

Aspectos Históricos del Cálculo de Leibniz: Incidencia y Aplicación en la Didáctica de las Matemáticas

Carlos Rondero Guerrero

Aarón Reyes Rodríguez

Juan Alberto Acosta Hernández

(Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México)

Fecha de recepción: 7 de octubre de 2014

Fecha de aceptación: 19 de diciembre de 2014

Resumen

El propósito de este trabajo consiste en identificar algunos aspectos didácticos que se pueden obtener con base en el análisis de una red conceptual cuyo eje es la relación que existe entre las variaciones locales y la variación global de los elementos de una sucesión finita de números reales, a la cual denominamos Relación Fundamental del Cálculo Leibniziano. Desde una perspectiva histórica-epistemológica, se identifican algunos elementos conceptuales que aparecen al analizar una red de conceptos, que se derivan del principio de identidad, considerado por Leibniz como el origen de las matemáticas. Argumentamos que la Relación Fundamental constituye un referente epistemológico importante, ya que es una idea que permite articular y extender algunas propiedades de los números para comprender las ideas centrales del cálculo diferencial e integral.

Palabras clave

Principio de identidad, Referente epistemológico, Didáctica, Conocimiento matemático para la enseñanza, Cálculo diferencial e integral

Title

Historical aspects of the Leibnizian Calculus: Incidence and Applications in Mathematics Education

Abstract

The aim of this paper is to identify some didactical aspects that can be obtained based on the analysis of a conceptual network around the relationship between local and global variations of elements of a finite sequence of real numbers, which we call the Fundamental Relation of Leibnizian Calculus. From a historical-epistemological perspective, we identify some conceptual elements that are derived from the principle of identity, which was considered by Leibniz as the origin of mathematics. We argue that the Fundamental Relation is an important epistemological referent, since it is an idea that can articulate and extend some properties of numbers to understand the main ideas of differential and integral calculus.

Keywords

Principle of identity, Epistemological referent, Didactic, Mathematical knowledge for teaching, Differential and integral calculus

1. Introducción

El conocimiento matemático para la enseñanza (CME) es una clase particular de conocimiento pedagógico del contenido (Shulman, 1986) que va más allá del contenido disciplinar y está integrado por los saberes que distinguen al profesor de otros profesionales que hacen uso de las matemáticas. Es



el conocimiento acerca de la disciplina que el profesor necesita para enseñar, pero que muchos adultos u otros profesionales no necesitan regularmente; por ejemplo, el conocimiento de por qué funcionan los algoritmos usuales para sumar, restar, multiplicar y dividir números enteros o racionales; la capacidad para analizar cómo los estudiantes entienden la relación entre el perímetro y área (Ball, Thames y Phelps, 2008), o el conocimiento acerca de cómo diversos contenidos matemáticos se articulan y conectan.

El CME incluye formas de representar a las ideas matemáticas de modo que éstas sean comprensibles para otros, así como un entendimiento de aquello que hace que el aprendizaje de un concepto o procedimiento matemático sea fácil o difícil para los estudiantes. Es decir, el CME está integrado por los conocimientos y habilidades útiles para la enseñanza de las matemáticas, entendiendo por enseñanza todo aquello que un profesor hace para favorecer el aprendizaje de los estudiantes durante los procesos de planeación, interacción en el aula y evaluación (Ball, Thames y Phelps, 2008).

En este contexto, argumentamos que el conocimiento de referentes epistemológicos (RE), así como del análisis de la red de ideas en torno a los mismos, constituyen un elemento central del CME que debieran incluir en su formación los profesores de matemáticas. En este trabajo, referente epistemológico se entiende como una idea o concepto matemático que constituye la base para establecer nuevos conocimientos, o bien, ideas o conceptos que pueden extenderse a otros ámbitos, integrando de esta forma una red conceptual de significados. Un referente epistemológico se puede pensar como el centro de un entramado en el cual se sustenta la estructura de conceptos construida en torno a ese elemento central. O bien, en otro sentido, el referente epistemológico es de origen un saber sabio a través del cual se va entretejiendo una red de saberes enseñables.

Un ejemplo claro de referente epistemológico es el Teorema de Pitágoras, dado que este teorema es la base para el desarrollo de la geometría, la trigonometría y la geometría analítica. En esta última área de las matemáticas las ideas centrales se construyen a partir del concepto de distancia entre dos puntos, el cual a su vez se basa en este teorema. Decimos entonces que el teorema de Pitágoras es un referente epistemológico para la geometría analítica, o que la geometría analítica tiene como referente epistemológico al Teorema de Pitágoras. Otro ejemplo de referente epistemológico lo constituye la relación entre lados de un triángulo y muchas ideas análogas a la desigualdad del triángulo para números reales (Figura 1). Los ámbitos de desarrollo de la desigualdad del triángulo son muy amplios, en la figura 1 se muestran además, la desigualdad entre las normas de vectores y la que corresponde a desigualdad de integrales definidas de funciones continuas.

