NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas

http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 91, marzo de 2016, páginas 135-145

GeoGebra en el principio de las cónicas (Elipse): Esferas de Dandelin

María Guadalupe Pérez Rivera (Universidad Autónoma de San Luis Potosí. México)

Resumen

El presente trabajo muestra un prototipo creado en GeoGebra para una comprobación visual y fácil de la definición de la elipse como lugar geométrico mediante el uso de esferas interiores tangentes al cono y al plano que lo interseca para generar la elipse; dichas esferas son llamadas esferas de Dandelin. Este prototipo forma parte de la investigación de tesis sobre la enseñanza de la definición de secciones cónicas mediante el uso de GeoGebra versus Realidad Aumentada (RA), sustentado bajo el marco teórico de las representaciones semióticas de Duval y la *definición del concepto* versus *imagen del concepto* de Tall y Vinner. Este prototipo puede ayudar en la práctica de docentes que imparten materias como geometría analítica.

Palabras clave

Secciones Cónicas; Esferas de Dandelin; Representaciones Semióticas; GeoGebra; Geometría analítica; Definición del concepto; Imagen del concepto.

Title

GeoGebra on the principle of conic (ellipse): Dandelin spheres.

Abstract

This paper shows a prototype created with GeoGebra for an easy visual demonstration of the ellipse defined as locus, using the inner spheres which are tangent to the cone and the plane that generates the ellipse. These spheres receive the name of Dandelin spheres. This prototype is part of my thesis on the teaching of the definition of conic sections using GeoGebra versus Augmented Reality (AR), sustained under the framework of Duval's semiotic representations and Tall and Vinner's *definition of concept* versus *image of concept* approach. This prototype can help teachers who teach subjects such as analytic geometry.

Keywords

Conic Sections; Spheres of Dandelin; Semiotics representations; GeoGebra; analytic geometry; Definition of the concept; Concept image.

1. Introducción

El aprendizaje de las matemáticas afronta la gran dificultad de la desarticulación entre conceptos y procedimientos, sobre todo en geometría analítica y muy particularmente en el tema de las secciones cónicas. En efecto, es difícil llegar a comprender el concepto de sección cónica como un lugar geométrico, pues regularmente solo se enuncia y se demuestra algebraicamente, al resultar más fácil comprender el algoritmo de las ecuaciones que la representan (Tall y Viner 1981; Azcárate y Camacho 2003; Santa y Jaramillo 2011).

Las secciones cónicas, que comprenden la elipse, la parábola y la hipérbola, en muchas ocasiones son estudiadas de manera superficial y solo se consideran los objetos físicos relacionados con las cónicas o un solo tipo de representación (o bien algebraica o bien geométrica como el corte de un cono y un plano), provocando que no se comprenda su definición conceptual sino que solamente se aprenda la imagen del concepto y se asimile como la definición del concepto.

Para Azcárate y Camacho (2003) en el conocimiento formal matemático o el nivel matemático avanzado (que se da a partir de los 15 años aproximadamente) las propiedades de los objetos se deben construir a partir de las definiciones de los conceptos. Pero muchos de estos conceptos no son aprendidos de la manera formal por los estudiantes sino que aprenden a reconocer el concepto a través de la experiencia. Por ello Tall y Vinner (1981) distinguen entre lo que llaman la *definición del concepto* y la *imagen del concepto*: la primera es la definición formal del concepto, aquello aceptado por la comunidad matemática, que puede ser aprendida por "rutina" o de manera significativa, ya sea muy relacionada con la definición formal o bien reconstruida y convertida en una definición personal; la segunda se utiliza cuando los estudiantes describen la estructura cognitiva asociada al concepto y esta es construida por la experiencia; para Tall y Vinner lo ideal es que la definición de concepto esté asociada a la imagen del concepto de tal manera que coexistan y los estudiantes utilicen y aprovechen ambas. En el caso de las secciones cónicas la imagen del concepto siempre está relacionado con la ecuación que las describe o bien con la figura geométrica relacionada o con el tipo de corte realizado por el plano en el cono, mientras que la definición del concepto en sí es la definición del lugar geométrico de las secciones.

Estas representaciones (definición del concepto e imagen del concepto) son parciales al tomarlas por separado, puesto que el concepto debe tener diferentes interacciones entre las diferentes representaciones del objeto.

La producción no puede realizarse sin la movilización de un sistema semiótico, es decir, de un conjunto de representaciones semióticas que pueden ser producciones discursivas (lenguaje formal) o no discursivas (figuras y gráficos). Sabemos que en el proceso de aprendizaje los estudiantes producen una asociación de la configuración identificada con las afirmaciones matemáticas (teoremas). Este vínculo es llamado anclaje y se puede dar de dos maneras: de lo discursivo a lo visual o de lo visual a lo discursivo (Duval, 1995, Guzmán, 1998). De manera semejante lo plantean Tall y Vinner (1981), pero la realidad es que a menudo los estudiantes no desarrollan la capacidad de realizar esta conversión entre lo discursivo y lo visual. El objetivo principal del prototipo propuesto es contribuir a que los alumnos sean capaces de complementar las imágenes del concepto con la definición formal y viceversa, es decir, de lo visual a lo discursivo y de lo discursivo a lo visual.

