NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 89, julio de 2015, páginas 69-85

Una propuesta metodológica para el diseño, gestión y evaluación competencial de estrategias de resolución de un problema multiplicativo combinatorio

Mireia Artés Juvanteny (Univesitat Autònoma de Barcelona. España)
Edelmira Badillo Jiménez (Universidad de Oviedo. España)
Itziar García-Honrado (Univesitat Autònoma de Barcelona. España)
Laura Morera Úbeda (Univesitat Autònoma de Barcelona. España)
Montserrat Prat Moratonas (Univesitat Autònoma de Barcelona. España)

Fecha de recepción: 4 de diciembre de 2014
Fecha de aceptación: 11 de abril de 2015

Resumen En este artículo ejemplificamos con un problema de pensamiento multiplicativo combinatorio la complejidad asociada a los procesos de anticipación, gestión y evaluación de las estrategias de resolución usadas por alumnos de 8-9 y 11-12 años al resolver un problema de combinatoria. La definición de los diferentes momentos, previo, durante y posterior al proceso de resolución, ha sido clave para mostrar aspectos a tener en cuenta para promover una actividad matemática competencial. Una aportación relevante de esta propuesta es la atención al proceso de anticipación a la gestión de la actividad matemática en el aula porque permite a los maestros tener un control de las máximas variables posibles que facilitan, tanto la toma de decisiones durante la gestión, como la generación de oportunidades de aprendizaje para sus alumnos.

Palabras clave Pensamiento multiplicativo, estrategias de resolución, evaluación competencial, primaria.

Title **A methodological proposal for the design, orchestration and competential evaluation. The study of solving strategies of multiplicative combination problems**

Abstract In this article, we exemplify with a problem of combinatorial multiplicative thinking the complexity associated with the processes of anticipation, management and evaluation of problem solving strategies used by 8-9 and 11-12 years old students to solve a combinatorial problem. The definition of the different moments, before, during and after the students' resolution process, has been crucial to show aspects that have to be taken into account to promote competential mathematic activities. A significant contribution of this paper is the attention to the process of anticipation of the mathematical activity management in the classroom, because allows teachers keeping the control about possible variables that facilitate both taking decisions facing something unexpected that comes up during the management, as generating learning opportunities for their students.

Keywords Multiplicative thinking, problem solving strategies, competential evaluation, primary school.

Sociedad Canaria *Isaac Newton*
de Profesores de Matemáticas

1. Introducción

El currículo competencial actual exige a los maestros de primaria el desarrollo de una serie de competencias profesionales que les permitan diseñar y gestionar en el aula una actividad matemática basada en procesos para la construcción colectiva de significados (Badillo, Figueiras, Font y Martínez, 2013). Esta situación supone un reto en la enseñanza ya que una variación curricular comporta cambios en las prácticas matemáticas de aula que buscan el desarrollo de competencias en sus alumnos. Estos procesos de cambio son complejos porque los maestros no han sido formados según los nuevos currículos. Esta situación pone de manifiesto dos aspectos clave: (1) la necesidad de la formación continua del profesorado y, (2) la importancia de proporcionarles recursos que les permitan asumir la complejidad de las nuevas propuestas curriculares.

En la actualidad, los maestros manifiestan dificultad a la hora de aplicar el currículo por competencias. Encuentran complejo trasladar la actividad matemática del aula desde una perspectiva basada en contenidos hacia una perspectiva basada en el desarrollo de procesos matemáticos (resolución de problemas, comunicación, representación, conexión y argumentación matemática). Esta dificultad se agudiza a la hora de operativizar en la actividad matemática términos como procesos, competencias y contenidos matemáticos y, más aún, a la hora de evaluar a los alumnos por competencias (Sanmartí, 2010).

La preocupación en Cataluña por los resultados negativos en las evaluaciones externas realizadas a alumnos de cuarto y sexto de primaria sobre la competencia matemática (evaluaciones diagnósticas, pruebas PISA, etc.) han llevado a promover la adopción de medidas que permitan la mejora de la calidad del sistema educativo y de los centros, así como la mejora de la actividad docente del profesorado. En este sentido, desde el Departamento de Enseñanza de la Generalitat de Cataluña se ha hecho un esfuerzo para ayudar a que los maestros entiendan y apliquen el currículum oficial por competencias atendiendo a toda su complejidad (MEC, 2006). En concreto, se ha llevado a cabo una propuesta de despliegue curricular que incorpora las competencias matemáticas específicas de la etapa, graduadas en tres niveles de consecución, poniendo relevancia en las relaciones entre las competencias, procesos y contenidos del currículum actual (Burgués y Sarramona, 2013). En este despliegue, se han definido cuatro dimensiones asociadas con los procesos del currículo: (1) resolución de problemas; (2) razonamiento y prueba; (3) conexiones; y, (4) comunicación y representación. Para cada dimensión se definen las competencias con sus gradaciones respectivas y los contenidos clave relativos a cada competencia. Finalmente, se proporcionan orientaciones metodológicas y orientaciones de evaluación de cada competencia con ejemplos concretos.

2. Una propuesta para trabajar la resolución de problemas desde una perspectiva competencial

En este artículo nos centraremos en el análisis previo a la gestión en el aula de un problema matemático y la posterior evaluación del proceso de resolución, por parte de alumnos de tercero y sexto grado de primaria, basado en el significado de la multiplicación como combinación. Por cuestiones de espacio, no abordaremos la gestión de los maestros en el aula, pero sí daremos pistas sobre los elementos e instrumento de anticipación a la gestión, importantes para la generación de oportunidades de aprendizaje (Morera, 2013).

Para el aprendizaje de los alumnos por competencias, consideramos que el diseño y la gestión de la clase en la que se va a llevar a cabo la resolución de problemas son claves para que se promueva la construcción de significados colectivos y la participación matemática de los alumnos. Así, es necesario un proceso de anticipación de la gestión en aula por parte de los maestros para promover la generación de oportunidades de aprendizaje durante las sesiones de clase (Morera, 2013). La Figura 1 muestra nuestra propuesta del proceso para trabajar la resolución de problemas en el aula estructurado por momentos.

El proceso de anticipación a la gestión de la actividad matemática en el aula permite a los maestros tener un control de las máximas variables posibles que faciliten, tanto la toma de decisiones ante los imprevistos durante la gestión del aula, como la generación de oportunidades de aprendizaje para sus alumnos. Este proceso de anticipación requiere de dos momentos: (1) análisis matemático previo de la resolución del problema; (2) análisis curricular de los procesos y competencias a evaluar. Ligados a esta anticipación, son claves los siguientes dos momentos: (3) la gestión en el aula que promueva la construcción de significados y que genere oportunidades de aprendizaje y, (4) la evaluación de las estrategias de los alumnos mediante los niveles de desarrollo competencial. Es decir, el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje que se han generado puede depender de la anticipación y gestión que haya realizado el profesor (Morera, Fortuny y Planas, 2012).

