

Mapas competenciales del contenido matemático curricular y de una situación de aprendizaje matemático

Martín M. Socas Robayna
Raquel M.^a Ruano Barrera
Josefa Hernández Domínguez
(Universidad de La Laguna. España)

Con reconocimiento y afecto al profesor Luis Rico en su jubilación

Resumen

En este trabajo se considera el modelo de Competencia Matemática Formal (CMF), componente básico del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas, 2010 y 2012), como un recurso técnico que permite al profesor de Matemáticas elaborar Mapas Competenciales del contenido matemático curricular o de situaciones de aprendizaje matemático, elementos esenciales para la organización curricular en Matemáticas, desde la perspectiva competencial.

Se desarrollan dos ejemplos de Mapas Competenciales, uno relativo a un contenido matemático de Secundaria obligatoria (Fracciones y Decimales), y otro, sobre una situación de aprendizaje matemático, en formato de problema verbal, y de estructura numérica-algebraica en un entorno geométrico, que involucra diferentes procesos matemáticos.

Palabras clave

Competencia Matemática Formal (CMF), Mapa Competencial, Análisis del contenido, Organización curricular, Educación obligatoria, Formación del profesorado.

Title

Competence maps of curricular mathematical content and a mathematical learning situation

Abstract

This paper considers the model of Formal Mathematics Competence (FMC), a basic component of the Semiotic Logical Approach (SLA) (Socas, 2010 and 2012), as a technical resource that allows teachers to develop mathematical competence maps of curricular mathematical content or mathematical learning situations, which are essential elements for curricular organization in Mathematics from the competence perspective.

Two examples of competence maps are developed, one on a mathematical content (fractions and decimals), and another, on a mathematical learning situation, in the format of a verbal problem, and with a numerical-algebraic structure in a geometrical environment involving different mathematical processes.

Keywords

Formal Mathematics Competence (FMC), Competence Map, content analysis, curricular organization, compulsory education, teacher training.



1. Introducción

La Competencia Matemática Formal (CMF) ha sido desarrollada en Socas (2010 y 2012) a partir de la organización de los objetos de las Matemáticas en los campos conceptuales numérico, algebraico y analítico, considerando, además, los diferentes estadios de desarrollo de estos objetos en los citados campos. Constituye una componente esencial del marco conceptual denominado: Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas 2001 y 2007), propuesta teórica-práctica (formal-experimental) que aporta instrumentos para el análisis, la descripción y la gestión de las situaciones problemáticas o fenómenos de naturaleza didáctica matemática, que ocurren en el Microsistema Educativo desde una perspectiva centrada en la Semiótica, en la Lógica y en los Modelos de Competencias (Semiosis).

En este trabajo se considera el modelo CMF, como una organización fenomenológica del contenido matemático curricular en relación con las operaciones, las estructuras y los procesos, que podemos relacionar con el contexto del mismo, en términos de situaciones de aprendizaje, representaciones y razonamientos implicados. De ambos, contenido y contexto, surgen los diferentes aspectos que debemos considerar de la Competencia Matemática. Por ello, se propone su uso como un recurso técnico de naturaleza profesional, que facilita al profesor de Matemáticas elaborar Mapas Competenciales del contenido matemático curricular o de situaciones de aprendizaje matemático, elementos esenciales para la organización curricular en Matemáticas, desde la perspectiva competencial.

El documento se desarrolla en los siguientes apartados: Breve descripción del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS); La Competencia Matemática Formal (CMF); Ejemplos de Mapa competencial de un contenido matemático curricular y de una situación de aprendizaje; y Consideraciones finales sobre la organización del contenido matemático para la enseñanza a partir de un contenido curricular o de una situación de aprendizaje, así como su relación con las diversas componentes de la competencia matemática.

2. Breve descripción del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS)

La Competencia Matemática Formal (CMF), componente del marco conceptual ELOS (Socas 2001 y 2007), se desarrolla tomando como referencia la Cultura Matemática, considerada como un proceso de producción de este conocimiento denominado “culturización matemática”. En la producción del conocimiento matemático se distinguen y analizan, de una parte, tres aspectos esenciales que caracterizan la producción de este conocimiento: el Epistemológico, considerado desde la perspectiva de los objetos y de los métodos de las diferentes formas de esta Cultura; el Semiótico, que supone la denotación de los objetos matemáticos a través de las representaciones en las que el lenguaje natural y las representaciones analógicas, digitales y virtuales, desempeñan un papel relevante en la significación y funcionalidad de los objetos matemáticos; y el Fenomenológico, como lo que puede percibirse en una situación problemática de los objetos, los métodos y las representaciones matemáticas, y de otra, los diferentes estadios de desarrollo de los objetos matemáticos que denomina: Semiótico, Estructural y Autónomo (Socas 2010 y 2012).

Las múltiples formas de la cultura matemática, organizadas desde las perspectivas anteriores, que engloban tanto la naturaleza de sus objetos y sus métodos, como la significación y funcionalidad de éstos a través de sus representaciones (Semiótica), así como las diferentes situaciones problemáticas en las que están implicados estos objetos, sus métodos y sus representaciones, se estudian en ELOS, bajo la denominación de Campos Conceptuales, y se consideran, especialmente, el numérico, el algebraico y el analítico.

Se sitúa en el Sistema Educativo y describe el Microsistema Educativo, como el ámbito en el que tienen lugar las enseñanzas regladas del conocimiento matemático. En éste se dan tres relaciones esenciales, entre la Matemática y el alumno, entre la Matemática y el profesor y entre la Matemática y el profesor a través del alumno, que denomina, respectivamente: “Aprendizaje de la Matemática escolar como cambio conceptual”, “Adaptación del contenido matemático curricular en materia para enseñar” e “Interacciones”.