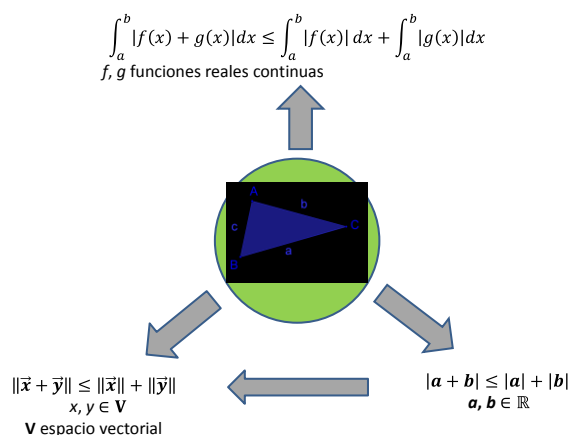


Figura 1. Red de conceptos en torno a una relación entre los lados de un triángulo.

El objetivo de este artículo consiste en mostrar que la Relación Fundamental del Cálculo Leibniziano (abreviada en adelante como RFCL) es un referente epistemológico para el cálculo diferencial e integral, mediante una reflexión de las implicaciones didácticas de este resultado apoyada en una perspectiva histórica-epistemológica.

Adoptar una perspectiva histórica para llevar a cabo una reflexión didáctica resulta relevante, ya que la historia de las matemáticas juega un papel de gran importancia dentro de la educación matemática (Fauvel, 1991; Laubenbacher y Pengelley, 1996; Rickey, 1997), porque entre otros aspectos, puede apoyar a una mejor comprensión de los conceptos o ideas, además de situar a los nuevos conocimiento en el contexto amplio de la disciplina (Rickey, 1996) y en el de la cultura humana. Por otra parte, la historia de las matemáticas puede enseñarnos cómo enseñar (Avital, 1997) y por esta razón los profesores deberían ser capaces de analizar el desarrollo histórico de las matemáticas, en busca de ideas de alto valor pedagógico.

En este contexto, consideramos que la RFCL es una idea de gran valor pedagógico, como trataremos de mostrar en este trabajo. Baron (2003) y Serfati (2014) refieren que Leibniz derivó la RFCL a partir de la idea de que “cada cosa que posee magnitud es igual a sí misma”, es decir, $A=A$, la cual es denominada la propiedad de identidad, que para Leibniz es “el origen de los orígenes”. Este principio de identidad, desde el punto de vista lógico podría parecer irrelevante o trivial, sin embargo, la genialidad de Leibniz radica en que a partir de este hecho pudo extraer consecuencias matemáticas no triviales, de la siguiente forma:

$$A=A$$

$$A-A=0$$

$$A-A+B-B+C-C+D-D+E-E=0$$

$$A+(B-A)+(C-B)+(D-C)+(E-D)-E=0$$

$$(B-A)+(C-B)+(D-C)+(E-D)=E-A$$

Con base en este desarrollo algebraico, Leibniz hace ver que dada una sucesión finita de magnitudes, la suma de las primeras diferencias de términos consecutivos de la sucesión original es igual a la diferencia entre el último y el primer término de la sucesión. No cabe duda de que una vez extraída e identificada la relación fundamental, ésta se convierte en el eje central de la construcción que Leibniz hace del cálculo, viéndose reflejada en muchos de sus desarrollos matemáticos, es decir que el cálculo de Leibniz tiene su origen en la teoría de las sucesiones numéricas. Entonces, los conceptos fundamentales del cálculo infinitesimal desarrollado por Leibniz pueden entenderse como una extrapolación al ámbito de lo infinito de los conceptos y resultados obtenidos a partir del análisis de las sucesiones finitas (Bos, 1974; Mancosu, 1996; Bos, 1980; Serfati, 2010, 2014).

En otros términos, la RFCL expresa que dada una sucesión finita de números reales $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, la suma de todas las diferencias $d_k = a_k - a_{k-1}$, es igual a la diferencia entre los términos extremos de la sucesión original, es decir:

$$\sum_{k=1}^n d_k = a_n - a_0.$$



De acuerdo con Bos (1980), esta es una de las dos ideas fundamentales en las que se basa el cálculo de Leibniz, junto con el estudio geométrico de las curvas. Como el mismo Leibniz señala, la consideración de diferencias y sumas en sucesiones numéricas le permitió darse cuenta que las diferencias corresponden a las tangentes y las sumas a las cuadraturas.

Mihi consideratio Differentiarum et Summarum in seriebus Numerorum
primam lucem affuderat, cum animadverterem differentias tangentibus, et
summas quadraturis respondere. (Leibniz, 1697; citado en Bos, 1974, p. 13).