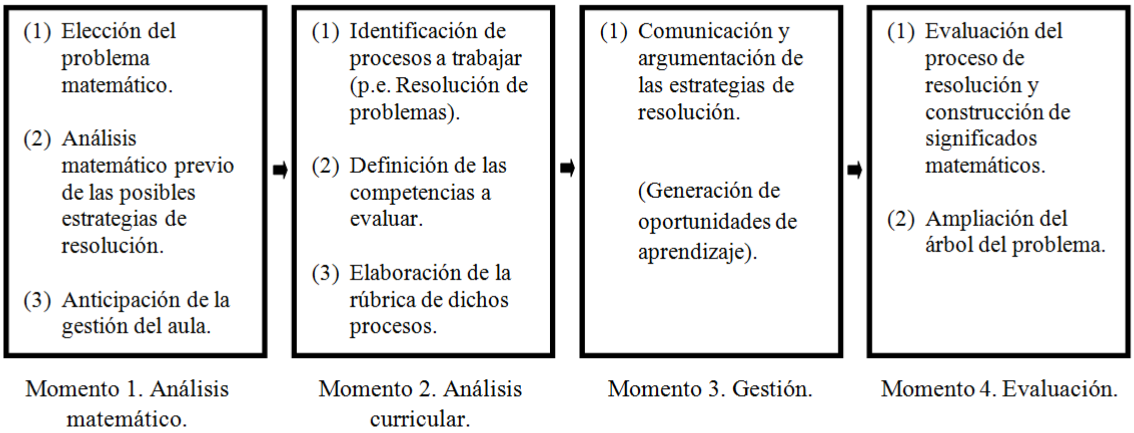


Figura 1. Momentos del proceso anticipación, gestión y evaluación actividad matemática en el aula

El primer momento es el estudio previo y consiste en prever y recoger todas las posibles estrategias de resolución del problema, desde las más simples y concretas hasta las más complejas y abstractas. Además, también tiene lugar la elaboración del árbol del problema, el cual nos permite planificar la gestión en el aula para tener más recursos a la hora de saber en qué punto se encuentra el alumno y proporcionarle los inputs necesarios para asegurar que avanza satisfactoriamente en la resolución del problema (Morera, Chico, Badillo y Planas, 2012).

El segundo momento consiste en la elaboración de las rúbricas a partir de los niveles de desarrollo competencial. Según Sanmartí (2010), una rúbrica es una matriz que explicita tanto los *criterios de realización* relacionados con la evaluación de una competencia, como los *criterios de resultados* que corresponden a los diferentes niveles de adquisición de cada criterio de realización definido. En este artículo, nos centraremos en el proceso de resolución de un problema de pensamiento multiplicativo combinatorio (ver Cuadro 1) y en concreto, en el análisis de las estrategias de resolución específicas para este tipo de problema.

El tercer momento tiene lugar en el aula. Se centra en la comunicación matemática entre los alumnos y está orquestada por el profesor. Mediante esta participación y el intercambio entre el alumnado de las diferentes estrategias de resolución, se promueve la construcción de significados matemáticos colectivos. En este contexto se generan oportunidades de aprendizaje que pueden ser aprovechadas por los estudiantes. Este momento es clave, puesto que permite a los alumnos modificar sus esquemas de conocimiento e incorporar otros nuevos.

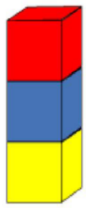
Finalmente, el cuarto momento consiste en la evaluación del proceso de resolución del problema por parte de los alumnos. Las rúbricas permiten evaluar de manera objetiva los niveles de desarrollo competencial en la resolución de problemas según los diferentes criterios de realización previamente establecidos. Además, este momento se caracteriza por la ampliación y mejora de las rúbricas ajustadas a las respuestas y argumentaciones dadas por los alumnos durante el proceso de resolución (Sanmartí, 2010).

2.1. Un problema de pensamiento multiplicativo

Maza (1991) propone una clasificación de diferentes situaciones multiplicativas que pone de manifiesto la complejidad y la diversidad de significados del concepto de multiplicación. En el aula de primaria, la actividad matemática ligada a la multiplicación, en la mayoría de los casos, se centra en el significado de la multiplicación como suma reiterada y no se contemplan otros significados. El Cuadro 1 muestra el problema de pensamiento multiplicativo seleccionado del proyecto Nrich de la Universidad de Cambridge (http://nrich.maths.org/frontpage). Se trata de un problema de combinación entre cantidades para generar otra cantidad (cantidad x cantidad = cantidad) (Maza, 1991; Castro y Ruiz, 2011). Este significado de la multiplicación está ligado a la combinatoria que, o bien no se trabaja en el aula de primaria, o bien se desliga del significado asociado a la multiplicación.

"Coge tres bloques de colores diferentes: uno rojo, uno amarillo y uno azul. Haz una torre utilizando un bloque de cada color. Aquí tienes un ejemplo de torre que tiene el color rojo en la parte superior, el azul en el medio y el amarillo en la parte inferior.

a) ¿Cuántas torres de tres pisos se pueden hacer con tres colores diferentes?
b) ¿Cuántas torres de cuatro pisos se pueden hacer con cuatro colores diferentes?
c) ¿Encuentras alguna relación entre las construcciones de tres y cuatro colores?
d) ¿Cuántas torres de diez pisos se pueden hacer con diez colores diferentes? ¿Y con más?"



Cuadro 1. Problema de las torres de colores

El problema se propuso a los alumnos de tercero (8-9 años) y sexto (11-12 años) de primaria de dos centros de Cataluña durante el primer trimestre del curso 2013/14, con el propósito de observar similitudes y diferencias entre las estrategias y soluciones dadas por los estudiantes. En ambos casos se había introducido el concepto de multiplicación, aunque los estudiantes se encontraban en diferentes niveles de profundización. El grupo de tercero de primaria estaba conformado por 24 estudiantes de la Escuela pública Antonio Machado de Mataró y el grupo de sexto de primaria por 26 estudiantes de la Escuela concertada Salesianos de Badalona. Inicialmente, los estudiantes resolvían de manera individual el problema propuesto. Para resolver el problema disponían de diferentes tipos de materiales (multilink, plantilla con la vista frontal de las torres, papel en blanco y colores), los cuales se proporcionaban a partir de la demanda explícita de los estudiantes durante el proceso de resolución. Posteriormente, los estudiantes en grupo discutían y elaboraban un protocolo conjunto de resolución del problema, argumentando las estrategias utilizadas y los resultados encontrados. La sesión acabó con una puesta en común, en gran grupo, en la que se comunicaban y argumentaban las diferentes estrategias de resolución consensuadas en los grupos. Por cuestiones de espacio, para ilustrar el proceso de evaluación competencial de las estrategias utilizadas por los estudiantes, nos centramos en el protocolo de un caso concreto de cada grupo-clase.