2. Secciones Cónicas

Las cónicas surgen al intersecar un cono recto con un plano. Este hecho era ya conocido por los matemáticos griegos, que iniciaron el estudio de las curvas que aparecían al seccionar un cono. Estas curvas se convirtieron después en la elipse, la hipérbola y la parábola, nombradas así por el matemático griego Apolonio.

Según Lehmann (1989) se denomina sección cónica (o simplemente cónica) a la curva intersecada de un cono con un plano que no pasa por su vértice. Se clasifican en tres tipos: elipses, parábolas e hipérbolas. Las secciones cónicas dependen del ángulo del plano que interseca el cono con respecto a su eje: si llamamos α al ángulo de conicidad y β al ángulo del plano con respecto al eje, entonces (ejemplo Figura 1):

- Si $\beta<\alpha$ se obtiene una hipérbola.
- Si $\beta=\alpha$ se obtiene una parábola.
- Si $\beta > \alpha\beta>\alpha$ se obtiene una elipse.

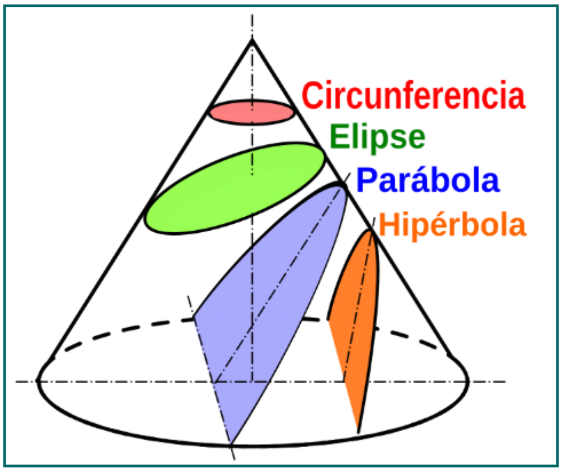

Figura 1. Cono y secciones. (Wikipedia, 2008)

De manera analítica están definidas como una ecuación cuadrática de dos variables (x,y):

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

2.1. La elipse

"La elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del eje plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos… Los dos puntos fijos se llaman focos de la elipse. La definición de una elipse excluye el caso en que el punto móvil esté sobre el segmento que une los focos…" (Lehmann, 1989:173).

2.2. Esferas de Dandelin

En el cono recto con el que se forman las secciones cónicas existen una o dos esferas inscritas en su interior, las cuales son simultáneamente tangentes al cono y al plano que lo interseca. Estas esferas son denominadas esferas de Dandelin o también esferas focales, ya que el punto en el que cada una de estas esferas toca el plano es un foco de la sección cónica (como se puede observar en la Figura 2); este método se utiliza con poca frecuencia para realizar las demostraciones del concepto de lugar geométrico de las sesiones cónicas y la localización de sus respectivos focos y directrices.

Un teorema que se puede demostrar con las esferas de Dandelin es que una sección cerrada (es decir, una elipse) es el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante. Esto ya era conocido por los antiguos matemáticos griegos como Apolonio de Perga, pero las esferas de Dandelin facilitan la prueba de dicho teorema. Este teorema no es más que la definición de la elipse como lugar geométrico. Una comprobación de la veracidad de este resultado será presentada más adelante.

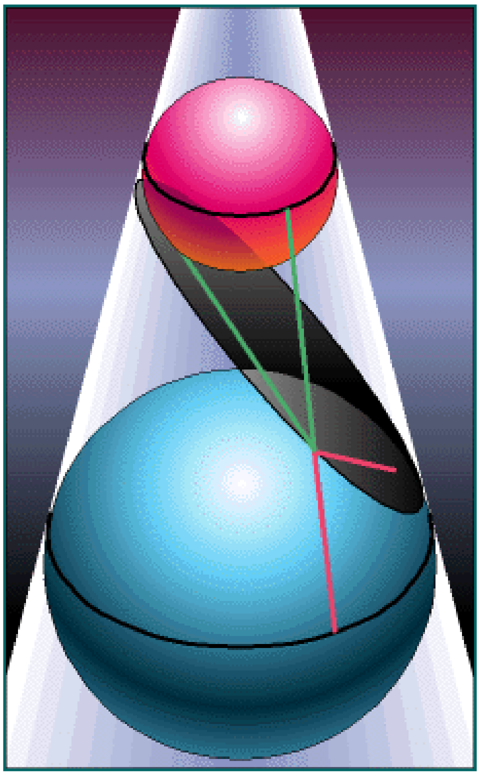

Figura 2. Esferas de Dandelin. (Wikipedia, 2014)

3. Prototipo

Al recrear las esferas de Dandelin en GeoGebra junto con los conos invertidos y el plano que lo interseca es muy importante tomar en cuenta que existen diversos parámetros de diferentes objetos que deben estar ligados entre sí, es decir, hay variables que deben ser dependientes de varios objetos a la vez. Esto se debe a las propiedades de las definiciones tanto de sección cónica como de las esferas de Dandelin y sus propiedades de tangencia a otros elementos de la construcción.

En algunos casos existen variables que deben ser representadas con deslizadores para que se pueda aprovechar al máximo la visualización en 3D que ofrece GeoGebra y se puedan ver diferentes elipses e inclusive manipulando un poco más se podría usar para la demostración de las demás cónicas.

