de 1881. Fueron dedicados a Don Fernando Pérez y Caballero, director del Colegio de San Cayetano.

La obra se estructura en dos partes. La primera parte, que consta de 126 páginas, está dedicada a la Geometría plana e incluye un total de 333 problemas. La segunda, dedicada a la Geometría del espacio, consta de 208 problemas desarrollados a lo largo de 114 páginas. Las soluciones a cada uno de los problemas planteados se presentan, con todo detalle, inmediatamente a continuación de los enunciados.

4.1. Contenidos

La obra comienza con una interesante introducción en la que se describen someramente algunos “*principios que pueden seguirse que, sin ser generales, ofrecen pocas excepciones en la resolución de un gran número de problemas*”. Estos métodos son:

- Construir la figura suponiendo el problema resuelto, para después analizarla.

- El trazado de líneas auxiliares.
- La transformación de un problema dado en otro conocido que se sabe resolver.
- El método de los lugares geométricos.
- El método de las figuras semejantes.

La introducción concluye con una discusión sobre las relaciones existentes entre la Geometría y el Álgebra, dónde Terry toma postura indicando que “*habrá siempre ventaja en hallar por medio del álgebra la resolución de todos aquellos problemas que sean susceptibles de ponerse en ecuación*”.

A continuación se presenta una tabla en la que aparecen fórmulas para las longitudes de los lados de algunos polígonos regulares, para las áreas de las figuras planas más usuales así como para algunos volúmenes de cuerpos notables. Finalmente aparecen las aproximaciones con siete decimales de ciertos números irracionales (algunos comunes, como $\sqrt{2}$ ó π , y otros cuya presencia resulta algo más extraña, como $\log \sqrt{\pi}$).

Como ya se ha comentado, los ejercicios planteados por el autor se organizan en 2 partes, cada una de las cuales se divide en 3 capítulos:

1. Primera parte (Geometría plana):

a) Capítulo Primero:

Construcciones diversas de ángulos, líneas y puntos (1-13). Ángulos interiores y número de diagonales de un polígono (14-17). Construcciones diversas relacionadas con circunferencias (18-37). Construcción de triángulos isósceles (38-44). Construcción de triángulos rectángulos (45-55). Construcción de triángulos en general (56-83). Construcción de rectángulos (84-89). Construcción de rombos (90-96). Construcción de paralelogramos (97-102). Construcción de trapecios (103-109).

b) Capítulo Segundo:

Proporcionalidad de segmentos (110-125). Arco capaz (126-128). Teorema de Pitágoras y aplicaciones (129-142). Construcciones de triángulos (149-154). Construcción de ecuaciones (155-164). Secantes y tangentes a circunferencias, potencia de un punto (165-179). Tangencias entre circunferencias (180-186). Polígonos regulares inscritos (187-193). Longitud de la circunferencia (194-205). Inscibir una circunferencia en un rombo (206). Aproximación de π . Inscibir un polígono en una circunferencia (208).

c) Capítulo Tercero:

Área del triángulo (209-227). Área del rectángulo (228-237). Área del rombo (238-239). Área del trapecio (240-246). Área de un cuadrilátero inscrito (247). Área de polígonos regulares (248-261). Áreas de figuras curvilíneas (262-284). Área de un polígono irregular (285). Construcción de figuras equivalentes a otras dadas (286-312). Razón entre áreas de figuras dadas (313-314). División de un segmento en partes proporcionales a dos cantidades dadas (315). División de figuras en partes equivalentes o proporcionales a cantidades dadas (316-333).