2. La RFCL y la noción de variación

Dada una sucesión finita de números, se pueden calcular, a la manera como lo hizo Leibniz, las primeras diferencias de la sucesión de números, es decir, la diferencia de un término con el que le precede. Se obtiene entonces otra sucesión, en la cual cada uno de sus términos representa una variación local de la sucesión original.

Sea $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, la sucesión finita de números, entonces la sucesión de primeras diferencias de términos consecutivos está dada por $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$, donde:

$$d_1 = a_1 - a_0,$$

$$d_2 = a_2 - a_1,$$

$$d_3 = a_3 - a_2,$$

$$\vdots$$

$$d_n = a_n - a_{n-1}.$$

Se puede observar que la suma de la sucesión de diferencias, está dada como la diferencia entre el valor final y el valor inicial de la sucesión original, es decir:

$$\sum_{k=0}^n d_k = a_n - a_0.$$

En esta última igualdad aparecen dos tipos de variaciones, (i) la local, que compara dos estados contiguos, representada por $d_k = a_k - a_{k-1}$, y (ii) la global, dada por $a_n - a_0$. En otras palabras, la acumulación de las variaciones parciales es igual a la variación total. Este resultado que matemáticamente es muy simple, conceptualmente tiene un gran valor en términos didácticos ya que permite, a partir del análisis local, obtener información acerca del comportamiento global de la sucesión numérica. Es importante hacer notar que de origen este resultado está en el ámbito de lo discreto, aunque posteriormente se puede extender al ámbito de lo continuo al considerar a los números $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ como puntos en una recta, de forma que las diferencias $d_k = a_k - a_{k-1}$ representan las longitudes de los segmentos determinados por los puntos a_k y a_{k+1} . Entonces la RFCL expresa que la suma de los segmentos de longitud d_k es igual a la longitud total del segmento $a_0 a_n$ (Figura 2).



Figura 2. Interpretación en el ámbito de lo continuo de un resultado discreto.

La enseñanza tradicional del cálculo se basa esencialmente en la algebrización de las ideas de variación y cambio, esto significa que existe una conexión indirecta entre la aritmética y el cálculo a través del álgebra (figura 3a), sin embargo, argumentamos que el establecimiento de una relación directa entre las ideas aritméticas y del cálculo resulta relevante en términos didácticos (figura 3b), porque las propiedades de los números y las operaciones aritméticas pueden extenderse de tal manera que permitan la comprensión de las ideas fundamentales del cálculo como lo hizo Leibniz. En otras palabras el sustento aritmético de la sumas de diferencias, resulta relevante en términos didácticos para entender mejor cómo está sustentado el cálculo diferencial, particularmente para entender la relación que existe entre los operadores de derivación e integración, de forma análoga a como la versión infinitesimal de la relación entre las sumas de diferencias de una sucesión ayudó a que Leibniz identificara las características esenciales del cálculo.

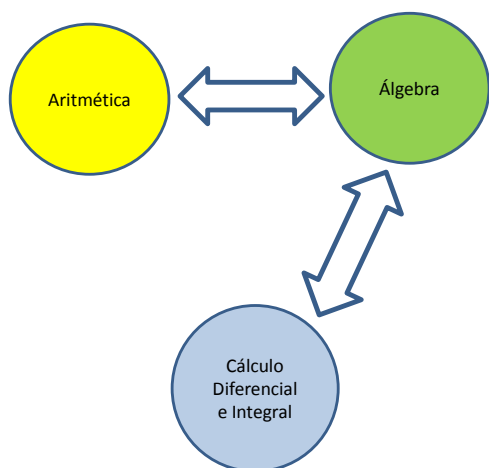


Figura 3a. Relaciones en la aproximación didáctica clásica al cálculo.

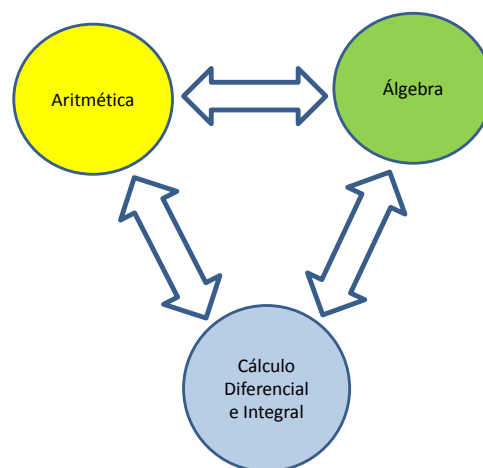


Figura 3b. Propiedades de los números como apoyo didáctico en el entendimiento de las ideas del cálculo.

Una variante de la RFCL, se puede expresar como:

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^n d_k.$$

Aparentemente la relación anterior es una simpleza de despeje algebraico, sin embargo, este cambio es relevante en términos epistemológicos y didácticos, ya que expresada de esta manera la RFCL resalta una forma de predicción, dado que el último valor de la sucesión se puede obtener a partir del valor inicial y la suma o acumulación de las diferencias o variaciones locales.