La base de este prototipo es el cono doble y un plano que lo interseca. Para hacer el prototipo más dinámico se usaron dos deslizadores para el plano; uno para el ángulo que pueda tener con respecto al eje del cono y el otro para poder desplazar el plano verticalmente, para así tener diferentes elipses como se muestra en las Figura 3 y 4.

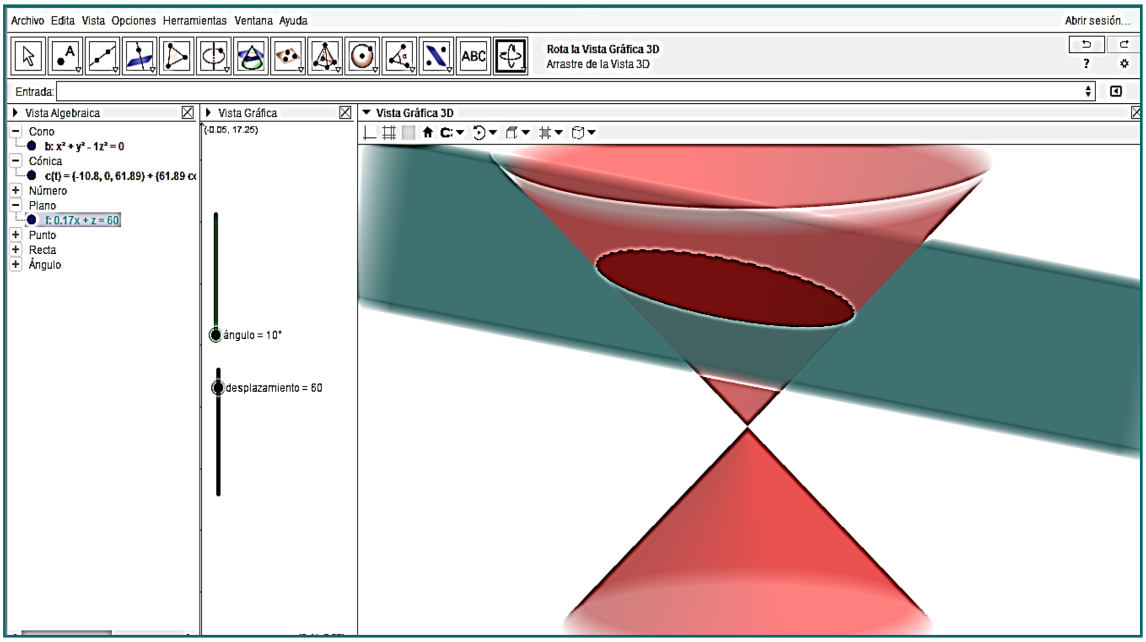

Figura 3. Intersección de cono y plano.

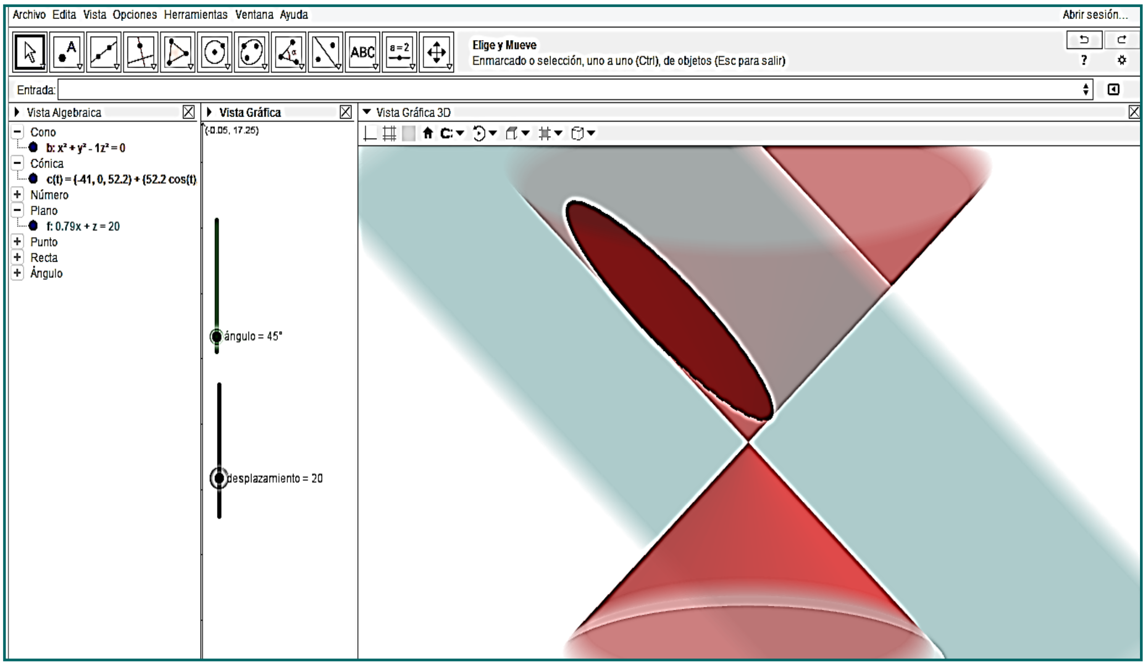

Figura 4. Intersección del plano.

Distintas posiciones del plano modifican la forma de la elipse, aumentando o disminuyendo su excentricidad. Para hacer las demostraciones con las esferas de Dandelin se deben construir cumpliendo con su definición, es decir, las esferas deben ser tangentes al cono y al plano.