2. Segunda parte (Geometría del espacio):

a) Capítulo Primero:

Área de la pirámide (334-337). Área del cono (338-343). Área del cilindro (344-346). Área de la esfera y de superficies sobre la esfera (347-361). Corte de pirámides y conos por planos paralelos a su base (362-369).

b) Capítulo Segundo:

Volumen del paralelepípedo (370-382). Volumen del prisma (383-393). Volumen del tetraedro (394-396). Volumen de la pirámide (397-411). Volumen del cono (412-428). Volumen del cilindro (429-444). Volumen de de la esfera (445-460). Equivalencia de



volúmenes y volumen de figuras semejantes (461-476). Poliedros inscritos en esferas (477-479). Corte de pirámides y conos por planos paralelos a su base (480-487).

c) Capítulo Tercero:

Áreas y volúmenes de figuras de revolución (488-513). Problemas de máximos y mínimos (514-541). En este capítulo se incluye como previa a los problemas de máximos y mínimos una breve revisión teórica del tema.

El libro se concluye con una serie de diez láminas que contienen 289 figuras que se refieren a algunos de los ejercicios propuestos en el texto.

5. Los Ejercicios de Trigonometría

Los *Ejercicios de Trigonometría: parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia* se editaron por primera vez en Madrid, el año de 1881. Fueron dedicados a Don Santiago Durán y Lira, por entonces contra-almirante de la armada, comandante general de Filipinas y que murió ese mismo año de 1881.

La obra se estructura en dos partes de pesos muy distintos. La primera parte, que consta de 218 páginas, está dedicada a la Trigonometría plana e incluye un total de 677 problemas. La segunda, dedicada a la Trigonometría esférica, consta de 83 problemas desarrollados a lo largo de 38 páginas. Las soluciones a cada uno de los problemas planteados se presentan, al igual que en los *Ejercicios de Geometría*, inmediatamente a continuación de los enunciados.

5.1. Contenidos

La obra se inicia con una introducción en la que se presentan y estudian en detalle lo que el autor denomina “líneas trigonométricas auxiliares” ya que “la mayor parte de los textos de Trigonometría no traen con toda su extensión las líneas [...] introducidas por el inmortal Mendoza en sus Tablas de Navegación”. Veamos cómo se organizan los problemas propuestos y sus soluciones:

1. Primera parte (Trigonometría plana):

a) Capítulo primero:

Valores numéricos de las líneas trigonométricas de ciertos arcos (1-26). Identidades entre líneas trigonométricas de un mismo arco (27-43). Resolución de ecuaciones trigonométricas (44-87).

b) Capítulo segundo:

Aplicaciones de la suma, resta, multiplicación y división de arcos para determinar los valores numéricos de ciertas líneas trigonométricas (88-137). Identidades entre las líneas trigonométricas de arcos cualesquiera (138-193). Resolución de ecuaciones trigonométricas (194-241).mistas

c) Capítulo tercero:

Identidades entre las líneas trigonométricas de arcos que satisfacen ciertas condiciones (242-267). Eliminación de uno o más arcos entre varias ecuaciones (267-286). Funciones circulares inversas (287-318). Resolución de algunas ecuaciones (319-329). Este capítulo incluye una introducción teórica acerca de las funciones circulares inversas.

d) Capítulo cuarto:

Transformación de expresiones para el cálculo logarítmico y resolución de ecuaciones de segundo grado por medio de tablas trigonométricas (330-365). Uso de las tablas (366-418). El capítulo incluye una introducción teórica que desarrolla, entre otros

- temas, la solución de ecuaciones de 2.º grado por medio de logaritmos, líneas trigonométricas y tablas.
- e) Capítulo quinto:
Resolución de triángulos rectángulos (419-441). Resolución de triángulos oblicuángulos (442-486). Resolución de triángulos rectángulos en los que no todos los datos son lados o ángulos (487-512). Resolución de triángulos oblicuángulos en los que no todos los datos son lados o ángulos (513-545).
 - f) Capítulo sexto:
Problemas diversos y aplicaciones numéricas (546-633).
 - g) Capítulo séptimo:
Aplicaciones de la Trigonometría a diferentes cuestiones que se presentan para el levantamiento de los planos (634-677).
2. Segunda parte (Trigonometría esférica):
- a) Capítulo primero:
Resolución de triángulos esféricos rectángulos (678-702). Resolución de triángulos esféricos oblicuángulos (703-743).
 - b) Capítulo segundo:
Aplicaciones a la Astronomía y la Navegación (744-760).