3. Red de conceptos e ideas en torno a la RFCL

Otro ámbito en que aparece la RFCL es el triángulo aritmético (también conocido como triángulo de Tartaglia o de Pascal) cuando al sumar n términos de una diagonal, los cuales son diferencias de términos consecutivos de la siguiente diagonal (vistas de izquierda a derecha), se obtiene el término n -ésimo de la segunda de esas diagonales. Por ejemplo, el resultado de la suma $1+3+6+10+15 = 35$ (Figura 4).

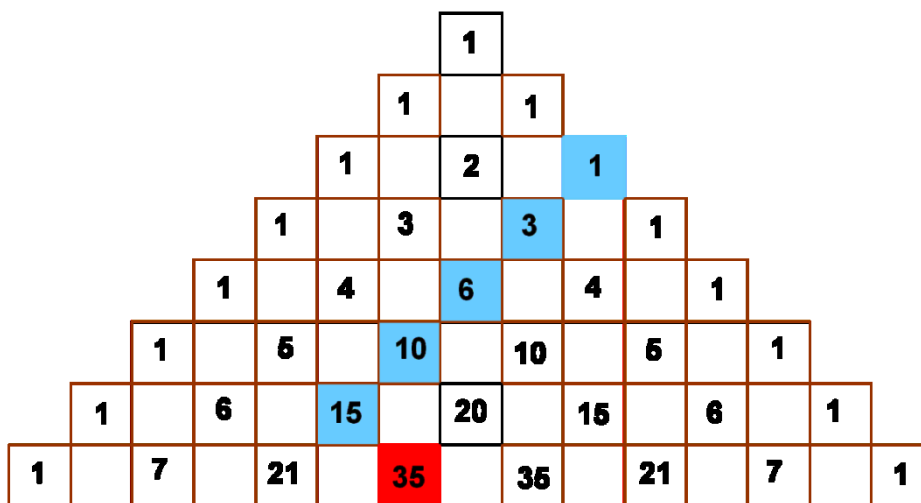


Figura 4. Triángulo aritmético.

En la construcción del triángulo aritmético aparece de manera reiterada la relación fundamental (RFCL). En este triángulo aparecen los números triangulares, 1, 3, 6, 10, etcétera. Se puede observar, por ejemplo, que el cuarto número triangular (10) es el resultado de sumar los cuatro primeros números de la diagonal anterior, es decir, los primeros cuatro números naturales: $1+2+3+4=10$. También aparecen los números tetraédricos en la cuarta diagonal del triángulo aritmético, los cuales son sumas de números triangulares (Figura 5). Por otra parte, los números tetraédricos están relacionados con sumas de los cuadrados de los números pares y los números impares (Althoen y Lacampagne, 1991).

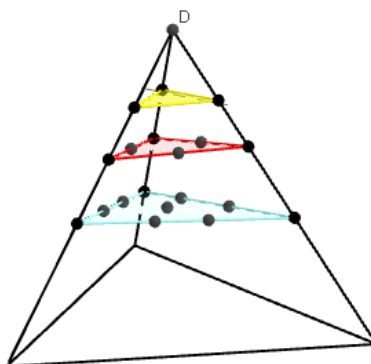


Figura 5. Primeros cuatro números tetraédricos.

Una de tantas aplicaciones de la RFCL es un método para calcular sumas de potencias de los primeros n números naturales (Spivak, 2010). Para calcular la suma de los cuadrados de los primeros n números naturales se parte de la expresión:

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

Particularizando la suma para $k = 1, 2, 3, \dots, n$ y sumando verticalmente se obtiene:

$$\begin{array}{r} 2^3 - 1^3 = 3(1)^2 + 3(1) + 1 \\ 3^3 - 2^3 = 3(2)^2 + 3(2) + 1 \\ 4^3 - 3^3 = 3(3)^2 + 3(3) + 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ (n+1)^3 - n^3 = 3(n)^2 + 3(n) + 1 \\ \hline (n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + \dots + n) + n \end{array}$$

Con base en la igualdad anterior se obtiene que la suma de los cuadrados de los primeros n números naturales se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \frac{(n+1)^3 - 1 - n - 3(1 + 2 + 3 + \dots + n)}{3} \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - n - 3 \frac{n(n+1)}{2}}{3} \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n - \left(\frac{3n^2 + 3n}{2}\right)}{3} \\ &= \frac{2n^3 + 6n^2 + 4n - 3n^2 - 3n}{6} \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Un procedimiento análogo se puede aplicar para obtener la suma de potencia m -ésimas de los primeros n números naturales, a partir de la expresión $(k+1)^{m+1} - k^{m+1}$, conociendo la expresión para la suma de las potencias anteriores. Por ejemplo, la suma de los cubos de los primeros n números naturales se puede obtener como:



$$\begin{aligned}
 2^4 - 1^4 &= 4(1)^3 + 6(1)^2 + 4(1) + 1 \\
 3^4 - 2^4 &= 4(2)^3 + 6(2)^2 + 4(2) + 1 \\
 4^4 - 3^4 &= 4(3)^3 + 6(3)^2 + 4(3) + 1 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 (n+1)^4 - n^4 &= 4(n)^3 + 6(n)^2 + 4(n) + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (n+1)^4 - 1^4 &= 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 4(1 + 2 + \dots + n) + n \\
 &= 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + 6\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + 4\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n
 \end{aligned}$$

Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}
 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= \frac{(n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n}{4} \\
 &= \frac{(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) - 1 - (2n^3 + 3n^2 + n) - (2n^2 + 2n) - n}{4} \\
 &= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} \\
 &= \frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4} \\
 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2
 \end{aligned}$$

Otra aplicación de la RFCL, consiste en obtener sumas de números de una sucesión que pueden escribirse como las diferencias de los términos de una sucesión bien conocida, por ejemplo, dada la sucesión de los cuadrados de enteros consecutivos a_n : 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2 , la sucesión de diferencias es, d_n : 1, 3, 5, 7, 9, 11, ..., $n^2 - (n-1)^2$

Considerando la RFCL:

$$\sum_{k=1}^n d_k = a_n - a_0,$$

se tiene que:

$$\sum_{k=1}^n d_k = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 2n - 1 = n^2$$

Con base en los resultados que se pueden derivar de la RFCL, se puede decir que ésta es un referente epistemológico, en el sentido de que constituye la base para establecer un nuevo conocimiento o bien para extender a otros ámbitos ese conocimiento previo. Particularmente la RFCL, es un referente epistemológico para calcular sumas de potencias de números naturales, lo que posteriormente se convierte en un método de cálculo. Un análisis detallado de este método da lugar a establecer relaciones entre diversas ideas matemáticas, entre las que se encuentran las sumas telescópicas, la consideración de casos particulares, identificación de patrones, y la recursividad, entre otras.

Es importante resaltar que Leibniz utilizó la RFCL para resolver un problema propuesto por Huygens en 1672 (Bos, 1980), el cual consiste en encontrar la suma infinita de los recíprocos de los números triangulares: $1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 + \dots$.

Leibniz resolvió el problema notando que el recíproco de cualquier número triangular $\frac{2}{t(t+1)}$, se puede escribir como la diferencia $\frac{2}{t} - \frac{2}{t+1}$. Entonces, aplicando la RFCL se obtiene el siguiente resultado:

$$\sum_{t=1}^n \frac{2}{t(t+1)} = 2 - \frac{2}{n+1}.$$

A continuación Leibniz extrapola las propiedades de las sucesiones finitas a lo infinito, el establecer que cuando el valor de n se incrementa, el término $2/n+1$ se vuelve infinitamente pequeño o nulo, por lo que la serie de los recíprocos de los números triangulares es igual a 2. De acuerdo con Mancosu (1996), el considerar las ideas anteriores en un contexto geométrico, permitió a Leibniz explicarse cómo es que los problemas de cálculo de tangentes y de áreas son problemas inversos.

La resolución del problema propuesto por Huygens motivó a Leibniz para estudiar un esquema amplio de sucesiones de sumas y diferencias, que organizó en el llamado triángulo armónico (Figura 6). En este triángulo las diagonales son sucesiones decrecientes de diferencias sucesivas que convergen a cero (Bos, 1980; Serfati, 2014).

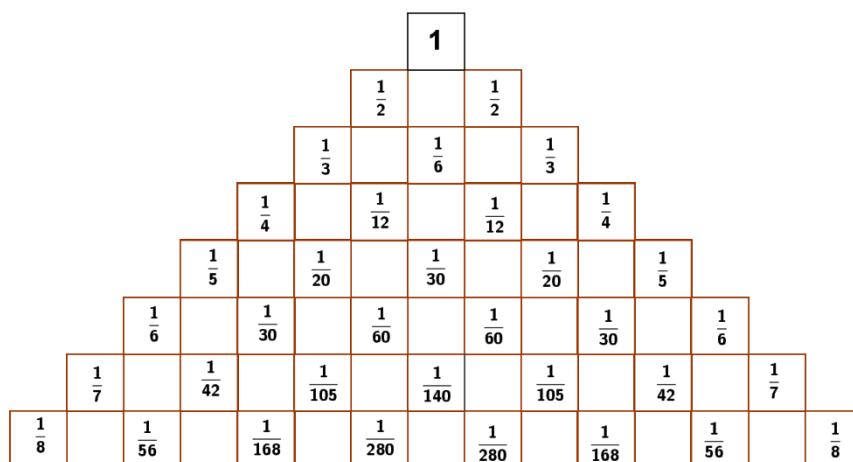


Figura 6. Triángulo armónico.