Primero se realizó la esfera inferior al plano, y con la herramienta de intersección se marcó el punto donde se intersecan el plano y la esfera. Dicho punto se denotó con la letra M, como se muestra en la Figura 5.

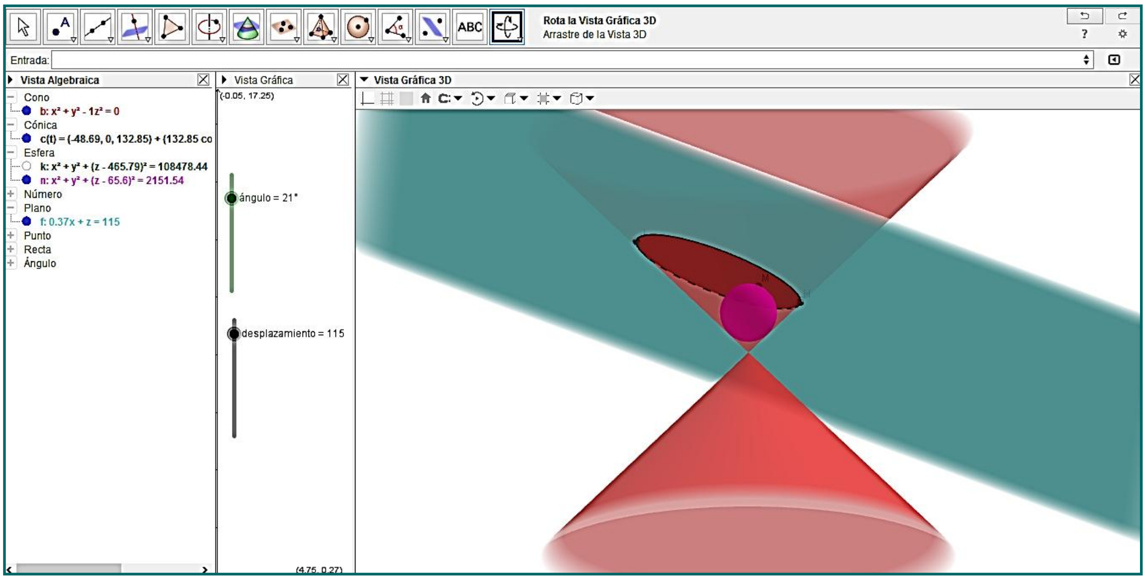

Figura 5. Esfera de Dandelin inferior.

Se prosiguió de igual manera con la esfera superior de color verde y el punto de intersección denotado con L (se encuentra en el círculo rojo para resaltarlo), como se muestra en la Figura 6.

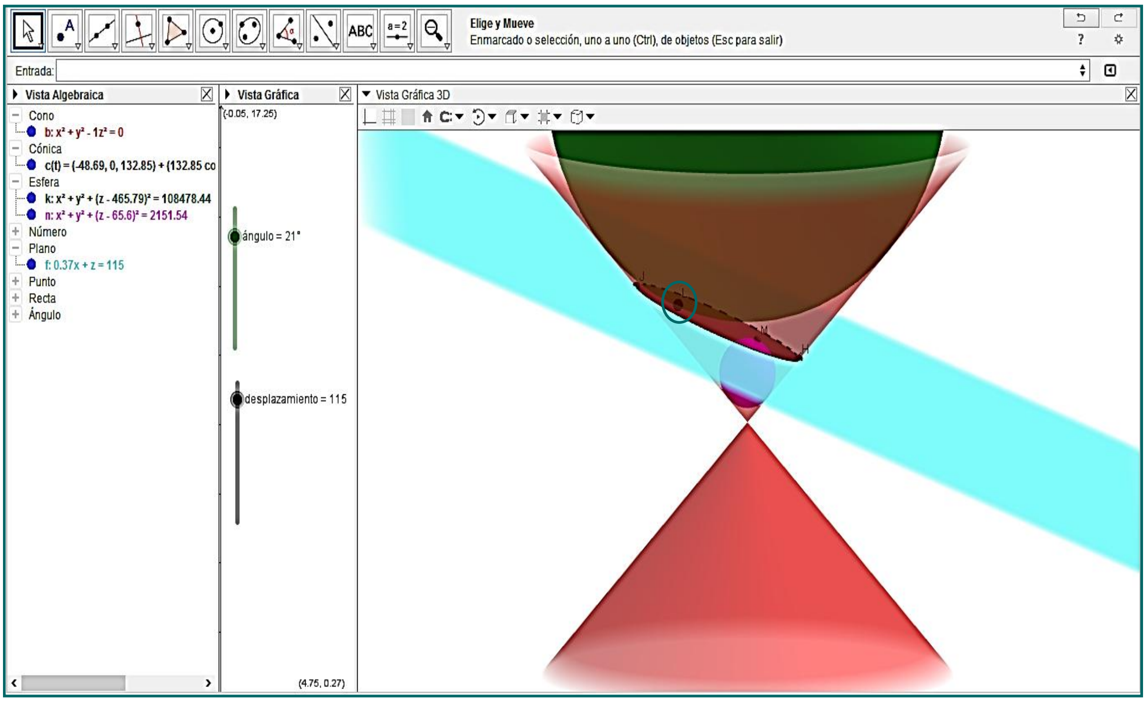

Figura 6. Esferas de Dandelin superior e inferior.