6. Los Ejercicios de Álgebra

Pese a la diferencia de título, pensamos que este texto no es más que una versión mejorada de los *Problemas y ejercicios de Cálculo algebraico* que ya hemos comentado. De hecho, el volumen consultado (disponible digitalmente en la Biblioteca Nacional de España) se trata de la tercera edición “corregida y aumentada” y sus contenidos se solapan, como veremos, en gran medida con los de los *Problemas y ejercicios de Cálculo algebraico*.

Este libro se estructura igualmente en dos tomos aunque, a diferencia de aquél, sus contenidos están organizados en capítulos diferenciados y numerados. En concreto el primer tomo se desarrolla en dieciocho capítulos que ocupan doscientas trece páginas y contienen los enunciados de tres mil trescientos setenta ejercicios y problemas; mientras que el segundo presenta las soluciones de los mismos a lo largo de doscientas ochenta y siete páginas.

6.1. Contenidos específicos de esta obra

Los dieciséis primeros capítulos de los *Ejercicios de Álgebra* contienen todos los tópicos de los *Problemas y ejercicios de Cálculo algebraico* y las cuestiones que se proponen aquí son muy parecidas, o casi idénticas, a las que se plantearon allá. No obstante, en el texto que nos ocupa aparecen algunos contenidos nuevos. En concreto:

- Consecuencias de la multiplicación y división de las cantidades algebraicas (243-263).
- Reducción de expresiones algebraicas a la forma fraccionaria, y la de estas a cantidades enteras o mixtas (450-461).
- Ejercicios sobre los símbolos $0/m$, $m/0$, $0/0$ (785-795).
- Transformación de la suma o diferencia de dos radicales simples en un solo radical (1291-1308).
- Ecuaciones de primer grado con una sola incógnita que contienen exponentes fraccionarios (1602-1619).
- Ecuaciones exponenciales que se resuelven como las de primer grado (1620-1631).
- Ecuaciones completas (1962-2026).



- Ecuaciones bicuadradas y trinomias (2027-2138).
- Ecuaciones recíprocas (2150-2179).
- De las desigualdades de segundo grado (2397-2402).
- Ecuaciones exponenciales (2888-2929).
- Ecuaciones logarítmicas (2930-2934).

Además de estos contenidos nuevos, algunos de los contenidos “antiguos” sufren alguna leve modificación en su secuenciación. Llama la atención, no obstante, que el número total de problemas en estos dieciséis primeros capítulos sigue siendo de 3000.

Los capítulos XVII y XVIII son completamente nuevos y se consagran a la teoría general de resolución de ecuaciones y a los determinantes, respectivamente. Contienen los tópicos siguientes.

1. Capítulo XVII:
Teoría general de ecuaciones (3001-3023). Transformación de ecuaciones (3024-3059). Límite de las raíces de las ecuaciones (3060-3067). Teorema de Sturm (3068-3077). Resolución de las ecuaciones numéricas de grados superiores (3078-3116). Método de aproximación de Newton (3117-3130).
2. Capítulo XVIII:
De los determinantes en general (3131-3165). Transformación de los determinantes (3166-3190). Propiedades generales de los determinantes (3191-3224). De los determinantes menores (3225-3236). Suma y resta de los determinantes (3237-3249). Propiedades de los determinantes que tienen uno o varios de sus elementos iguales a cero (3250-3282). Multiplicación de los determinantes (3283-3293). Cálculo de los determinantes (3294-3341). Aplicación de los determinantes (3342-3370).