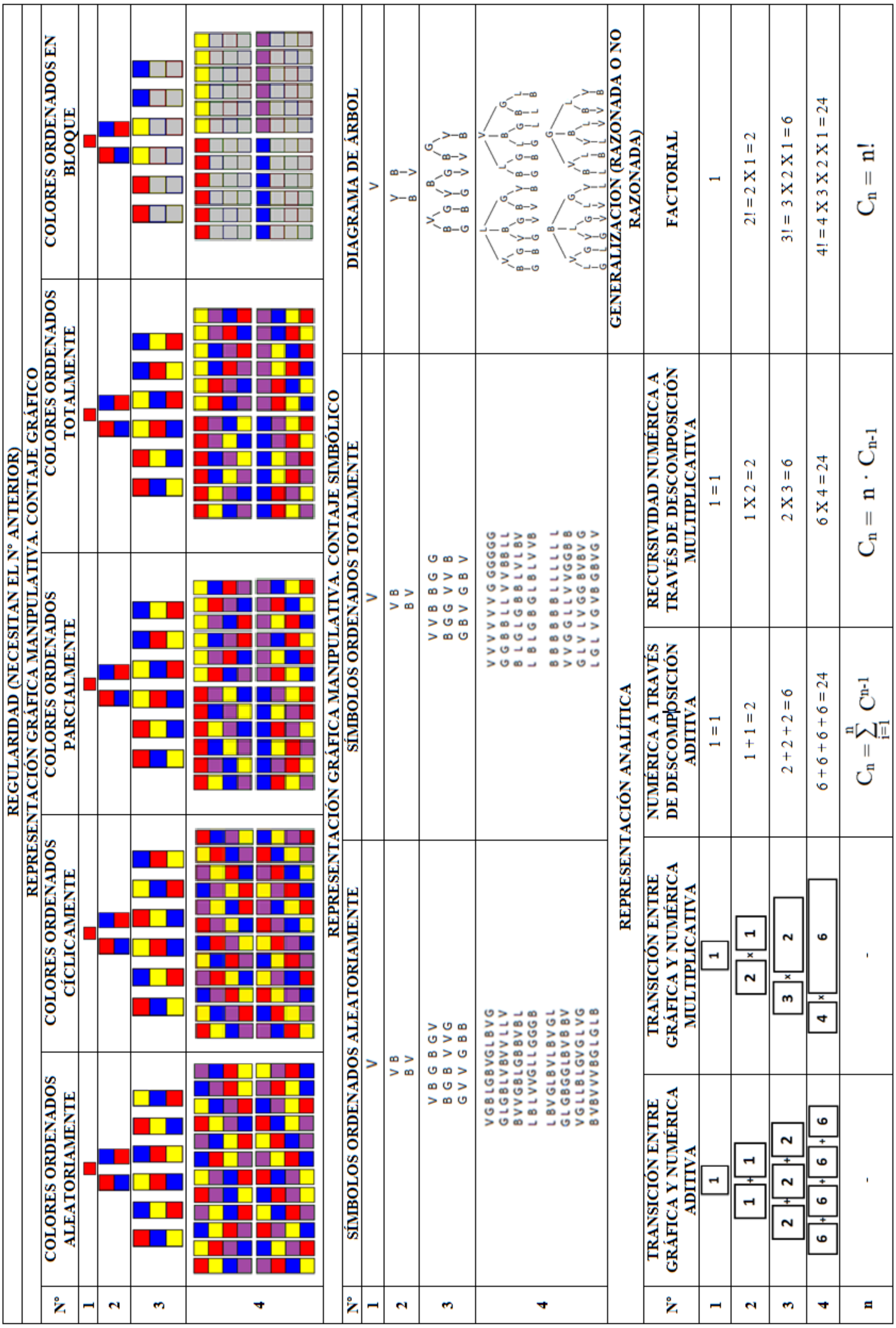


Figura 2. Estrategias de resolución del problema de las torres

3. La importancia de la anticipación a la gestión de la actividad matemática en el aula del problema de las torres de colores

A continuación, mostramos los dos momentos del proceso de anticipación necesario para una buena gestión de la actividad matemática en el aula. En el primer momento, una vez elegido el problema, realizamos el análisis matemático previo de las estrategias de resolución del mismo. La Figura 2 recoge algunas de las posibles estrategias de resolución del problema, organizadas desde la más simple y concreta, que es la representación gráfica manipulativa mediante el conteo gráfico de colores ordenados aleatoriamente, hasta la más compleja y abstracta, que es la generalización razonada aplicando el concepto de factorial. Las estrategias de la Figura 2, surgieron del análisis matemático previo realizado por la maestra y se han refinado después de observar las estrategias de resolución usadas por los alumnos.

Para realizar la anticipación de la gestión del aula elaboramos el árbol del problema (Figura 3), a partir de hipótesis sobre las distintas trayectorias por las que prevemos que pasarán los alumnos. Para las situaciones en las que los alumnos no resuelvan o no avancen en la resolución del problema, ofrecemos comentarios (Tabla 1) del profesor, para reconducir al alumno en el proceso.

	Comentarios de soporte a los alumnos sobre el problema
C1	Simplificar el problema proponiendo a los alumnos que lo intenten hacer con dos colores.
C2	Proporcionar a los alumnos material (*multilink* ilimitado o 3 *multilink* y una cuadrícula).
C3	Intentar que dibujen y sigan un criterio de ordenación.
C4	Sugerir a los alumnos que ordenen las respuestas a las que llegan definiendo un criterio. Por ejemplo. Recomendar a los alumnos que siempre empiecen con el mismo color hasta agotar todas las combinaciones. Cada vez que encuentren una combinación, que la pongan al lado de las demás para favorecer la visualización.
C5	Proponer a los alumnos que encuentren patrones. Por ejemplo, que busquen la relación entre 2 y 3 colores.
C6	Ayudar a sistematizar la estrategia.
C7	Recomendar a los alumnos que expresen por escrito las operaciones realizadas.
C8	C8.1: Proponer al alumno que intente argumentar su solución.
	C8.2: Proponer al alumno que revise la generalización de cuando tenía 4 colores.