Para verificar que si se cumple con la definición de las esferas de Dandelin, se localizan los “verdaderos” focos de la elipse formada con la entrada “Foco[<cónica>]” y se selecciona la elipse obteniendo así los focos de esta (Figura 7). Nótese que en la ilustración no se alcanza a advertir la aparición de estos focos puesto que los puntos tangentes de las esferas con el plano coinciden con los focos de la elipse.

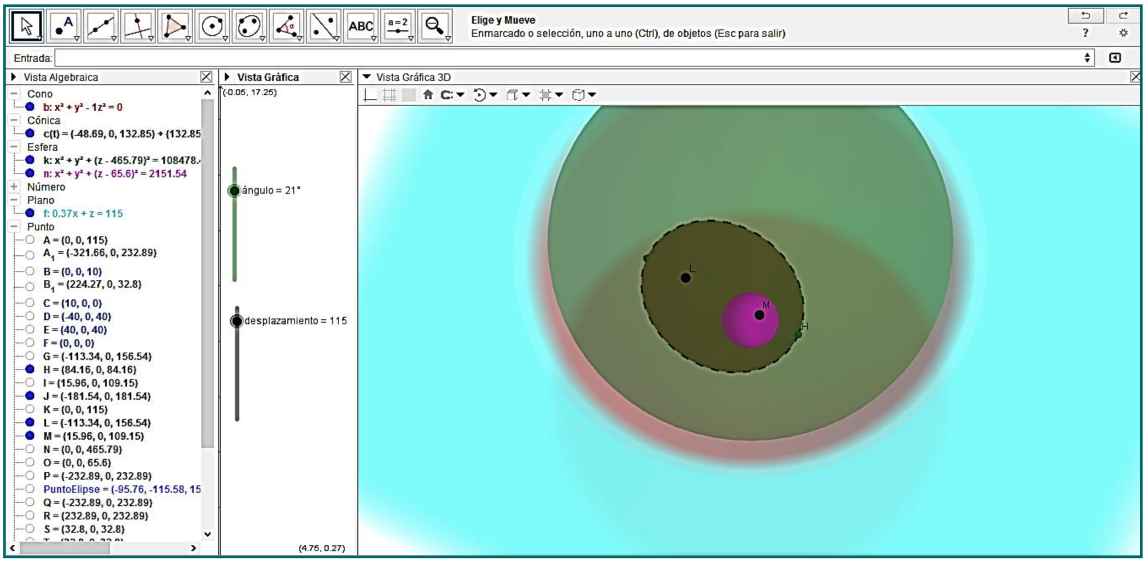

Figura 7. Focos de la elipse.

Teniendo ambas esferas y tras comprobar que los puntos de intersección coinciden con los focos de la esfera, verificamos que se cumple con el teorema de una sección cerrada como se mencionó anteriormente al definir las esferas de Dandelin.

Sobre esta construcción podemos comprobar ahora la definición de elipse como lugar geométrico: Se crea un punto que recorre la elipse formada, simplemente seleccionando el comando punto y haciendo clic sobre la elipse. Este punto se podrá mover por toda la elipse (dicho punto lleva el nombre o etiqueta de “PuntoElipse” que puede verse en la Figura 8), y a continuación se obtendrán las distancias del “PuntoElipse” a los focos M y L, cuyos valores se pueden ver en las Figuras 9 y 10 en la ventana algebraica (llamados “DisPuntoElipseAFocoL” y “DisPuntoElipseAFocoM). La definición de la elipse como lugar geométrico nos dice que la suma de dichas distancias siempre será constante y mayor a la distancia que existe entre los focos (llamada en la imagen “DistanciaFocos”).