Respecto al tomo II, su estructura es totalmente análoga a la del tomo I, presentando las soluciones a todas las cuestiones propuestas en el mismo. En los dieciséis primeros capítulos se incluyen introducciones teóricas antes de las soluciones, mientras que los dos últimos capítulos carecen de dichas introducciones teóricas por haberse presentado ya éstas en el tomo I.

7. Conclusiones

El conjunto de obras estudiadas, del mismo autor y todas ellas aprobadas como de texto para las oposiciones de ingreso en el cuerpo general de la Armada, nos dan una visión bastante completa de los conocimientos matemáticos que se exigían para acceder al citado cuerpo. Por ello puede ser interesante comparar estos conocimientos con los que posee (teóricamente) un alumno actual al finalizar la Secundaria.

Respecto a la Aritmética, los contenidos son bastante similares a los que posee actualmente un alumno al completar la Enseñanza Secundaria, con algunas puntualizaciones que conviene señalar:

1. No aparecen en la obra los números negativos. Se trabaja la sustracción de números naturales, racionales, decimales o complejos; pero siempre con resultados positivos. En los problemas se habla, por ejemplo, de pérdidas y ganancias.
2. Se presta atención al cálculo de raíces cúbicas “a mano”, hoy totalmente abandonado.
3. Los contenidos relativos a la Proporcionalidad aritmética se tratan dentro del bloque dedicado al sistema métrico.
4. En el bloque dedicado a la Proporcionalidad aparecen contenidos cuyo tratamiento se ha abandonado por haber caído en desuso: regla conjunta, papel del Estado, corretajes, etc.

5. Se da un tratamiento mucho más práctico a los logaritmos, cuya utilidad hoy ha desaparecido.
6. Se trabajan sistemas de numeración distintos al decimal. Este contenido se presenta actualmente a nivel universitario.

En cuanto a los textos de Álgebra la situación es algo más compleja, de hecho las divergencias con los contenidos actuales son algo mayores:

1. Se introducen las fracciones continuas, hoy relegadas al ámbito universitario.
2. Se presta mucha atención a la resolución de ecuaciones polinómicas con una incógnita. Se presenta el método de Sturm y el método de aproximación de Newton.
3. No se da, sin embargo, un tratamiento moderno de la teoría de sistemas de ecuaciones. Tan sólo se presenta el cálculo de determinantes.

Resulta muy interesante observar cómo se produce, al igual que hoy en día, un cierto solapamiento entre la Aritmética y el Álgebra, debido a la existencia de temas “fronterizos” (Socas, 2011). Esto sucede, por ejemplo, en las progresiones aritméticas y geométricas, los logaritmos o la Regla de interés, por ejemplo.

El texto dedicado a la Geometría es el que más diferencias muestra respecto a la enseñanza actual. De hecho ilustra claramente la importancia que se otorgaba a la Geometría en la formación matemática de la época. Encontramos una gran variedad de problemas diferentes y de técnicas de resolución de los mismos: construcciones, geometría métrica (áreas, volúmenes, etc.), álgebra geométrica... Además la Geometría del espacio ocupa un lugar tan importante como la Geometría plana. No obstante, por motivos evidentes, el tratamiento que se le da está más orientado hacia los aspectos métricos que en el caso plano, donde aparece una gran variedad de construcciones.

Si comparamos los contenidos de este texto con los actuales planes de estudios españoles, vemos que éstos son más reducidos, manteniendo especialmente los aspectos métricos, aumentando la aritmetización y algebrización de la Geometría y reduciendo el trabajo con la Geometría del espacio. Prácticamente han desaparecido por completo las construcciones.

Es interesante el tratamiento puramente geométrico que se da a los problemas de máximos y mínimos que se plantean. Actualmente este tipo de problemas están relegados al ámbito del Cálculo diferencial.