Estas relaciones tienen lugar en un contexto determinado, en este caso, caracterizado por las tres componentes: Social, Cultural e Institucional.

De esta forma, los tres referentes y las tres relaciones esenciales, contextualizadas en las componentes del contexto, determinan para ELOS, la naturaleza y los fenómenos que se dan en el proceso de enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas en los sistemas reglados.

Aborda, mediante estos modelos de competencia, uno de los problemas esenciales de la Educación Matemática, el conocimiento sobre las dificultades, obstáculos y errores de los alumnos en el aprendizaje de las Matemáticas, y el hecho de que éstos no se deben al azar, y tienen procedencias diversas (Rico, 1995, Socas, 1997). Se identifican cinco orígenes diferentes de las dificultades que tienen los alumnos en la construcción del conocimiento matemático que están relacionadas con: *la complejidad de los objetos de las Matemáticas, las especificidades de los procesos de pensamiento matemático, los procedimientos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas, los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, y las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.* (Socas, 1997).

Para el estudio del problema didáctico: “dificultades, obstáculos y errores de los alumnos en el aprendizaje de las Matemáticas escolares”, ELOS toma en consideración y estudia los cinco ámbitos anteriores en los que emergen las dificultades y obstáculos de los alumnos en el aprendizaje de las Matemáticas, en especial, en los campos numérico, algebraico y analítico.

Con este fin, ELOS organiza tres modelos de competencia (semiosis): Competencia Matemática Formal (CMF), Competencia Cognitiva (CC) y Competencia de Enseñanza (CE), que conforman los referentes que describe la Semiosis General que planifica y gestiona la investigación en el microsistema educativo. Esquemáticamente:



Figura 1. Modelos de competencia en ELOS

En resumen, ELOS planifica y gestiona la investigación de los problemas didáctico-matemáticos que se dan en el microsistema educativo mediante el uso de la semiosis general anterior



(Figura 1), que se describe mediante los tres Modelos: Competencia Matemática Formal (CMF), Competencia Cognitiva (MCC) y Competencia de Enseñanza (MCE) y las tres relaciones didácticas esenciales de toda semiosis, contextualizadas en el microsistema educativo, que tienen como puntos de referencia las tres componentes: Social, Cultural e Institucional.

En este trabajo, tomamos en consideración la organización del modelo CMF, que está relacionado con la complejidad de los objetos de las Matemáticas y con las especificidades de los procesos de pensamiento matemático, y es considerada como una de las componentes que caracteriza el Análisis del Contenido Matemático.

3. La Competencia Matemática Formal (CMF)

El estudio de la complejidad de los objetos matemáticos y las especificidades de los procesos de pensamiento en Matemáticas, requiere, como hemos indicado con anterioridad, tomar en consideración la Cultura Matemática y analizarla como un proceso de “culturización”, es decir, de producción del conocimiento en esta Cultura. Debemos, en consecuencia, distinguir y analizar los tres aspectos esenciales que caracterizan la producción de este conocimiento: el Epistemológico, el Semiótico y el Fenomenológico.

El análisis de la naturaleza de los objetos de la Matemática, nos conduce inevitablemente a tomar en consideración su relación con los sistemas de signos de la Matemática, es decir, hay necesidad de relacionar, necesariamente, los aspectos epistemológicos con los semióticos del objeto matemático. De esta manera, observamos tres elementos esenciales que caracterizan la Matemática y que deben ser tenidos en cuenta en su enseñanza/aprendizaje:

- La Matemática es un sistema conceptual lógicamente organizado (campos conceptuales) y socialmente compartido. Esta organización lógica de los conceptos, propiedades, teoremas,...., explica un gran número de dificultades y obstáculos en el aprendizaje.

- La Matemática es una actividad de resolución de problemas, socialmente compartida. Estos problemas pueden tener relación con el mundo natural o social o ser problemas internos de la propia disciplina. La respuesta a estos dos tipos de problemas explica la evolución y desarrollo progresivo de los objetos matemáticos (conceptos, teorías...). La actividad de resolución de problemas es un proceso cognitivo complejo que ocasiona dificultades en el aprendizaje de la Matemática.

- La Matemática es un lenguaje simbólico característico y constituye un sistema de signos propios en el que se expresan los objetos matemáticos, los problemas y las soluciones encontradas. Como todo lenguaje, tiene funciones básicas y reglas de funcionamiento que dificultan el aprendizaje.

En resumen, la naturaleza de los objetos matemáticos y los sistemas de signos matemáticos, constituyen, junto con la actividad de resolución de problemas, tres aspectos esenciales del proceso de culturización matemática que deben ser tenidos en cuenta en el proceso de matematización de la cultura, es decir, en el proceso de enseñanza/aprendizaje de la misma en los sistemas escolares. Esta perspectiva de la Matemática obliga, desde el punto de vista del aprendizaje, a considerar de manera general, la naturaleza de los entes matemáticos, diferenciando el “objeto” y las formas de “representarlo”.

Con la finalidad de concretar los aspectos anteriores de la Cultura Matemática y hacerlos funcionales en el Sistema Educativo, en ELOS, a partir de las consideraciones anteriores, se adopta la siguiente visión de la Matemática:

- La Matemática es una disciplina Multiforme y Multirepresentacional, que emerge y se desarrolla como una Actividad Humana de Resolución de Problemas.