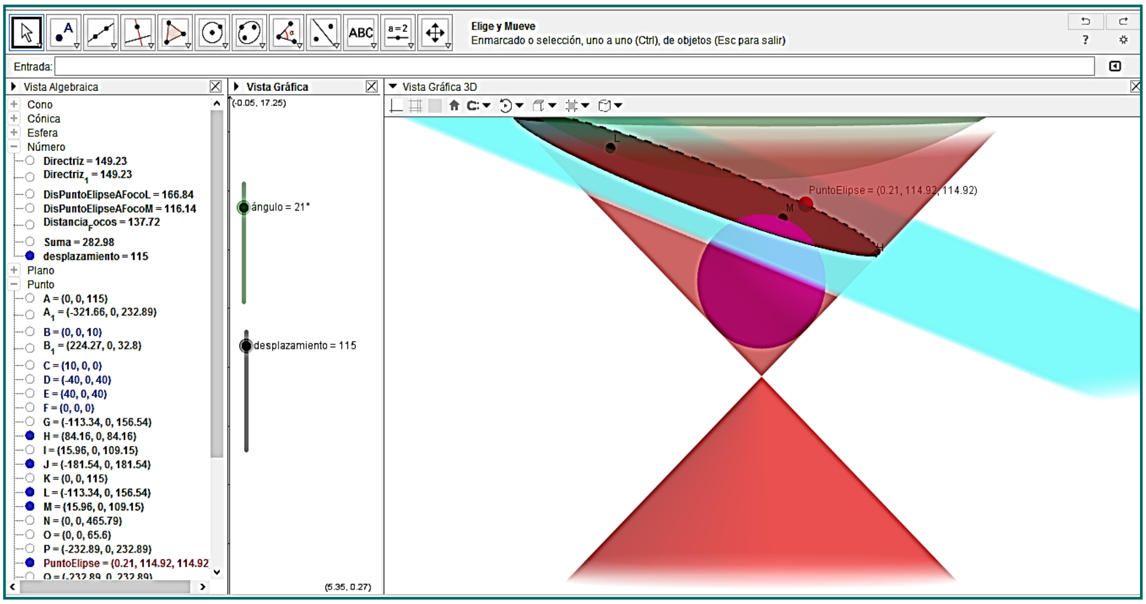

Figura 8. "PuntoElipse" denotado con rojo

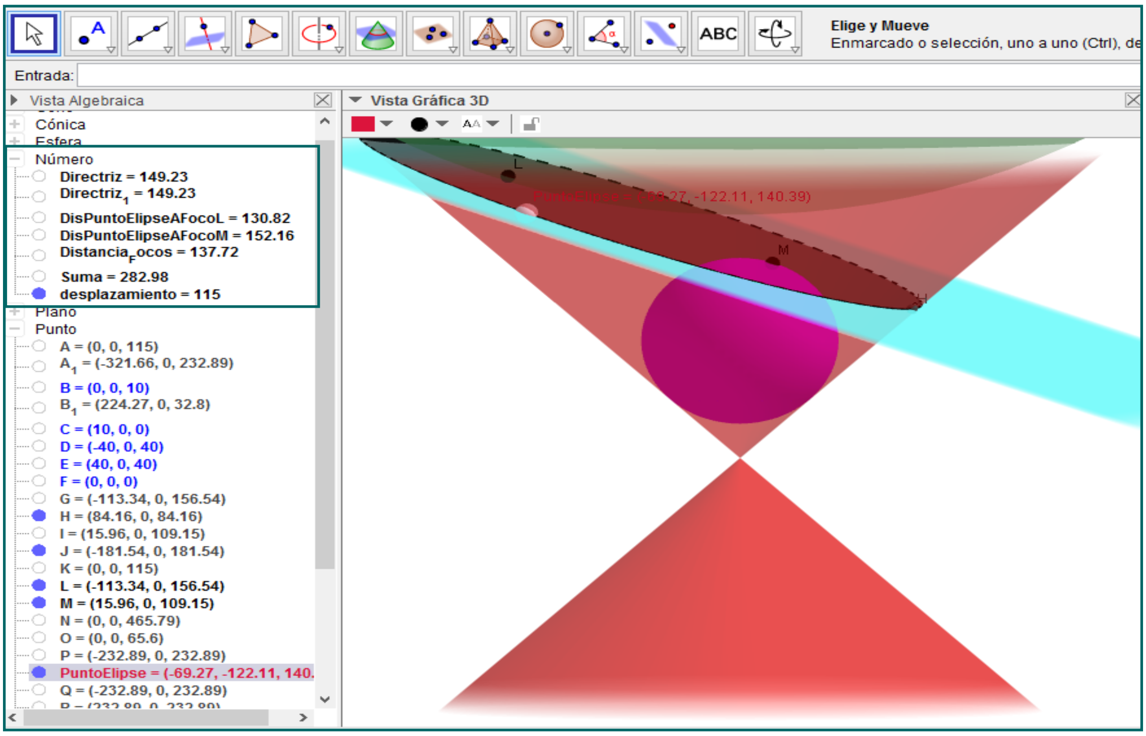

Figura 9. Distancia de los focos al punto en la elipse.