Tabla 1. Comentarios de soporte a los alumnos sobre el problema

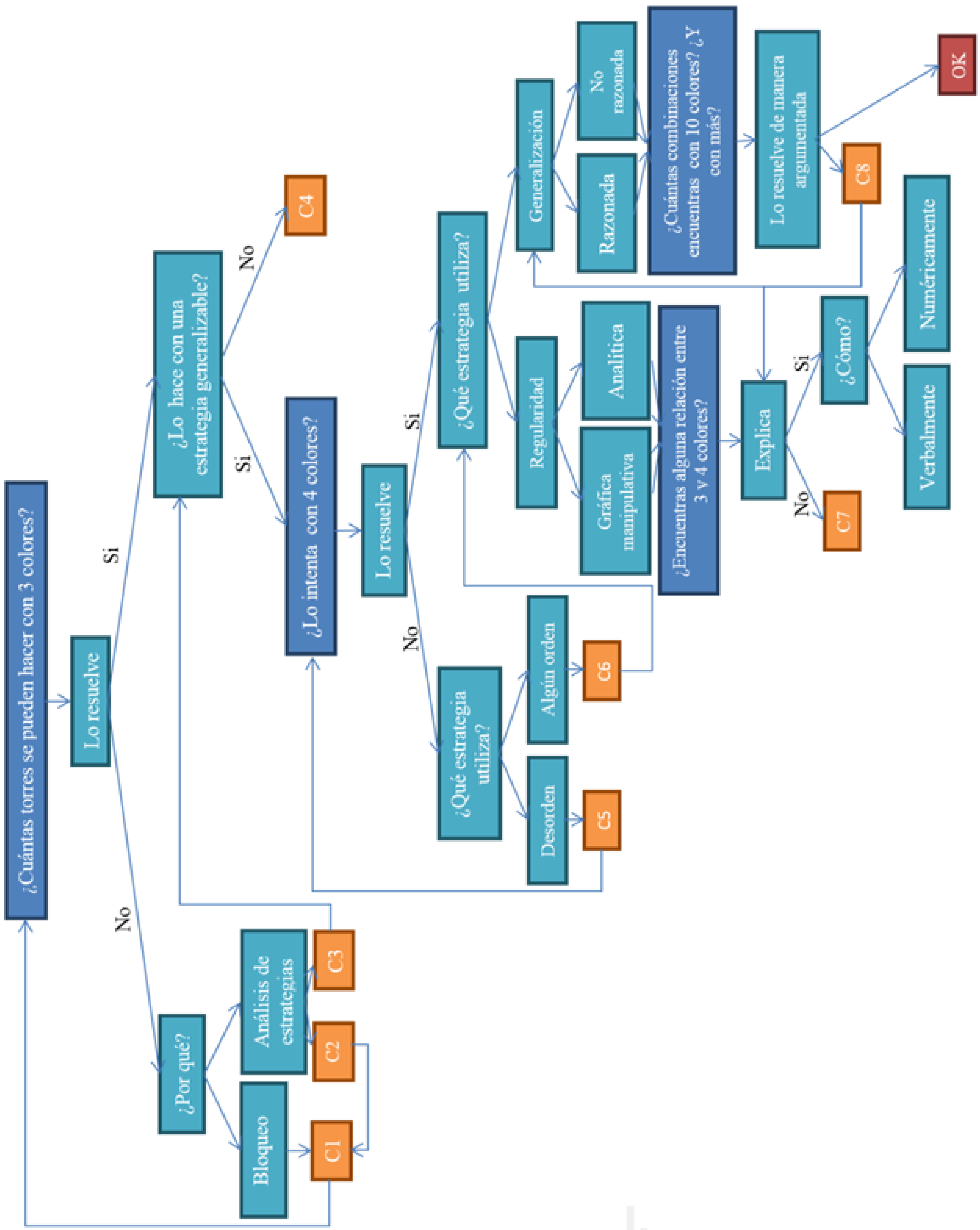


Figura 3. Árbol del problema de las torres

En el momento de análisis curricular elaboramos la rúbrica de evaluación, centrada en el proceso de resolución del problema. En particular, en este artículo, nos centramos en la evaluación de la competencia 1, propuesta por el *Departamento de Enseñanza de la Generalitat de Cataluña*: "Traducción de un problema a una representación numérica y uso de conceptos, herramientas y estrategias matemáticas en su resolución" (Burgués y Sarramona, 2013, p. 10). Se diseña una rúbrica que permite clasificar el nivel competencial de los alumnos referida al problema propuesto (ver Tabla 2). Así, para cada criterio de realización, se han elaborado cuatro niveles de adquisición. Podría interpretarse que la evaluación competencial se centra en la clasificación de los alumnos en un único nivel de desarrollo para cada competencia. En la rúbrica que proponemos, no tenemos en cuenta el nivel 0 correspondiente a la no adquisición de la competencia y definimos los cuatro niveles atendiendo a una combinación entre el grado de autonomía y la complejidad matemática. Consideramos que la definición de los criterios de realización y los de resultados permiten: (1) la disección de cada competencia en criterios evaluables; (2) la conexión entre los distintos niveles; y, (3) la evaluación más detallada del aprendizaje de los alumnos.

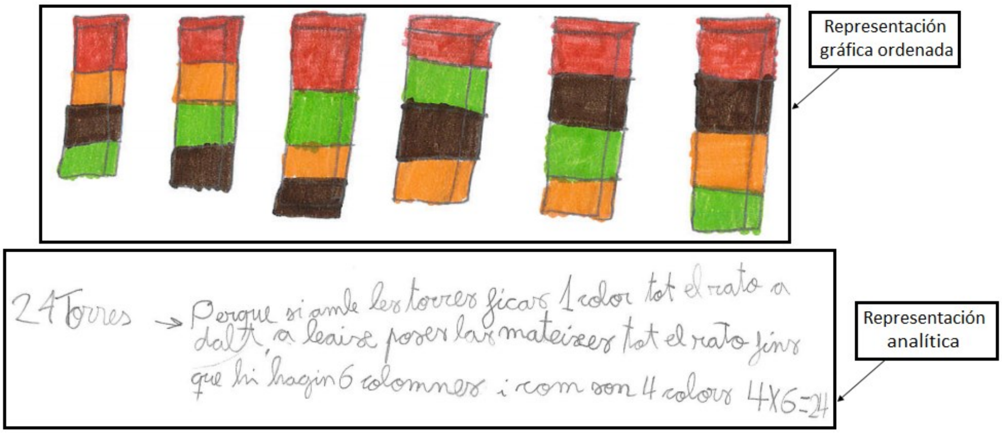
En este artículo no abordaremos la descripción del momento de gestión del problema en el aula porque nos interesa detenernos en el proceso de evaluación por competencias. Para dar cuenta de la evaluación realizada mediante la rúbrica presentada en la Tabla 2, mostramos y analizamos algunas resoluciones de los alumnos.