- Los Problemas tienen una característica común: “la búsqueda de regularidades o patrones” y el problema matemático por excelencia es “la modelización”.

- La Cultura Matemática crea un Sistema de Signos propios para expresar los comportamientos regulares o patrones y este conjunto de regularidades o patrones se organiza en “campos conceptuales”. Los elementos de estos campos conceptuales son los “objetos matemáticos”.

- Los objetos matemáticos se “encarnan”, es decir, se hacen observables y ostensibles, mediante el sistema de signos.

- Las relaciones entre los objetos del campo conceptual, los signos que los representan y sus significados en la disciplina Matemática se expresan mediante la Semiosis: Signo, Objeto y Significado, descrita de la siguiente manera:



Figura 2. Relación entre objeto, signo y significado

Esta relación triádica es considerada como el Modelo de Competencia, que describe la Fenomenología, asociada a los objetos matemáticos en relación con los signos y los significados.

Esta caracterización de la Representación Semiótica tiene como punto de partida la posición de Peirce (1987), en la que el signo se presenta como una relación triádica entre un Representamen, su Objeto y el Interpretante.

Desarrollamos ahora la Competencia Matemática Formal (CMF), para los tres campos conceptuales: Números, Álgebra y Análisis, a partir de la naturaleza de los objetos matemáticos y su relación con los sistemas de signos, mediante una organización fenomenológica (Socas, 2001 y 2007).

La caracterización de estos campos conceptuales supone, de una parte, organizar la complejidad de sus objetos y, de otra, tomar en consideración los diferentes procesos en los que están presentes.

La modelización de los diferentes aspectos de los Números, Álgebra y Análisis: conceptual, semiótico y fenomenológico, nos permite establecer la Competencia Matemática Formal (CMF), y como ésta se puede expresar como un modelo de competencia organizado en relación con los tres elementos: campo conceptual, resolución de problemas y lenguaje propio, descritos anteriormente como factores que caracterizan a la disciplina matemática.



De esta manera, se caracteriza la Competencia Matemática Formal (CMF) para los campos anteriores, mediante la semiosis que tiene como referentes las tres componentes del campo conceptual: operaciones, estructuras y procesos y, como contexto, las situaciones problemáticas, las representaciones (lenguaje) y los argumentos. De forma esquemática:

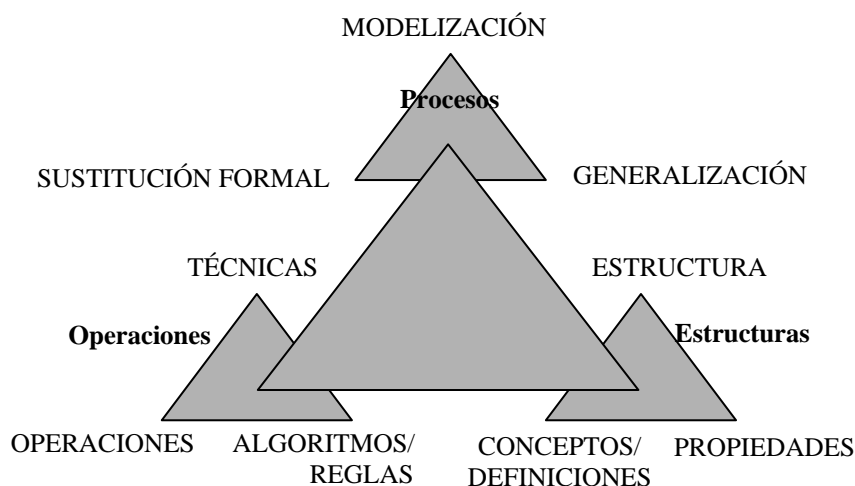


Figura 3. Modelo de Organización del Campo Conceptual

En este esquema (Figura 3) se expresan los diferentes dominios de la actividad matemática, en relación con el campo conceptual considerado, desde la perspectiva formal, así como sus diferentes relaciones. Cada relación triangular es considerada como una Semiosis en la que se dan, necesariamente, las tres relaciones descritas anteriormente.

De manera concreta, si analizamos una actividad relacionada con los Números o el Álgebra, ésta puede describirse teniendo en cuenta las tres componentes: operaciones, estructuras y procesos, y sus relaciones. Cada componente, a su vez, está determinada por otras tres que describen una nueva semiosis. La componente “Operaciones” queda determinada por: operaciones, algoritmos (reglas) y técnicas; la componente “Estructuras” por: conceptos (definiciones), propiedades y estructura; y la componente “Procesos” por: sustitución formal, generalización y modelización.

A modo de ejemplo, describimos brevemente el referente “Procesos” del campo conceptual, determinado por la Semiosis: Sustitución Formal, Generalización y Modelización.

De las diferentes Semiosis que determinan la propuesta fenomenológica de los procesos, observamos que éstos están necesariamente relacionados con las operaciones, independientemente o a través de las estructuras.

La Sustitución Formal está caracterizada por la conversión entre representaciones de un mismo objeto matemático, y por registros diferentes, en una misma representación, de un mismo objeto matemático.

En general, en una sustitución formal, las reglas operacionales específicas (relación entre cantidades) ya vienen explicitadas con cantidades variables con propiedad sustitutoria, es decir, la representación o el registro del objeto matemático, es explícita. Supone, sin embargo, la realización de diferentes acciones: reconocimiento de la representación, conversión entre representaciones o entre

registros, transformaciones entre representaciones o registros que generan la simplificación o la complicación estructural...