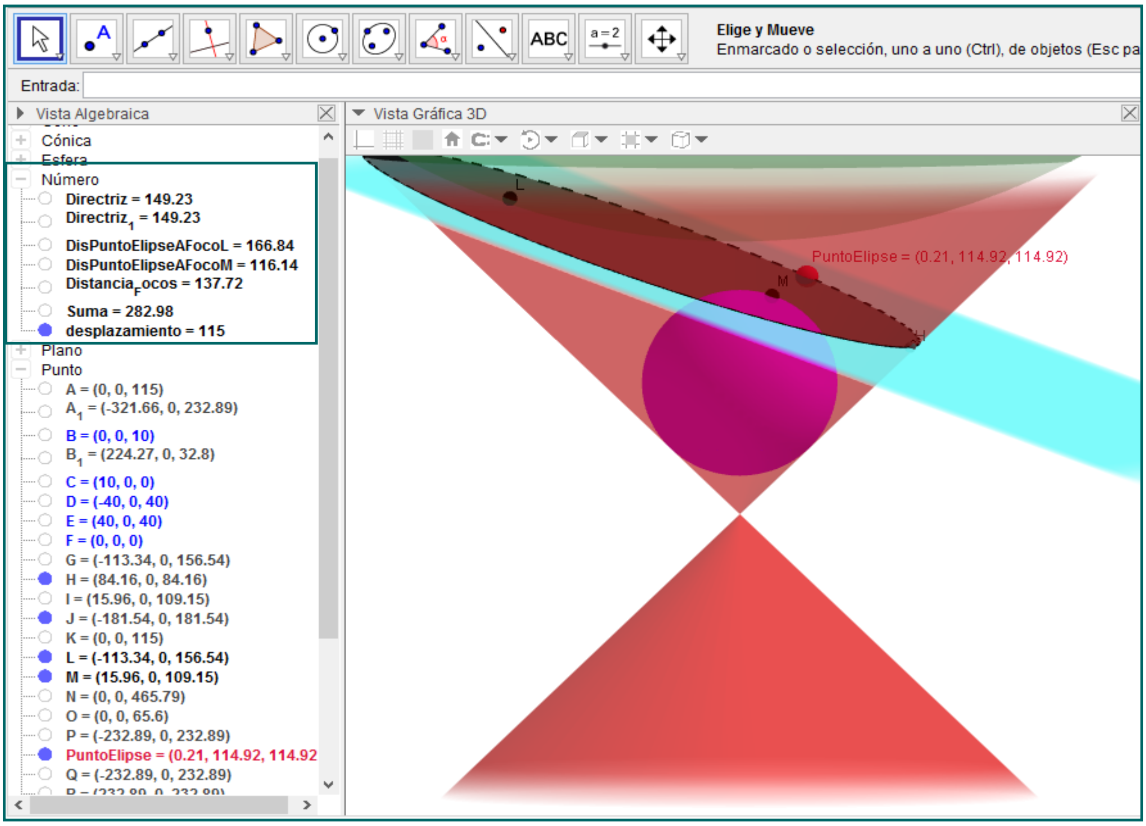

Figura 10. Distancia de los focos al punto en la elipse.

Como podemos observar en las Figuras 9 y 10, el "PuntoElipse" se encuentra en diferentes posiciones y la distancia de los focos con dicho punto son diferentes, mientras que la suma se mantiene constante, cumpliéndose así con la definición de elipse como lugar geométrico.

Este mismo prototipo nos permite encontrar las directrices de las elipses estudiadas, que se obtendrían intersecando el plano que contiene la elipse con cada uno de los dos planos que contienen respectivamente las circunferencias de intersección de las esferas de Dandelin con el cono. Basta para ello construir dos puntos sobre cada una de estas circunferencias, y el punto de intersección de la recta que los une con el plano de la elipse pertenecerá a una de las directrices (los puntos están denotados como Q y R para la esfera verde, U y S para la esfera rosa), como se observa en la Figura 11.

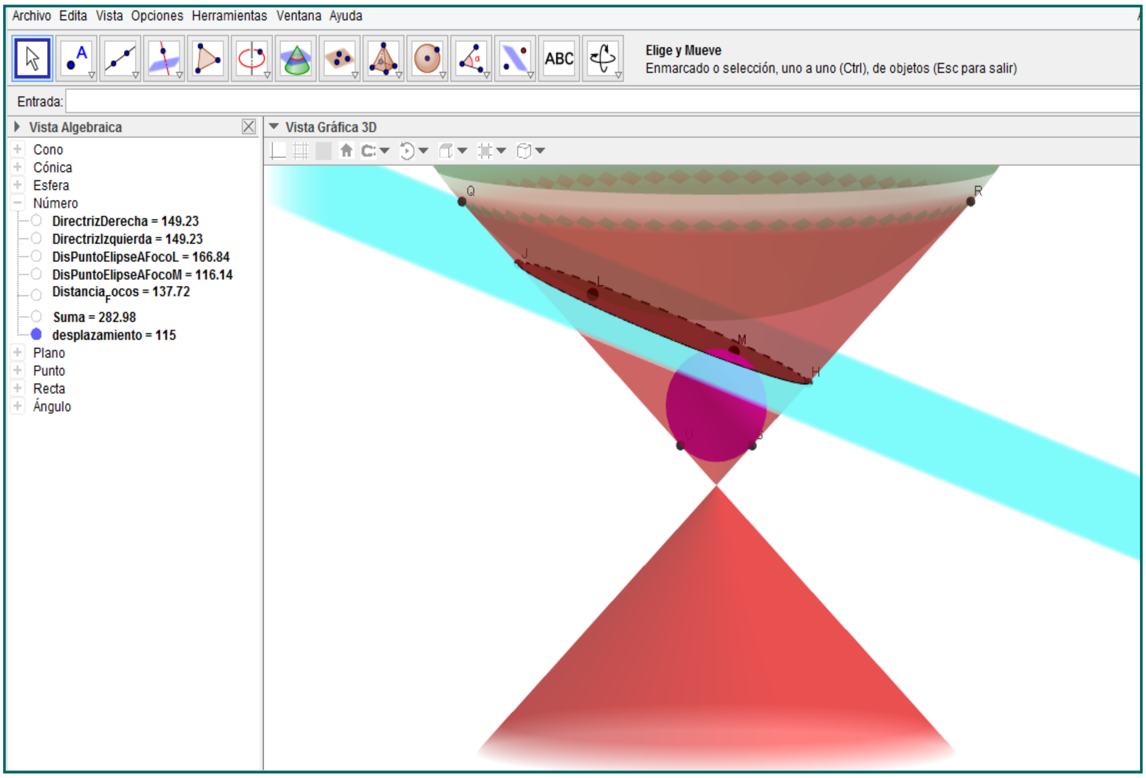

Figura 11. Puntos tangenciales de las esferas.

En la Figura 12 se han elegido los puntos Q, R, U y S de modo que los puntos de las directrices obtenidos se encuentran en el eje mayor de la elipse, permitiendo mostrar el valor de la distancia que hay entre la elipse y cada directriz, como se muestra en la Figura 12.