Sólo que en este caso Leibniz obtiene un resultado para las series infinitas de manera que, para la sucesión infinita dada, $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$, ahora se puede formar una sucesión de diferencias, las que se estructuran con cada término menos el que le sigue, esto es:

$$d_1=b_0-b_1, d_2=b_1-b_2, d_3=b_2-b_3, \dots, d_n=b_{n-1}-b_n, \dots,$$

de manera que la suma de diferencias queda expresada como:

$$\sum_{i=1}^n d_i = b_0 - b_n,$$

es decir, la n -ésima suma parcial queda expresada como la diferencia entre el término inicial y el término n -ésimo de la sucesión original, lo cual representa una variante de la RFCL. Si adicionalmente se cumple la condición de que la sucesión es convergente a cero, esto es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

entonces la serie infinita de las diferencias converge a b_0 .

Es de hacerse notar que el desarrollo del triángulo armónico se puede extender tanto como se quiera, de tal manera que los términos de cualquier diagonal forman una sucesión infinita. La presencia de una sucesión infinita conlleva a preguntarse sobre la convergencia o divergencia de la misma. Por otra parte, si se observan cada uno de los renglones o de las diagonales, se puede ver que para cada uno de ellos se cumple la condición:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Partiendo del resultado general que hemos obtenido con anterioridad, $\sum_{i=1}^{\infty} d_i = b_0$, pero ubicándolo dentro del triángulo armónico, se cumple entonces que la suma infinita de los términos de cada diagonal, es igual al primer elemento de la diagonal precedente. De donde se desprenden algunos resultados como los siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots &= 1 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \dots &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \frac{1}{140} + \dots &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (b_0 - b_n) = b_0 - \lim_{k \rightarrow \infty} b_n,$$

donde los términos de la sucesión infinita b_n corresponden a los de la diagonal anterior en el triángulo armónico, siendo b_0 , el primer término y b_n el n -ésimo término.

Es posible identificar varias relaciones entre los triángulos aritmético y armónico. Los denominadores de cada elemento de la n -ésima diagonales del triángulo armónico se obtienen al multiplicar por n , los respectivos elementos de la $n+1$ -ésima diagonal del triángulo aritmético.

Ambos triángulos tienen ámbitos epistemológicos que son muy enriquecedores para la didáctica. El análisis de los patrones que aparecen en el triángulo armónico, constituyen un antecedente útil previo al estudio formal de la convergencia o divergencia de las series infinitas. Una vez más es de resaltar que las propiedades de los números naturales y sus recíprocos son importantes para entender algunas de ideas centrales del cálculo. Es por ello que es importante rescatar el vínculo entre lo aritmético y las ideas del cálculo, lo que es sumamente enriquecedor para la didáctica ya que permite evitar las dificultades de entendimiento que se han reportado acerca de las ideas algebraicas para del cálculo.

Gran parte de lo aquí mencionado respecto a la RFCL, está enmarcado dentro de lo discreto, sin embargo vale aclarar que este referente epistemológico es el sustento que le permite a Leibniz hacer el tránsito a lo continuo. Es decir, pasar de la RFCL, $\sum_{k=0}^n d_k = a_n - a_0$, a la relación $\int dy = y$, que está expresada en el ámbito de lo continuo.

4. Reflexiones finales

El análisis de una de las ideas centrales del Cálculo de Leibniz han permitido identificar a la RFCL como un referente epistemológico trascendente para el Cálculo, ya que es un saber que propicia la articulación y la ampliación de algunas propiedades de la suma de diferencias numéricas que pueden extenderse al ámbito de lo continuo como un medio para entender diversas ideas fundamentales en esta área de las matemáticas. Es un hecho que estas ideas están plasmadas en los desarrollos matemáticos que aparecen en los libros de historia de las matemáticas, sin embargo, la riqueza conceptual del análisis emerge cuando se lleva a cabo una reflexión didáctica con el propósito de identificar el valor pedagógico de tales ideas y su posible impacto en los procesos de aprendizaje.

En una sociedad de la información como la actual, el adquirir conocimiento factual, es decir la memorización de hechos o resultados matemáticos, así como el desarrollo de habilidades algorítmicas ya no son actividades tan relevante como en el pasado, dada la cantidad de información que se puede obtener a través de medios como internet o el creciente desarrollo de herramientas (apps) que permiten realizar operaciones aritméticas o resolver ecuaciones mediante un teléfono celular (La aplicación Photomath, 2014). En este contexto, algunas de las competencias que más se valoran actualmente en el mundo del trabajo son la creatividad y la capacidad de innovación.

El currículo más que la memorización de hechos y la mecanización de procedimientos, debería ofrecer oportunidades a los estudiantes para desarrollar una actitud inquisitiva, es decir una disposición para formular preguntas sistemáticamente y para resolverlas. En otros términos, el currículo de matemáticas en una era de la información, debiera fomentar ambientes que permitan a los estudiantes desarrollar capacidades para movilizar un pensamiento crítico y analítico durante la resolución de problemas, en otras palabras promover la construcción de habilidades para innovar (Berger, 2014).