La Generalización algebraica la podemos describir, desde el punto de vista fenomenológico, por sus elementos básicos, como un proceso esencial de este campo conceptual (algebraico), relacionado necesariamente con el proceso de Sustitución Formal, sin el cual es imposible comprender la Generalización y ésta se relaciona también, necesariamente, con el referente Operacional, es decir, las diferentes semiosis que describen fenomenológicamente la generalización algebraica, determinan que el recorrido mínimo es: Generalización-Sustitución formal- Operaciones.

Desde el punto de vista educativo, el planteamiento de una situación problemática, que involucre el proceso de Generalización algebraica, se puede organizar a partir de situaciones diversas: numéricas, geométricas..., en las que la regla no viene explicitada, pero sí la descripción organizada de un comportamiento regular.

A partir de la Situación problemática que supone su identificación o el reconocimiento, se puede describir mediante cuatro pasos o momentos que facilitan el planteamiento y la resolución y que la caracteriza matemáticamente: (1) Sistematización, mediante la construcción de tablas u otros tipos de representación; (2) Reconocimiento de la Regla o Patrón; (3) Explicitación de la regla en una expresión o fórmula; (4) Verificación de la expresión o fórmula mediante ejemplos.

Este proceso de establecer una relación entre letras y números, por ejemplo, debe ser desarrollado desde su doble vertiente, que explicita la reversibilidad del objeto: pasar de lo particular (partes) a lo general (todo) y ver lo general (todo) en lo particular (partes) (Ruano, Socas y Palarea, 2014a).

El tercer proceso, la Modelización, proceso matemático por excelencia, la podemos caracterizar por sus elementos básicos (objetos matemáticos) y por las relaciones que estos tienen entre sí.

Desde el punto de vista educativo, el planteamiento de una situación problemática que involucre el proceso de Modelización, se puede organizar a partir de situaciones diversas: físicas, económicas, numéricas, algebraicas, analíticas, geométricas..., en las que se parte de una descripción no organizada de un comportamiento regular en la que no está explicitada la regla.

A partir de una Situación problemática o de la formulación de una tarea, que supone su identificación o reconocimiento, se puede describir mediante cinco fases, que facilitan el planteamiento y la resolución y que caracteriza matemáticamente la Modelización: (1) Sistematización, explicitación y reconocimiento de la regla; (2) Matematización o formulación en términos de la regla; (3) Resolución en términos de la regla, mediante la representación elegida, lo que comporta el Análisis del modelo construido; (4) Validación (verificación) de la regla; y (5) Interpretación (Ruano, Socas y Palarea, 2014b).

En resumen, la caracterización de los Procesos, desde la Disciplina Matemática, se realiza al considerar los aspectos epistemológicos, semióticos y fenomenológicos de los objetos matemáticos, es decir, al describir los procesos en el campo conceptual y en el contexto, así como al determinar las relaciones existentes.

Estos procesos esenciales de la actividad matemática ocurren, como hemos señalado, en un contexto determinado por la Situación Problemática que el resolutor debe identificar, plantear y resolver; por las Representaciones que requieren su reconocimiento, su transformación y su



conversión (elaboración); y por las Argumentaciones que implican descripción, justificación y razonamientos.

Observamos que los diferentes procesos matemáticos requieren por parte de los resolutores, el uso de determinadas competencias como el reconocimiento, la formulación y la validación del proceso, y que éstas, necesitan el análisis de las situaciones problemáticas, la sistematización, la manipulación, la interpretación, la verificación.... Todas ellas son acciones cognitivas implícitas, como hemos observado en estos procesos.

También hemos constatado de la Semiosis que describe los tres procesos, que la Sustitución Formal, es el único proceso que está presente siempre en cualquier situación problemática, y, en consecuencia, en los procesos de Generalización y Modelización.

La Modelización y la Generalización son procedimientos básicos en la producción del conocimiento en general. En el caso de la Matemática, estos dos procedimientos, junto con la Sustitución Formal, determinan los tres procesos fundamentales que se dan en las diferentes formas de la cultura matemática: numérica, algebraica, analítica, geométrica...

Mención especial requiere la conocida dualidad: procedimental/conceptual, de los objetos de un campo conceptual en Matemática que deriva de esta organización. En esta propuesta del campo conceptual se caracteriza lo operacional, por la semiosis que describe el significado procedimental; las estructuras, por la semiosis que describe el significado conceptual; y los procesos como el tercer referente de la semiosis que describe las relaciones que tienen lugar entre el significado procedimental y conceptual. No en vano, debemos recordar que la Sustitución Formal emerge como el proceso que está siempre presente en la actividad matemática.

La organización fenomenológica de los Campos Conceptuales numérico y algebraico tienen sentido en la actividad matemática cuando los objetos implícitos en la actividad están contextualizados; los referentes de esta contextualización son: las situaciones problemáticas, las representaciones (lenguajes) y los argumentos (razonamientos), que están implicados en el desarrollo de la situación problemática. De forma esquemática:



Figura 4. Contexto del Campo Conceptual

Análogamente, en esta figura 4 se expresan las tres componentes del contexto determinadas por sus respectivas semiosis. Las Situaciones problemáticas por la identificación, el planteamiento y la resolución; las Representaciones (lenguaje) por el reconocimiento, la transformación y la elaboración (conversión), y los Argumentos, por la descripción, la justificación y los razonamientos.

En resumen, la Organización y el Contexto del Campo Conceptual determinan el Modelo de Competencia Matemática Formal (CMF).