Criterios de realización	**Criterios de resultados**			
	Nivel 1	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Nivel 4**
Identificar los datos del problema	Identifica datos con ayuda	Identifica los datos, pero no los interpreta bien.	Identifica e interpreta los datos, pero no diferencia los relevantes.	Identifica e interpreta los datos relevantes.
Representar el problema	Representa el problema con ayuda.	Representa el problema mediante representación gráfica/simbólica desordenada.	Representa el problema mediante representación gráfica/simbólica ordenada.	Representa el problema mediante representación numérica.
Usar estrategias específicas del contenido matemático implícito del problema	Usa estrategias manipulativas /gráficas de resolución con ayuda, y no necesariamente da la respuesta.	Usa el conteo gráfico/simbólico en desorden, da la respuesta y no ve el patrón.	Usa la recursividad gráfica/simbólica para dar la respuesta, pero no ve el patrón.	Usa la recursividad numérica para dar la respuesta y generaliza el patrón.
Explicar el proceso de resolución	Explica el proceso con ayuda.	Explica el proceso con ejemplos gráficos o simbólicos.	Explica el proceso sin necesidad de ejemplos y con lenguaje no	Explica el proceso usando lenguaje matemático

Tabla 2. Rúbrica para la evaluación de la competencia 1 en el problema de las torres

4. Análisis de producciones de una alumna de tercero de primaria: el caso de Ana

En el Cuadro 2 podemos ver cómo Ana resuelve el problema correctamente usando dos tipos de representaciones acompañadas de una argumentación verbal. Inicialmente elabora una representación gráfica totalmente ordenada de la situación. Se puede intuir que detrás de esta representación aplica la idea de combinación de colores. Sin embargo, la representación analítica asociada a la representación gráfica, **4x6=24**, la interpretamos como una recursividad numérica a través del uso de la multiplicación como suma reiterada para llegar al número total de combinaciones. Esto puede estar influenciado por el tipo de situaciones de pensamiento multiplicativo que se trabajan en el aula en este nivel de escolaridad.



Traducción: *"Porque si con las torres pones 1 color todo el rato arriba, debajo pones las mismas todo el rato hasta que haya 6 columnas y como son 4 colores,* $4 \times 6 = 24$, *."*

Cuadro 2. Resolución del problema de las torres realizada por Ana

La Tabla 3 corresponde a la rúbrica de evaluación del proceso de resolución de Ana. En el criterio de realización "Identificar los datos del problema", la hemos ubicado en un nivel 4. Consideramos que Ana identifica e interpreta los datos relevantes del enunciado al fijar el mismo color en la parte superior hasta agotar todas las posibilidades, tal y como sugería el enunciado de manera muy sutil. En el criterio de realización "Representación del problema", la situamos en un nivel 3 porque combina dos tipos de representaciones: representa el problema mediante una representación gráfica/simbólica ordenada, ya que dibuja las torres y las pinta siempre siguiendo su criterio de ordenación; y, expresa analíticamente la operación multiplicativa (4x6=24) asociada a la representación gráfica.

En el criterio de realización "Usar estrategias específicas del contenido matemático implícito del problema", la hemos ubicado en un nivel 3. Consideramos que Ana se encuentra en una transición entre una estrategia gráfica-ordenada y una numérica-multiplicativa. Es decir, Ana ve que para obtener el número de combinaciones totales de torres de cuatro colores debe multiplicar por cuatro el número de combinaciones de torres de altura tres. Sin embargo, para calcular el número de combinaciones de torres de altura tres, usa una estrategia gráfica totalmente ordenada para dibujar las seis posibilidades. En ningún momento de su resolución da evidencias de haber encontrado un patrón.

En el criterio de realización "Explicar el proceso de resolución", la hemos ubicado en un nivel 4. Aparte de que expresa matemáticamente el resultado usando la multiplicación, se evidencia una explicación general sin necesidad de particularizar con ejemplos.

Criterios de realización	**Criterios de resultados**			
	Nivel 1	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Nivel 4**
Identificar los datos del problema				X
Representar el problema			X	
Usar estrategias específicas del contenido matemático implícito del problema			X	
Explicar el proceso de resolución				X

Tabla 3. Resultados de la evaluación de Ana de la Competencia 1

Si consideramos el nivel de competencia de la alumna de forma general y no asignando un nivel particular a cada criterio, Ana se encuentra en un nivel intermedio-alto, entre el 3 y el 4. Aunque la idea de la rúbrica es clasificar por niveles a los alumnos, nos encontramos con que la resolución de Ana verifica los descriptores de dos niveles distintos, así que no tenemos certezas suficientes para inclinarnos por uno de los dos niveles. Este caso es muy común ya que el proceso de evaluación está lleno de imprecisiones y subjetividades, y al pretender clasificar las producciones de los alumnos se pierden los matices propios de cada individuo. Para un estudio riguroso en un proceso de evaluación individualizada, forzar la clasificación podría implicar la pérdida de información. Consideramos que para hacer una evaluación más objetiva y más aproximada al proceso de resolución de los alumnos ha sido útil el uso de conjuntos borrosos (Zadeh, 1965). Estos conjuntos permiten ubicar al alumno en un entorno del nivel sin ser necesario realizar de forma precisa esa clasificación, además permiten diferenciar alumnos en un mismo nivel.

Siguiendo esta idea, proponemos la creación de un conjunto borroso discreto que asigne un grado de pertenencia entre *0* y *1* a los distintos niveles de evaluación definidos: 0 si no cumple el criterio, 1 si cumple el criterio y cualquier valor intermedio entre cumplirlo totalmente o no cumplirlo; por ejemplo, 0.5 si cumple medianamente el criterio. En el caso de Ana, la asignación del nivel 4 en el primer criterio de realización, corresponde a un grado total de pertenencia (*1*) porque identifica los datos explícitos e implícitos del enunciado. Procediendo de la misma forma con los otros criterios, los resultados para el caso de esta alumna quedan recogidos en la Tabla 4.

A partir de los valores de la Tabla 4, podemos asignar el grado de pertenencia de la alumna para cada nivel haciendo la media aritmética entre los valores de pertenencia asignados (el *0* implica la no pertenencia a ese nivel). Así para los niveles 1 y 2 el grado de pertenencia medio es *0* y para los niveles 3 y 4 el grado de pertenencia medio es *0.5* ((1+1)/4). Matemáticamente este conjunto borroso se representa por 0/ (nivel 1)+0/ (nivel 2)+0.5/(nivel 3)+0.5/(nivel 4) o abreviadamente, se eliminan los niveles donde no se verifica. Por lo tanto, el conjunto borroso que representa este caso es el 0.5/3+0.5/4. Si queremos obtener un valor numérico final, podemos hacer uso del Centroide o Centro de gravedad del conjunto obtenido, que se consigue como el cociente entre la suma de las medias ponderadas de nivel de todos los criterios y la suma de todos los grados asignados, (1*4+1*3+1*3+1*4)/(2+2)=3.5. La interpretación de este número sería que la alumna se considera que está justo entre el nivel 3 y 4.