Finalmente, en cuanto a la Trigonometría, la mayor parte de los contenidos del libro están plenamente vigentes hoy en día. De hecho, ejercicios como la demostración de identidades trigonométricas o la resolución de triángulos, siguen ocupando un lugar importante en el currículum. Tan sólo encontramos algunas excepciones:

1. Todas las medidas de ángulos se realizan en grados sexagesimales. Hoy en día se introduce el radian anticipando el estudio de las razones trigonométricas desde un punto de vista funcional.
2. Se otorga gran importancia a líneas trigonométricas que hoy están casi totalmente olvidadas (el seno-verso, por ejemplo) y a aspectos tales como el uso de tablas o la resolución de ecuaciones de 2.º grado mediante trigonometría y logaritmos. Hoy en día dichas herramientas, desplazadas por la calculadora y el ordenador, carecen de la importante utilidad práctica de entonces.
3. Tampoco se suele presentar actualmente la Trigonometría esférica (en relación con la escasa atención prestada a la Geometría espacial) en un nivel pre-universitario.



Pensamos que el Capítulo VII constituye un interesante catálogo de aplicaciones prácticas reales de la Trigonometría, aunque lo cierto es que en nuestro tiempo puede resultar complejo justificar su utilidad ante nuestros alumnos.

Observamos pues que la cantidad de contenidos matemáticos presentados era mayor que la actual. Este hecho responde a un cambio en el enfoque de la educación. Actualmente, la formación de nuestros alumnos recoge un mayor número de materias que, necesariamente, son desarrolladas con una menor profundidad. Sin embargo, las diferencias no son tan grandes como cabría esperar inicialmente y se centran especialmente en el campo de la Geometría.

Desde un punto de vista pedagógico resulta notable la distinción que se hace (en los textos de Aritmética y Álgebra) entre ejercicios y problemas, acertado detalle que, incluso hoy en día, no suele ser habitual en los textos dedicados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas elementales.

También resulta sorprendente la abrumadora cantidad de cuestiones propuestas en todos los textos considerados (más de tres mil en el caso del Álgebra), lo que convertía a estos textos en un rico material didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Por otra parte es destacable, como ya hemos puesto de manifiesto, la originalidad en el tratamiento de los temas. Los textos de problemas resueltos y comentados constituyen, de hecho, los primeros ejemplos de textos matemáticos que se conservan (El Papiro de Rhind, por ejemplo, o el Liber Abaci en épocas posteriores). Sin embargo, la visión abstracta de la Matemática que acabó por imponerse hizo que ese tipo de textos perdieran importancia e incluso hoy son escasos los ejemplos. En nuestra opinión, el valor didáctico de los mismos es indudable. Valga este trabajo para reivindicarlos.

Bibliografía

- García Camarero, E. (1982). La matemática en la España del Siglo XIX. *Actas II Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias. Vol. II*, 115-130. SEHCYT: Jaca.
- García Álvarez de la Villa, B. (2014). Antonio Terry y Rivas (1838-1900). Vida y obra científico-matemática de un marino ilustre. *Revista de Historia Naval*, 127, 69-74.
- Martínez y Guanter, A.L.J. (1957). *Enciclopedia General del Mar*. Barcelona: Garriga.
- Maz, A. (2005). *Los Números Negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Socas, M. (2011). “La Enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la Investigación”. *Números* 77, pp. 5-34.
- Stirling, G. (1849). *Repertorio para marineros y matemáticos de problemas de Trigonometría esférica*. Barcelona: Imprenta de T. Gaspar.
- Terry y Rivas, A. (1875a). *El compañero del navegante a la vista de las tierras*. Madrid: Imprenta de T. Fortanet.
- Terry y Rivas, A. (1875b) *El desvío de la aguja náutica*. Madrid: Imprenta de T. Fortanet.
- Terry y Rivas, A. (1875c) *Manual del navegante redactado con presencia de los mejores autores modernos*. Barcelona: Imprenta y Litografía de C. Verdaguer y Cía.
- Terry y Rivas, A. (1879a) *Problemas y ejercicios de Cálculo algebraico: parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia* (Tomo I). Madrid: Imprenta de Pedro Abienzo.
- Terry y Rivas, A. (1879b) *Problemas y ejercicios de Cálculo algebraico: parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia* (Tomo II). Madrid: Imprenta de Pedro Abienzo.