4. Mapa de un contenido matemático curricular desde el punto de vista competencial

A modo de ejemplo, en este apartado analizamos el uso de la Competencia Matemática Formal (CMF) como un instrumento técnico para la organización curricular en Matemáticas, que facilita el análisis del Contenido Matemático y su organización en contenido matemático para enseñar desde el punto de vista competencial.

En la descripción de La Competencia Matemática Formal (CMF), ésta consta de dos partes, una relativa al campo conceptual, y otra al contexto en el que se involucran y se desarrollan los objetos de este campo conceptual. Llamaremos mapa de un contenido curricular desde la perspectiva competencial, a la distribución de estos contenidos en los diferentes apartados en los que se organiza el campo conceptual, en primer lugar, y a la concreción del contexto en el que intervienen estos contenidos, en segundo lugar. Es decir, la organización fenomenológica de los objetos que queremos tratar y la especificación del contexto en el que se van a desarrollar, es lo que se denomina “Mapa Competencial de los Contenidos Curriculares, en este caso, se tratan objetos matemáticos relacionados con las “Fracciones y los números decimales”, en el primer curso de la ESO y que están enunciados en el currículo de la siguiente manera:

Fracciones y números decimales en entornos cotidianos. Diferentes significados y usos de las fracciones. Fracciones equivalentes. Operaciones con fracciones: suma, resta, producto y cociente. Fracción generatriz de un número decimal. Ordenación de fracciones y de números decimales.

En relación con el Campo Conceptual, analizamos los contenidos curriculares desde sus tres referentes: Procesos, Estructuras y Operaciones.

En los Procesos se tratan:

- La Sustitución Formal (Cambio de representación decimal a fraccionaria y viceversa; Representación en la recta numérica y Representaciones discretas y continuas).
- La Generalización (Fracción generatriz de una expresión decimal exacta y periódica; Fracción decimal; y El sistema de numeración decimal ampliado).
- La Modelización (Situaciones problemáticas que involucran números fraccionarios y decimales, como los porcentajes).

En estructuras, tenemos: Fracción como parte de la unidad (parte-todo); Numerador y denominador; Fracción como medida, cociente, razón, y operador; Fracciones equivalentes; Fracciones irreducibles; Fracción y número racional; Fracción decimal y no decimal; Fracción decimal



y número decimal; Expresión decimal periódica de las fracciones no decimales; Fracción generatriz; Operaciones con fracciones y decimales. Propiedades; Sistema de numeración decimal ampliado; y Porcentajes.

En Operaciones, consideramos: Operaciones (aditivas y multiplicativas y Ordenación de fracciones y decimales); Algoritmos (Reducir fracciones a común denominador, Sumar y restar números decimales y fracciones con distinto denominador, y Multiplicar y dividir decimales y fracciones); y Técnicas (Redondeo de un número racional en escritura decimal periódica, Representación en la recta de los números racionales en escritura fraccionaria y decimal, Equivalencias entre expresiones con fracciones).

Como hemos señalado, el Mapa Competencial de los contenidos se elabora explicitando el Contexto en que se desarrollarán los objetos matemáticos del campo conceptual numérico en el nivel temático considerado, es decir, en primero de la ESO.

En este sentido, establecemos el Contexto y analizamos los contenidos curriculares en relación con: Situaciones problemáticas, Representaciones y Argumentos (Razonamientos).

En las Situaciones problemáticas, se tratan Situaciones de parte-todo, de unión de partes, de transformación (operador), de comparación, de partición de un todo; Situaciones de partición y reparto; Situaciones de medida; Situaciones de representaciones y cambios; y Situaciones de porcentajes de cantidades discretas y continuas.

En las representaciones, se consideran Escritura fraccionaria, decimal, porcentajes, mixta; Representación digital (fraccionaria, decimal, porcentajes, mixta); y Representaciones analógicas discretas y continuas (colecciones, recta numérica y áreas).

En las Argumentaciones (Razonamientos) se consideran Esquemas: partes-todo, operativos (+, x) y (-, /), y semánticos; Usos de la fracción: parte-todo, cociente, razón, medida, operador y porcentaje; Sentido numérico (estimación: fraccionaria, decimal y porcentajes); Agrupar y desagrupar en el sistema de numeración decimal ampliado; Heurísticos; Deductivos: Esquemas e Inclusión numérica; e Inductivos (relaciones de igualdad).

El Mapa competencial, descrito en relación a sus dos componentes, lo podemos representar mediante dos cuadros que describen, respectivamente, al Campo conceptual y al Contexto, en los que quedan de manera explícita los diferentes fenómenos que se dan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de estos contenidos curriculares.

En este caso los dos cuadros del Mapa Competencial de fracciones y números decimales (1.º ESO), quedarían de la siguiente manera:

Mapa Competencial de fracciones y números decimales (1º ESO)

PROCESOS

Sustitución formal: Conversión de la representación decimal a la fraccionaria y viceversa, Representación en la recta numérica y Representación discreta y continua.

Generalización: Fracción generatriz de una expresión decimal exacta y periódica, Fracción decimal y sistema de numeración decimal ampliado

Modelización: Situaciones problemáticas que involucren fracciones números decimales (porcentajes de cantidades...)

OPERACIONES

- Operaciones aditivas y multiplicativas con fracciones y números decimales.
- Ordenar fracciones y números decimales.

Algoritmos

- Reducir fracciones a común denominador.
- Sumar y restar números decimales y fracciones con distinto denominador.
- Multiplicar y dividir números decimales y fracciones.