El análisis y estructuración de las redes de ideas y conceptos alrededor de un referente epistemológico, puede permitir a los profesores el diseñar rutas potenciales de instrucción (Simon y Tzur, 1994) y determinar diversos niveles o ciclos de entendimiento (Hiebert et al., 1997), que



permitan a los estudiantes abordar los contenidos con diferentes niveles de profundidad. Además, conocer la estructura que subyace alrededor de diversos referentes epistemológicos puede constituirse en una herramienta clave para reestructurar el currículo escolar, lo que propiciaría un cambio de paradigma (Díaz-Barriga y Lugo, 2003) desde un currículo en los que los contenidos se encuentran agrupados de forma lineal a un currículo con estructura de red, alrededor de uno o varios elementos centrales, donde se identifiquen diversos ciclos de entendimiento o niveles de profundidad en cada uno de los niveles escolares. Argumentamos que, en términos cognitivos, conocer estos esquemas de articulación, de esta segunda perspectiva, tiene una gran incidencia ya que permite construir formas estructuradas de pensamiento, en lugar de promover la adquisición de un conjunto de ideas sueltas, de un conjunto de conocimientos factuales desarticulados.

Consideramos que un currículum organizado con base en referentes epistemológicos puede apoyar para que los estudiantes vean en las matemáticas una disciplina en constante crecimiento y cambio, producto del esfuerzo y perseverancia humanos, cuyos resultados emergen de un trabajo que parte de la exploración de relaciones, continúa con la formulación de conjeturas, así como con la justificación y comunicación de resultados, para pasar a la generalización o planteamiento de nuevos problemas, actividad que abre nuevas rutas de indagación.

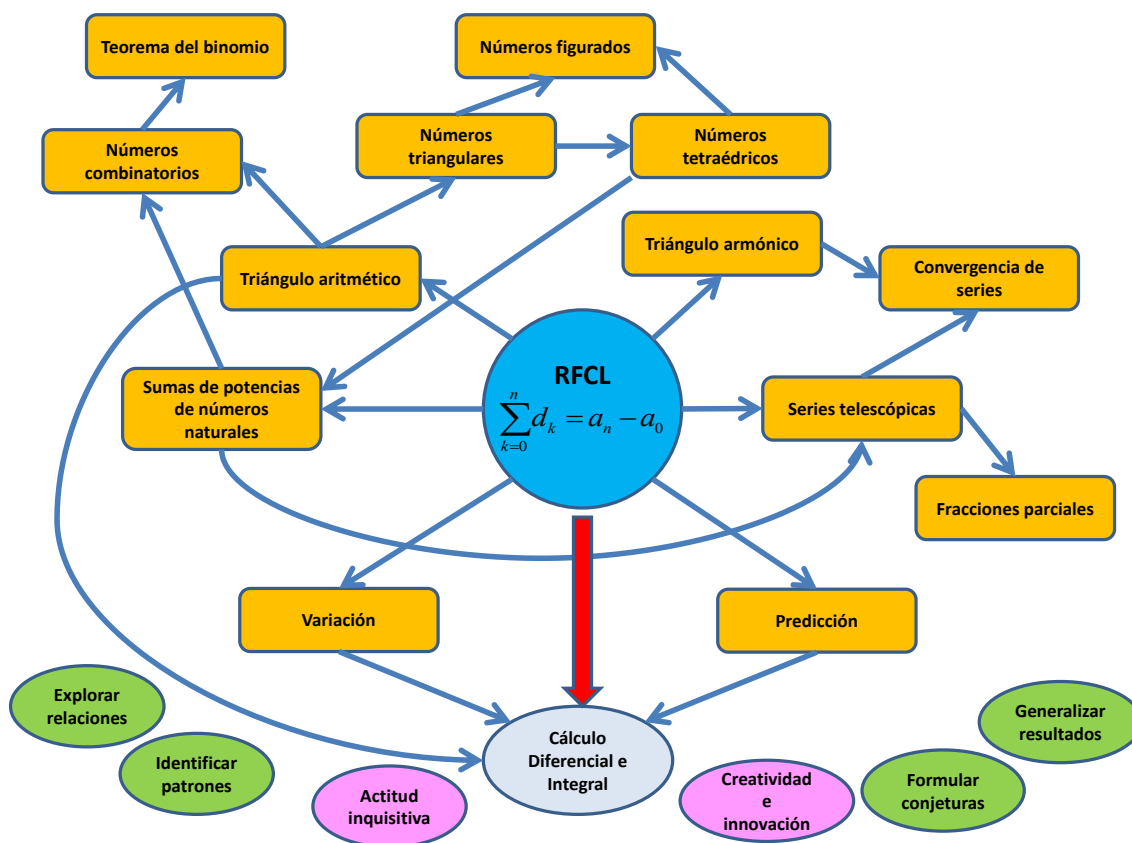


Figura 7. Red de conceptos en torno a la RFCL.