- Terry y Rivas, A. (1879c). *Tablas náuticas para aprender los cuadros de navegación partes recopiladas y partes compuestas*. Madrid: Imprenta de Fortanet.
- Terry y Rivas, A. (1880a) *Ejercicios y problemas de Aritmética: parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia* (Primera Parte: Enunciados. Tomo I). Madrid: Pedro Abienzo, Impresor del Ministerio de Marina.
- Terry y Rivas, A. (1880b). *Ejercicios y problemas de Aritmética: parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia* (Segunda Parte: Soluciones razonadas. Tomo II). Madrid: Pedro Abienzo, Impresor del Ministerio de Marina.
- Terry y Rivas, A. (1881a). *Ejercicios de Geometría parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia*. Madrid: Pedro Abienzo. Impresor del Ministerio de Marina.
- Terry y Rivas, A. (1881b). *Ejercicios de Trigonometría parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia*. Madrid: Pedro Abienzo. Impresor del Ministerio de Marina.
- Terry y Rivas, A. (1884). *Tablas de azimutes para todos los astros cuya declinación no excede de 30° y entre los paralelos 0° y 60° en ambos hemisferios seguidas de las tablas de declinación del Sol y de tablas de declinaciones y ascensiones rectas de las primeras estrellas*. Madrid: Viuda e hijos de Abienzo.
- Terry y Rivas, A. (1885a). *Ejercicios de Álgebra parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia* (Primera Parte). Madrid: Imprenta de la viuda e hijos de Abienzo.
- Terry y Rivas, A. (1885b). *Soluciones de los ejercicios de Álgebra* (Segunda Parte). Madrid: Imprenta de la viuda e hijos de Abienzo.
- Terry y Rivas, A. (1892). *Guía del marino en el puente*. Barcelona: Establecimiento tipográfico de Jaime Jepús.
- Terry y Rivas, A. (1894). *Compensación de la aguja de Thomson. Instrucciones*. Bilbao: establecimiento tipográfico El Nervión.
- Terry y Rivas, A. (1899). *Diccionario de los términos y frases de Marina. Español – Francés – Inglés. Obra útil para las marinas militar y mercante, cónsules, armadores, consignatarios, maquinistas navales, agentes comerciales, sociedades de seguros, etc.* Madrid: Imprenta del Ministerio de Marina.
- Terry y Rivas, A. & Suances, V. (1899). *Apuntes de Meteorología Náutica, oceanografía y derrotas*. Ferrol: Imprenta de El Correo Gallego.
- Velamazán Gimeno, M.A. (1990). L'Enseignement des Mathématiques dans les Ecoles Militaires en Espagne au XIXème siècle. *Cuadernos de Historia de la Ciencia*, 6, 23-37.

Vicente Meavilla Seguí. Licenciado en Ciencias (Sección de Matemáticas) por la Universidad de Zaragoza (1976) y Doctor en Filosofía y Letras (Pedagogía) por la Universidad Autónoma de Barcelona (1998) con una tesis sobre la influencia de las interacciones verbales sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra elemental. Catedrático de Matemáticas en Secundaria, jubilado. Ha publicado diversos artículos y libros sobre la influencia de la historia de las matemáticas sobre la enseñanza y el aprendizaje de dicha disciplina.
Email: vmeavill@hotmail.com

Antonio M. Oller Marcén. Licenciado en ciencias Matemáticas (2004) por la Universidad de Zaragoza y Doctor por la Universidad de Valladolid (2012) con una tesis sobre la enseñanza de la Proporcionalidad aritmética en Secundaria. Ha publicado diversos trabajos sobre Educación Matemática, Álgebra y Teoría de Números. Actualmente es profesor del Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza.
Email: oller@unizar.es