Técnicas

- Redondeo de un número racional en escritura decimal periódica.
- Representación en la recta de los números racionales en escritura fraccionaria y decimal.

Currículo

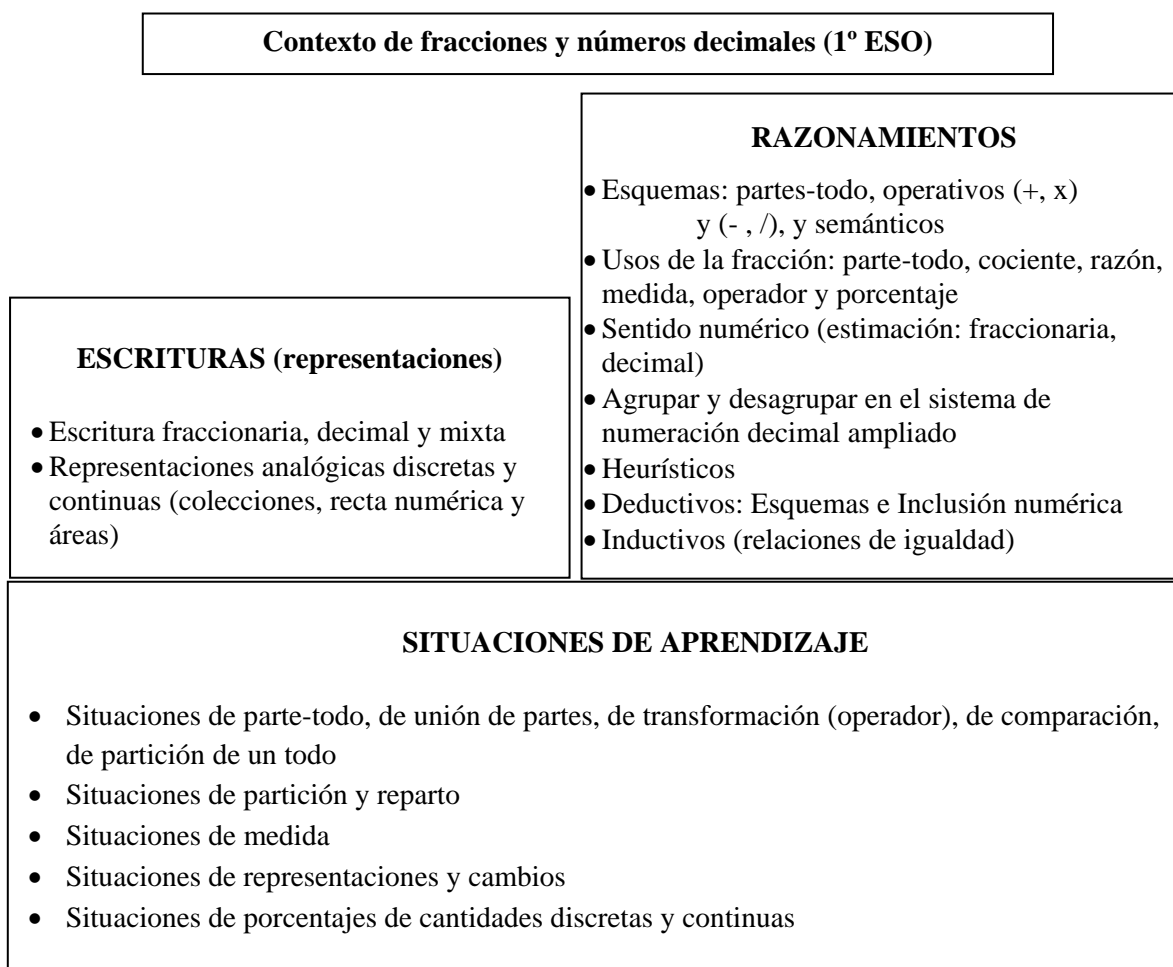
- *Fracciones y números decimales en entornos cotidianos.*
- *Diferentes significados y usos de las fracciones.*
- *Fracciones equivalentes.*
- *Operaciones con fracciones: suma, resta, producto y cociente.*
- *Fracción generatriz de un número decimal.*
- *Ordenación de fracciones y números decimales.*

ESTRUCTURAS

- Fracción: parte-todo, medida, cociente, razón, y operador.
- Numerador y denominador.
- Fracciones equivalentes.
- Fracciones irreducibles.
- Fracción y número racional.
- Fracción decimal y no decimal.
- Fracción decimal y número decimal.
- Expresión decimal de un número racional.
- Fracción generatriz
- Operaciones con fracciones y decimales. Propiedades.

El Mapa competencial del contenido matemático curricular se completa explicitando el contexto en que se desarrollarán los objetos matemáticos del campo conceptual numérico en el nivel temático considerado, 1.º de la ESO. Lo expresamos también mediante el siguiente cuadro.





El Mapa del Contenido Matemático desde la perspectiva Competencial permite, en consecuencia, caracterizar el dominio de la actividad matemática desde la competencia matemática formal, en las propuestas de actividades o tareas matemáticas que se propongan a los alumnos, y relacionarlas a partir de esta organización con la competencia matemática básica, si estamos trabajando en la Educación Obligatoria.