En referencia a la formación de profesores, el acercamiento a una reflexión en torno a los referentes epistemológicos puede promover en los profesores el desarrollo de una actitud inquisitiva, es decir la habilidad para hacerse preguntas, tanto matemáticas como didácticas, y buscar información pertinente para resolverlas.

En futuros estudios es importante indagar en qué medida cursos de matemáticas o programas de formación para profesores organizados con base en algún referente epistemológicos, inciden realmente en las características del conocimiento que estudiantes y profesores construyen. Es decir, si la organización en torno a referentes epistemológicos puede apoyar la construcción de un aprendizaje con entendimiento y al desarrollo de la creatividad matemática.

Bibliografía

- Althoen, S. C., and Lacampagne, C. B. (1991). Tetrahedral numbers and sums of square numbers. *Mathematics Magazine*, 64(2), 104-108.
- Avital, S. (1997). History of mathematics can help improve instruction and learning. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, and V. Katz (Eds.), *Learn from the masters* (pp. 3-12). Washington: The Mathematical Association of America.
- Ball, D. L., Thames, M. H., and Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.
- Baron, M. A. (2003). *The origins of the infinitesimal calculus*. New York: Dover.
- Berger, W. (2014). *A more beautiful question: The power of inquiry to spark breakthrough ideas*. New York: Bloomsbury.
- Bos, H. J. M. (1974). Differentials, higher order differentials and the derivative in the Leibnizian Calculus. *Archive for History of Exact Sciences* 14 (1), 1-90.
- Bos, H. J. M. (1980). Newton, Leibniz and the Leibnizian tradition. In I. Grattan-Guinness (Ed.), *From the calculus to set theory 1630-1910: An introductory history* (pp. 49-92). Princeton: Princeton University Press.
- Díaz Barriga, F. y Lugo, E. (2003). Desarrollo del currículo. En A. Díaz Barriga (Coord.), *La investigación curricular en México. La década de los noventa. Colección: La Investigación Educativa en México 1992-2002* (vol. 5, pp. 63-123). México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa.
- Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 3-6.
- Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- La aplicación Photomath te ayuda a resolver problemas con el teléfono (2014, 22 de octubre). CNN en Español. Recuperado el 5 de noviembre, 2014, de <http://cnnespanol.cnn.com/2014/10/22/la-aplicacion-photomath-te-ayuda-a-resolver-ecuaciones-con-el-telefono/>
- Laubenbacher, R. C., & Pengelley, D. (1996). Mathematical masterpieces: teaching with original sources. In N. Calinger (Ed.), *Vita mathematica: historical research and integration with teaching* (pp. 257-260). Washington: The Mathematical Association of America.
- Mancosu, P. (1996). *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century*. New York: Oxford University Press.
- Rickey, V. F. (1996). The necessity of history in teaching mathematics. In N. Calinger (Ed.), *Vita mathematica: historical research and integration with teaching* (pp. 251-256). Washington: The Mathematical Association of America.
- Rickey, V. F. (1997). My favorite way of using history in teaching calculus. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, and V. Katz (Eds.), *Learn from the masters* (pp. 123-134). Washington: The Mathematical Association of America.
- Serfati, M. (2010). The principle of continuity and the “paradox” of Leibnizian mathematics. In M. Dascal (Ed.), *The practice of reason: Leibniz and his controversies* (pp. 1-32). Amsterdam: John Benjamins Publishing Company.



- Serfati, M. (2014). On “the sum of all differences” and the origin of mathematics according to Leibniz: mathematical and philosophical aspects. In D. Riesenfeld and G. Scarafile (Eds.), *Perspectives on theory of controversies and the ethics of communication: Explorations of Marcelo Dascal's Contributions to Philosophy* (pp. 69-80). Dordrecht: Springer.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Simon, M., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.
- Spivak, M. (2010). *Calculus: cálculo infinitesimal* (2ª Edición). Barcelona: Reverté.

Carlos Rondero Guerrero. Profesor investigador del Área Académica de Matemáticas y Física de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (México). Sus líneas de investigación son la Epistemología y cognición de las ideas germinales, y la articulación de los saberes matemáticos.
Email: ronderocar@gmail.com

Aarón Reyes Rodríguez. Profesor investigador del Área Académica de Matemáticas y Física de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (México). Sus líneas de investigación están centradas en la resolución de problemas con el uso de las tecnologías digitales y la formación del profesorado de matemáticas.
Email: aaronr@uaeh.edu.mx

Juan Alberto Acosta Hernández. Profesor investigador del Área Académica de Matemáticas y Física de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (México). Su línea de investigación es: La linealidad como una idea germinal.
Email: acostah@uaeh.edu.mx