Competencia 1	**Criterios de evaluación**				**Medias ponderadas de nivel por criterio**
	Nivel 1	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Nivel 4**	
Criterio de realización 1	0	0	0	1	1·4
Criterio de realización 2	0	0	1	0	1·3
Criterio de realización 3	0	0	1	0	1·3
Criterio de realización 4	0	0	0	1	1·4
Suma por niveles de los grados asignados	0	0	2	2	(1·4+1·3+1·3+1·4)/(2+2) = 3.5

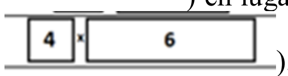
Tabla 4. Resultados de la aplicación de la lógica borrosa a la evaluación del proceso de resolución de Ana

Los informes de evaluación de los alumnos exigen al profesorado asignar una nota numérica. Tal y como sugiere Sanmartí (2010) hay el peligro de perder información cualitativa al traducir el valor de la rúbrica a una nota numérica. Asignar una nota mediante un conjunto borroso nos permite recoger mucha más información que la que se puede recoger con una nota numérica, ya que permite al alumno tomar conciencia del nivel de adquisición real en cada criterio de realización.

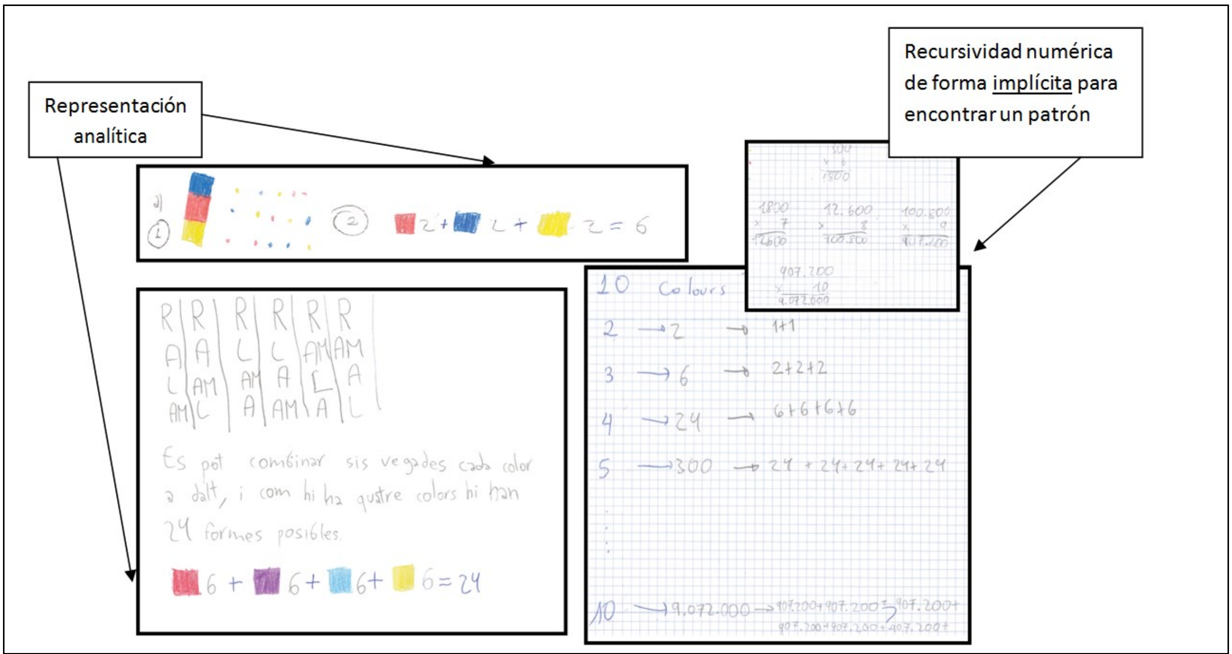
5. Análisis de producciones de un alumno de sexto de primaria: el caso de Juan

El Cuadro 3 corresponde al proceso de resolución de Juan. Este alumno resuelve correctamente el problema aunque muestra dificultades en la generalización del mismo. Así pues, la representación analítica que propone es numérica a través de una descomposición aditiva, pero no llega a la recursividad numérica a través de una descomposición multiplicativa que era lo esperado, si atendemos a la riqueza en su proceso de resolución.

Describiendo su actuación podemos indicar que las dos primeras preguntas del problema no supusieron ninguna dificultad para Juan. En su protocolo escrito comenzó con una representación gráfica-simbólica (en el caso de 3 elementos, con marcas de colores y en el caso de 4 colores con letras), que le llevaron a la representación analítica. Respecto al proceso de generalización, dejó explícita la recursividad aditiva, pero en el cálculo utilizó la multiplicación como suma reiterada, con lo cual inferimos que se aproxima al cálculo de permutaciones a través del factorial. Consideramos que no llega explícitamente a usar el factorial por la posible influencia de la representación numérica aditiva (

) en lugar del uso de una representación multiplicativa que facilite el paso al factorial (

).



Traducción: *"Se puede combinar seis veces cada color arriba, y como hay cuatro colores hay 24 formas posibles.* 6 + 6+ 6+ 6=24

Cuadro 3. Resolución del problema de las torres del alumno de 6º

La Tabla 5 corresponde a la rúbrica de evaluación del proceso de resolución de Juan. En los criterios de realización "Identificar los datos del problema" y "Representar el problema", lo hemos ubicado en un nivel 4 de adquisición, puesto que identifica los datos relevantes del enunciado y justifica el uso de diversas representaciones (numérica, gráfica y simbólica). Para los criterios de realización "Usar estrategias específicas del contenido matemático implícito del problema" y "Explicar el proceso de resolución", también consideramos que está en un nivel 4. Juan identifica un patrón volviendo hacia atrás cuando se le plantea la generalización del problema. Además, resuelve el problema de acuerdo con su patrón justificándolo con lenguaje matemático.

Criterios de realización	**Criterios de resultados**			
	Nivel 1	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Nivel 4**
Identificar los datos del problema				X
Representar el problema				X
Usar estrategias específicas del contenido matemático implícito del problema				X
Explicar el proceso de resolución				X

Tabla 5. Resultados de la evaluación de Juan de la Competencia 1

Considerando el nivel de competencia de Juan de forma general, después de evaluarlo criterio por criterio, podemos ver que se encuentra en un nivel alto. Aplicando la lógica borrosa a estos criterios de evaluación, asignamos grado 1 a los criterios de realización 1, 2 y 4 del nivel 4, ya que identifica los datos relevantes del problema, representa el problema mediante representación numérica y explica el proceso usando un lenguaje matemático correcto. En el caso del criterio de realización 3, usa la recursividad numérica pero no generaliza el patrón desligándose de la recursividad, por lo cual le asignamos un grado medio de verificación (0.5). En la Tabla 6 se muestran los resultados del conjunto borroso del proceso de resolución de Juan, así: 0/1+0/2+0/3+0.875/4. En el nivel 4, la media aritmética asigna un grado de pertenencia de 0.875 ((1+1+0.5+1)/4). Para asignarle un valor numérico final, calculamos el Centroide o Centro de gravedad, obteniendo el valor 4, que nos permite ubicarlo en este nivel de evaluación.