5. Mapa de una situación de aprendizaje desde el punto de vista competencial

La Competencia Matemática Formal (CMF) también facilita el análisis de una situación de aprendizaje desde la perspectiva competencial. Ahora se trata, en primer lugar, el contexto, entendido como una situación problemática que se aborda desde ciertos conocimientos matemáticos, para posteriormente, completar los objetos implicados en esa situación problemática en términos de las operaciones, las estructuras y los procesos del campo conceptual involucrado en la situación de aprendizaje. Esta especificación del contexto en términos de: situación problemática, representaciones y argumentos, y la organización fenomenológica del campo conceptual de los objetos involucrados en la situación de aprendizaje es lo que se denomina “Mapa de una situación de aprendizaje desde el punto de vista competencial”

Consideramos, en este apartado, una situación de aprendizaje o situación problemática que se analiza desde la perspectiva competencial. En concreto, se propone un problema verbal de estructura numérica-algebraica en un entorno geométrico.

Situación problemática: Una persona tiene un terreno rectangular de dimensiones 12 metros de frente y 8 metros de fondo. Después, esa misma persona, compra un terreno contiguo de 64 metros cuadrados. Una segunda persona le propone cambiar su terreno completo por otro rectangular, en la misma calle, con la misma área y el mismo fondo, pero en mejor sitio. ¿Cuánto debe medir el frente del nuevo terreno para que el trato sea justo? (Ruano, Socas y Palarea, 2014b).

Se trata de una situación problemática en la que figuran enunciados verbales, dados en lenguaje natural, que involucran objetos: numérico, geométrico, medida y algebraico y en la que la estructura lingüística no debe presentar, en principio, dificultades. No así los conocimientos semánticos, es decir, el significado de los términos: rectangular, superficie, área, lados, dimensiones, largo, ancho... Sin embargo, sí pueden presentar dificultades, la comprensión global del texto y la estructura del problema: numérico, geométrico, medida, algebraico.

Las representaciones son diversas: lenguaje habitual, numérico, geométrico, medida, algebraico, presentes en la situación problemática y en las necesarias transformaciones en estas representaciones y en la conversión a una nueva representación, y que esta sea operacional.

Los argumentos o razonamientos considerados están relacionados con los esquemas partes – todo, las inducciones o las deducciones realizadas. Los resolutores tienen que construir una totalidad a partir de dos partes conocidas y relacionarla con una totalidad desconocida, para construir la igualdad numérica, algebraica o analítica. En estas relaciones se pueden generar razonamientos inductivos y deductivos.

Considerado el contexto, analizamos el campo conceptual, en el que podemos distinguir, en relación con los fenómenos que se pueden dar, cuatro situaciones. Como hemos analizado, cualquier situación problemática se sitúa en el conocimiento procesual, en el que se observan, según la propuesta fenomenológica, los procesos de Sustitución Formal; Sustitución Formal y Generalización; Sustitución Formal y Modelización o Sustitución Formal, Generalización y Modelización.

Es decir, podemos distinguir cuatro situaciones:

- Los resolutores pueden interpretar la situación problemática como una situación operatoria de naturaleza multiplicativa en la que conoce el resultado y uno de los factores del producto, previa conversión de la situación problemática verbal al lenguaje numérico, teniendo en consideración las estructuras geométricas y de medida implícitas en el enunciado del problema.

- Los resolutores pueden interpretar la situación problemática como una modelización geométrica-numérica en la que, realizando una sustitución formal (conversión de registro al lenguaje gráfico o numérico), y considerando las estructuras geométricas implícitas en el enunciado de la tarea (área, longitud,...), utilizan una técnica para determinar el resultado mediante operaciones.

- Los resolutores pueden interpretar la situación problemática como una generalización algebraica, para lo cual deben ser capaces de identificar los datos, las incógnitas y las relaciones existentes entre ellos, y plantear de todos los rectángulos de área $8 \cdot x$, la ecuación adecuada para el que



tiene 64 m^2 de superficie, esto es: $160 = 8 \cdot x$, siendo x la longitud del frente del nuevo terreno. En este caso, atenderemos a las estrategias utilizadas para la resolución de la ecuación (tanteo, procedimientos aritméticos, algebraicos o la combinación de varios) y a la comprobación (validación) de que el resultado satisface las condiciones del problema.

- Los resolutores pueden dar un paso más allá e interpretar la situación planteada como una modelización funcional en la que realizan una generalización, entendiendo que la situación planteada es una particularización del caso general $f(x) = 8x$, que relaciona el área de todos los rectángulos de ancho 8 metros y largo desconocido.

En resumen, se trata de una situación problemática que puede presentar dificultades para los alumnos ya que su resolución exige el desarrollo de las competencias generales de todo proceso matemático: reconocerlo, formularlo y manipularlo, en el que se relacionan diferentes campos de la Matemática, como el geométrico, que requiere el dominio de conceptos asociados a la Geometría: superficie, área, dimensiones, longitud, largo, ancho y, por lo tanto, el reconocimiento de la estructura geométrica implícita en el problema, además de las estructuras numéricas, algebraicas y de medida, dependiendo de la conversión de la situación problemática a otra representación en las que hay que hacer transformaciones.

Análogamente, el Mapa competencial de una situación de aprendizaje, también lo debemos describir explicitando, en los respectivos cuadros, el contexto y el campo conceptual. En este caso el punto de partida es el contexto, para elaborar después el campo conceptual de los objetos matemáticos: operaciones, estructuras y procesos, involucrados en la situación de aprendizaje.