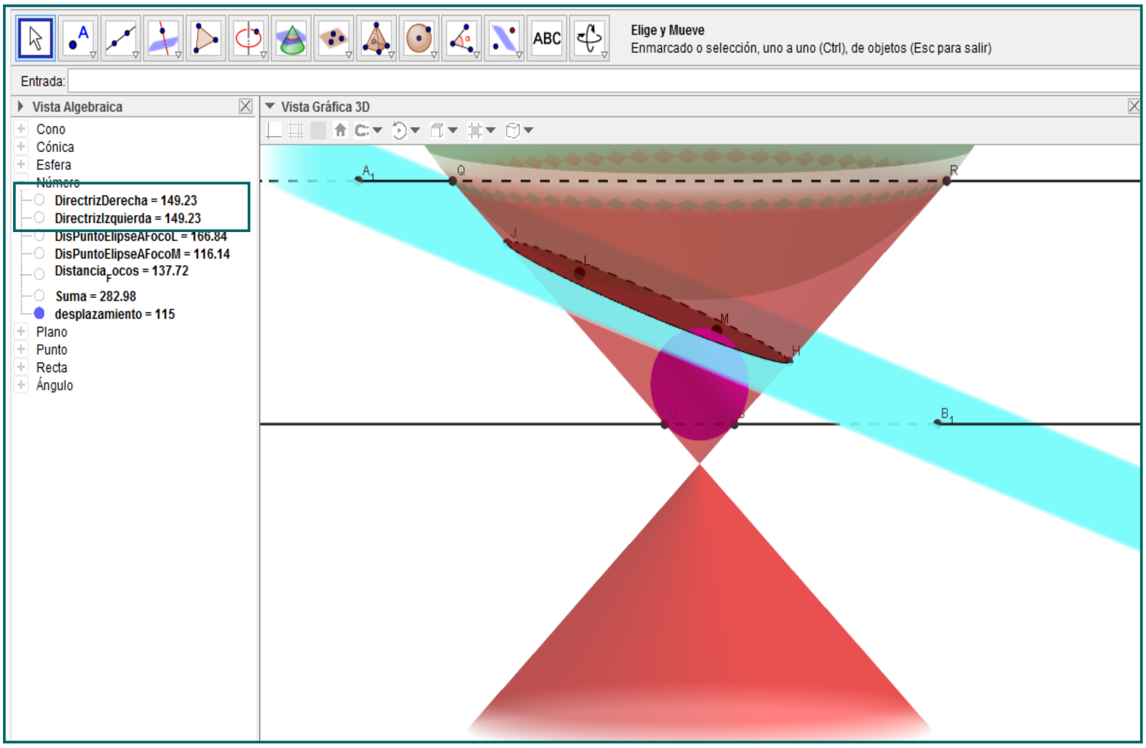

Figura 12. Los puntos A_1 y B_1 están sobre las directrices de la elipse.

4. Conclusiones

La utilización de este prototipo tiene varias utilidades y ofrece, en el momento de interactuar directamente con él, una gran ayuda para comprender y poder explicar o enseñar conceptos relacionados con las secciones cónicas. Permite además trabajar con diferentes elipses en el momento y no tener que dibujar una y otra vez diversas configuraciones sobre el pizarrón, al tratarse de un prototipo dinámico donde se pueden ajustar los ángulos y la amplitud de la elipse. Modelos similares podrían utilizarse también para las demostraciones de la parábola y la hipérbola.

Esta es una de las muchas formas que pueden existir para abordar el contenido matemático con apoyo de la tecnología, ayudando al docente en su práctica y facilitando la comprensión de los estudiantes. Con este tipo de demostración se pretende que los estudiantes aprendan el concepto o la definición de sección cónica y no sólo se queden con la imagen del corte del plano con el cono que las forma.

Este prototipo aún no ha sido puesto en práctica en el aula, pero se piensa implementar durante el ciclo escolar 2015-2016 en un bachillerato tecnológico. La construcción utilizada en este artículo está disponible en el siguiente link:

http://tube.geogebra.org/student/m1284705.

Bibliografía

Azcárate , C., & Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana* [en línea], *10*(2), 135-149. Recuperado el 15 de Mayo de 2015, de ftp://ftp.math.ethz.ch/EMIS/journals/BAMV/conten/vol10/matias-carmen.pdf

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Peter Lang. Suisse.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa [en línea]*, 1(1) 5-21. Recuperado el 15 de Mayo de 2015, de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33510102

Lehmann, C. (1989). Geometría Analítica. España: Limusa.

Santa, Z. & Jaramillo, C. (2011). Comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico. En XIII CIAEM-IACME [en línea]. Comité Interamericano de Educación Matemática: Brasil. Recuperado el 20 de Mayo de 2015, de http://www.lematec.net/CDS/XIIICIAEM/artigos/2279.pdf

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics* [en línea], 12(2), 151-169. Recuperado el 20 de Mayo de 2015, de http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1981a-concept-image.pdf

Wikipedia (2008) Cono y secciones [Imagen]. Recuperado el 20 de Mayo de 2015, de http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cono_y_secciones.svg

Wikipedia (2014) Esferas de Dandelin [imagen]. Recuperado el 20 de Mayo de 2015, de http://commons.wikimedia.org/wiki/File:DandelinSpheres.png

María Guadalupe Pérez Rivera. Estudiante de la Licenciatura de Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí (San Luis Potosí, México).
E-mail: mariagperez2010@gmail.com

M U N D O G E O G E B R A