Competencia 1	**Criterios de evaluación**				**Medias ponderadas de nivel por criterio**
	Nivel 1	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Nivel 4**	
Criterio de realización 1	0	0	0	1	1·4
Criterio de realización 2	0	0	0	1	1·4
Criterio de realización 3	0	0	0	0.5	0.5·4
Criterio de realización 4	0	0	0	1	1·4
Suma por niveles de los grados asignados	0	0	0	3.5	(1·4+1·4+0.5·3+1·4)/3.5 = 3.5

Tabla 6. Aplicación de la lógica borrosa a la evaluación del proceso de resolución de Juan

6. Comparativa de estrategias de pensamiento multiplicativo de combinaciones usadas por los alumnos de tercero y sexto de primaria

Tomando como referencia las posibles estrategias de resolución del problema de las torres definidas en el proceso de anticipación (Figura 2), a continuación analizamos y comparamos las estrategias usadas por los alumnos de tercero y sexto de primaria para los dos primeros apartados del problema que fueron resueltos por la totalidad de los alumnos de ambos grupos. La Tabla 7 muestra el porcentaje de las estrategias utilizadas por los alumnos para dar el número de torres posibles con tres y cuatro colores. Es importante resaltar que todos los alumnos resolvieron correctamente estos apartados del problema usando diferentes estrategias que analizaremos a continuación.

Las estrategias utilizadas por los alumnos para el caso de tres colores son mayoritariamente manipulativas y sólo un alumno de sexto usa una estrategia analítica. Prácticamente la mitad de los alumnos de tercero utilizan como estrategia la ordenación aleatoria de los colores, recurriendo a la recursividad gráfica para encontrar todas las combinaciones posibles. La otra mitad de este grupo utiliza como estrategia la ordenación cíclica de los colores como consecuencia del uso de material manipulativo. Por otro lado, un pequeño porcentaje establece un criterio de ordenación mediante la ordenación parcial de los colores. Es decir, estos alumnos fijan un color en la parte superior hasta agotar todas las posibilidades. Este mismo criterio de ordenación fue clave para que los alumnos de tercero, en el apartado de cuatro colores, pudieran llegar a la representación analítica. Para el caso de los alumnos de sexto el porcentaje de estrategias usadas es más variado y se reparte mayoritariamente entre los conteos gráficos ordenados aleatorio, cíclico y parcialmente.

Representación	Estrategia	3 colores		4 colores	
		Tercero	Sexto	Tercero	Sexto
Gráfica manipulativa	Conteo gráfico. Colores ordenados aleatoriamente	45%	36%	20%	32%
	Conteo gráfico. Colores ordenados cíclicamente	50%	32%	0%	0%
	Conteo gráfico. Colores ordenados parcialmente	5%	28%	25%	16%
	Conteo gráfico. Colores ordenados totalmente	0%	0%	0%	0%
	Conteo gráfico. Colores ordenados en bloque	0%	0%	0%	0%
Analítica	Transición entre gráfica y numérica aditiva	0%	4%	0%	0%
	Transición entre gráfica y numérica multiplicativa	0%	0%	0%	0%
	Recursividad numérica a través de la descomposición aditiva	0%	0%	0%	0%
	Recursividad numérica a través de descomposición multiplicativa	0%	0%	55%	32%
Generalización (razonada o no)	Uso del concepto de factorial	0%	0%	0%	20%

Tabla 7. Estrategias de resolución del problema de las torres con 3 y 4 colores (alumnos de tercero y sexto de primaria)

Atendiendo a la graduación de los contenidos del Currículo de primaria y al nivel madurativo de los estudiantes, se podría esperar diferencias significativas en las estructuras multiplicativas, activadas por los alumnos de tercero y sexto de primaria, al argumentar las estrategias usadas en el proceso de resolución. No obstante, los datos de la Tabla 7 permiten observar que no exhiben diferencias notables. Por un lado, la mayoría de los estudiantes de cada grupo usan representaciones manipulativas de conteo gráfico con criterios de ordenación aleatorio, cíclico o parcial (100% tercero y 96% sexto) y sólo un alumno de sexto de primaria usa una representación analítica que muestra la generalización del patrón (4%). Esto posiblemente se podría atribuir, por un lado, a que el significado de multiplicación como combinación de cantidades no había sido trabajado previamente en ninguna de las dos clases; o bien, a la influencia del uso del material manipulativo proporcionado durante el proceso de resolución (multilink). Sería interesante, contrastar estos resultados limitando el uso de dicho material para ver su influencia en la identificación de la regularidad del patrón y/o en su generalización, tanto gráfica (espacial) y numérica (Radford, 2011), como comparar grupos que hayan tenido una instrucción previa sobre dicho contenido.

Al aumentar la complejidad del problema para el caso de torres de 4 colores, las estrategias de resolución se hacen más sofisticadas y aumenta el número de alumnos que lo resuelve de forma gráfica ordenada y analítica. Durante la resolución individual del problema con cuatro colores, muchos de los alumnos empezaron con la ordenación aleatoria de colores, pero al detectar que no les resultaba una estrategia eficaz, dada la cantidad de combinaciones posibles, acabaron por abandonar la estrategia.

En la gestión del proceso de resolución son clave los comentarios de soporte que se les dan a los alumnos (Tabla 1). Para ayudar a los alumnos a la búsqueda de estrategias de conteo ordenado se les recomendaba que agotaran todas las combinaciones después haber empezado con el mismo color y que cada vez que encontraran una combinación la sistematizaran o la mantuvieran para favorecer la visualización (Ver Figura 3, Comentario 4 del árbol del problema). En el caso de los alumnos de tercero, esta ayuda y el uso del material manipulativo, les permitió encontrar las seis combinaciones posibles fijando un color en la parte superior y expresar analíticamente la operación multiplicativa ($4 \times 6 = 24,$), asociándola con la representación gráfica (las veces que puede estar un color en una posición (6), por el número de colores (4)). De este modo se explica que para el caso de cuatro colores el 55% de los alumnos de tercero llegan a utilizar la recursividad numérica a través de descomposición multiplicativa, cuando para el caso de tres colores habían pasado por dos estrategias más, la estrategia de ordenación aleatoria de colores (la cual acabaron por abandonar vista su poca eficacia) y la estrategia de ordenación parcial de colores (hecho que les sirvió de transición entre la representación gráfica y analítica).

Esta ayuda para el caso de los alumnos de sexto, también provoca una mejora en la complejidad de las estrategias de resolución para torres de cuatro colores. Además, es importante resaltar que a estos alumnos se les pide además resolver los apartados c) y d) del problema (Cuadro 1), donde se les plantea buscar las combinaciones posibles para torres de 10 o más colores (Figura 3). Este hecho puede explicar la aparición, solo en los alumnos de sexto, de estrategias de generalización basadas en el uso del concepto de factorial (20%).

7. A modo de conclusión

Consideramos que la elección de un mismo problema de pensamiento multiplicativo, poco trabajado en el aula de primaria, presentado a dos grupos de alumnos de diferente nivel de escolaridad, nos ha permitido generar un entorno de resolución de problemas desligado de los conocimientos matemáticos desarrollados previo al momento de la intervención didáctica. El problema seleccionado y el proceso de anticipación han favorecido una gestión en el aula que promueva la generación de oportunidades de aprendizaje. Es importante resaltar, que el estudio matemático previo de todas las posibles estrategias de resolución del problema y la elaboración del árbol del problema nos han ayudado en la gestión del aula. En particular, en la toma dediciones en relación a la pertinencia o no de proporcionar recursos necesarios y suficientes para que todos los alumnos pudieran llegar a resolver el problema y argumentarlo matemáticamente.

Lo anterior nos permite afirmar que para un buen diseño, gestión y evaluación de la resolución de problemas en el aula hay que tener el control de las máximas variables posibles, saber reaccionar ante los posibles imprevistos, proporcionar a los alumnos las herramientas necesarias, atender a la diversidad de ritmos de aprendizaje, poder llegar al máximo de alumnos posibles, comprender el proceso que han seguido los alumnos (y por consiguiente, saber qué han aprendido realmente). Así, la anticipación deviene un factor clave para la posterior evaluación por competencias de los alumnos durante la resolución de problemas.

El planteamiento de un mismo problema de pensamiento multiplicativo a alumnos de tercero y sexto de primaria ha puesto de manifiesto que las estrategias utilizadas por los alumnos no son muy diferentes (niveles de realización) y que los niveles de evaluación son bastante semejantes. Consideramos que esto posiblemente debe obedecer, por un lado, al hecho de que en el aula de matemáticas de primaria se trabaja poco o nada la combinatoria ligada al pensamiento multiplicativo y, por otro lado, la influencia de los materiales y ayudas proporcionadas para la búsqueda asertiva de estrategias desligadas a un contenido matemático concreto. Solo hemos podido observar diferencias significativas en la gestión de las ayudas a los alumnos durante el proceso de resolución. Por ejemplo, los alumnos de tercero han necesitado más tiempo y más materiales manipulativos (multilink, dibujos, etc.) para poder llegar a resolver el problema. Este hecho quizás ha favorecido que al final sus producciones hayan evolucionado hasta llegar a ser más precisas y argumentadas que las de los alumnos de sexto. Aunque por otro lado, los alumnos de sexto han llegado más allá en la generalización de la solución del problema.

Finalmente, la evaluación de los alumnos por competencias supone un reto actual para los maestros. Esta evaluación competencial requiere el diseño de instrumentos de evaluación transparentes y compartidos, entre alumnos y maestros, que permitan dar cuenta de manera objetiva de los procesos activados y desarrollados por los alumnos en la actividad matemática generada en el aula. Consideramos que la rúbrica de evaluación no sólo ha sido útil en esta experimentación, sino que es un instrumento que permite a los maestros dar cuenta de los diferentes niveles de realización de la práctica matemática y de los niveles de adquisición de la misma.

Agradecimientos: Este trabajo se ha llevado a cabo en el contexto de los siguientes proyectos de investigación financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España: EDU2012-31464. "Análisis de entornos colaborativos de aula desde la perspectiva de su mediación en la construcción discursiva de conocimiento matemático" y EDU2011-23240. “Momentos clave en el aprendizaje de la geometría en un entorno colaborativo y tecnológico”.

Bibliografía

Badillo, E., Figueiras, L., Font, V., y Martínez, M. (2013). Visualización gráfica y análisis comparativo de la práctica matemática en el aula. *Enseñanza de las Ciencias*, 31 (3), 207-225.

Burgués, C., y Sarramona, J. (Coord.) (2013). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació primària*. Barcelona: Generalitat de Catalunya. Departament d'Educació. Direcció General d'Educació Infantil i Primària.

Castro, E., y Ruíz, J. F. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura multiplicativa. En Segovia, I. y Rico, L. (Coords.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria,* 99-122. Madrid: Ediciones Pirámide.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, 106, de 4 de mayo de 2006.

Maza, C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y la división*. Madrid: Editorial Síntesis.

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra, España.

Morera, L., Fortuny, J. M., y Planas, N. (2012). Momentos clave en el aprendizaje de isometrías en un entorno colaborativo y tecnológico. Enseñanza de las Ciencias, 30 (1), 143-154.

Morera, L., Chico, J., Badillo, E., y Planas, N. (2012). Problemas ricos en argumentación: reflexiones sobre el pensamiento del alumnado y la gestión del profesor, *SUMA*, 70, 9-20.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 17-24. Ankara, Turkey: PME.

Sanmartí, N. (2010). *Avaluar per aprendre. L'avaluació per millorar els aprenentatges de l'alumnat en el marc del currículum per competències*. Barcelona: Generalitat de Catalunya. Departament d'Educació. Direcció General de l'Educació Bàsica i el Batxillerat.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control,* 8, 338-353.

Mireia Artés Juvanteny. Univesitat Autònoma de Barcelona, Campus Bellaterra. Edifici G-5. Departamento de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals, 08193. Bellaterra (Barcelona)
Email: mireia.artes@e-campus.uab.cat

Edelmira Badillo Jiménez. Univesitat Autònoma de Barcelona, Campus Bellaterra. Edifici G-5. Departamento de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals, 08193. Bellaterra (Barcelona)
Email: edelmira.badillo@uab.cat

Itziar García-Honrado. Universidad de Oviedo. Departamento de Estadística e Investigación Operativa y Didáctica de la Matemática. Facultad de ciencias, Calle Calvo Sotelo, s/n. 33007. Oviedo.
Email: garciaitziar@uniovi.es

Laura Morera Úbeda. Univesitat Autònoma de Barcelona, Campus Bellaterra. Edifici G-5. Departamento de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals, 08193. Bellaterra (Barcelona)
Email: laura.morera@uab.cat

Montserrat Prat Moratonas. Univesitat Autònoma de Barcelona, Campus Bellaterra. Edifici G-5. Departamento de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals, 08193. Bellaterra (Barcelona)
Email: montserrat.prat @uab.cat