6. Consideraciones finales

(1) El Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas 2001 y 2007) es una propuesta teórico-práctica (formal-experimental) que aporta instrumentos para el análisis, la descripción y la gestión de las situaciones problemáticas o fenómenos de naturaleza didáctica matemática que ocurren en el Microsistema Educativo desde una perspectiva centrada en la Semiótica, en la Lógica y en los Modelos de Competencias: Competencia Matemática Formal (CMF), Competencia Cognitiva (CC) y Competencia de Enseñanza (CE).

La Organización del Contenido Matemático se debe realizar mediante dos componentes que el citado Enfoque denomina: Competencia Matemática Formal (CMF) y Estadios de Desarrollo de los Objetos Matemáticos (EDOM) (Socas, 2012). Estas componentes se determinan a partir del análisis de la naturaleza de los objetos matemáticos y sus representaciones. Estos objetos se organizan en campos conceptuales y tienen una necesaria relación con sus representaciones. Objetos y Representaciones están explícitos o implícitos en las diferentes situaciones problemáticas, matemática o extramatemática, y organizan diferentes fenómenos que, para los campos numérico, algebraico y analítico, se concretan en la CMF.

Si nos situamos en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas y, obviamente, en las investigaciones relacionadas con los procesos de enseñanza y aprendizaje de éstas, se observa la necesidad de un control epistemológico, semiótico y fenomenológico, de los conocimientos matemáticos y didácticos implícitos en las tareas de enseñanza y aprendizaje propuestas. En este sentido, la CMF como una propuesta de organización Fenomenológica del conocimiento matemático: numérico, algebraico y analítico, que integra las perspectivas Epistemológica y Semiótica. Debe ser considerada como un Conocimiento Técnico, que se puede usar en la práctica educativa con dos

finalidades: La Enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas y la Investigación en Educación Matemática.

En relación con la primera finalidad, facilita la reconstrucción del conocimiento matemático desde la perspectiva global de la Cultura Matemática, es decir, desde la Competencia Matemática; la Organización del contenido matemático para la enseñanza, desde la Competencia Matemática Básica y desde los fines de la Matemática en el Currículo, como hemos mostrado en la realización del Mapa Competencial para el contenido curricular del primer curso de la ESO relativo a números racionales y decimales; y la caracterización de las situaciones de aprendizaje (actividades) matemáticas desde la perspectiva competencial de las mismas, como hemos mostrado en la realización del Mapa Competencial de los conocimientos implicados en una situación problemática.

En relación con las actividades de aprendizaje, debemos señalar que el dominio de la actividad matemática de cada una de las tareas nos permite situarlas, como punto de partida, en uno de los ámbitos del campo conceptual estudiado: operacional, estructural y procesual, contextualizadas como situaciones problemáticas que los alumnos deben identificar y resolver, que implican diferentes escrituras y razonamientos, es decir, tareas que están diseñadas para provocar, inicialmente una posible respuesta operacional, estructural o procesual, aunque ello no garantiza que ésta sea la respuesta inicial del alumnado. Sin embargo, el modelo de competencia que describe el análisis del contenido, permite observar los diferentes itinerarios que siguen los alumnos.

Por ejemplo, desde la perspectiva del alumno se pueden analizar los recursos matemáticos que éstos ponen en juego, así como las diferentes “habilidades heurísticas” para representar en el lenguaje numérico, algebraico o analítico los datos que figuran como un enunciado verbal en un entorno geométrico. En este análisis debemos diferenciar y relacionar las tres fases: Reconocimiento, formulación (conversión) y manipulación (resolución).

En la conversión, por ejemplo, se puede observar si los alumnos son capaces de identificar los datos, las incógnitas y las relaciones existentes entre ellos, si entienden la pregunta formulada y plantean la ecuación adecuada.

En la resolución, se pueden observar las estrategias utilizadas (ensayo y error, procedimientos aritméticos, algebraicos, analíticos o la combinación de varios), y si realizan la comprobación de que el resultado satisface las condiciones del problema.

El Mapa del Contenido Matemático desde la perspectiva Competencial permite, en consecuencia, caracterizar el dominio de la actividad matemática desde la competencia matemática formal, en las propuestas de actividades o tareas matemáticas que se propongan a los alumnos, y relacionarlas a partir de esta organización con la competencia matemática básica, en términos de Operaciones (Técnicas y Algoritmos), Estructuras (Conceptos y Propiedades) y Procesos (Sustitución forma, Generalización y Modelización), Resolución de problemas, Representaciones y Razonamientos (argumentaciones), si estamos en la Educación Obligatoria.

Agradecimientos: Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Plan Nacional de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación mediante el Proyecto: "Modelos de competencia formal y cognitiva en pensamiento numérico y algebraico de alumnos de Primaria, de Secundaria y de Profesorado de Primaria en formación" (EDU2011-29324).



Bibliografía

- Peirce, C. S. (1987). *Obra Lógico Semiótica*. Madrid: Taurus.
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática*, pp. 69-96. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Ruano, R.; Socas, M. M. y Palarea, M^a. M. (2014a). El proceso de Generalización en alumnos de Secundaria. *Uno*, 68, 18-29.
- Ruano, R.; Socas, M. M. y Palarea, M^a. M. (2014b). La Modelización Matemática en el Modelo de Competencia Matemática Formal. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 11, 9, 43.
- Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. (Cap.V, pp. 125-154). En L. Rico y otros, *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.
- Socas, M. M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.
- Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. *Investigación en Educación Matemática Xi*, pp. 19-52.
- Socas, M. M. (2010). Competencia matemática formal. Un ejemplo: el Álgebra escolar. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática X*, pp. 9-43.
- Socas, M. M. (2012). El análisis del contenido matemático en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Aplicaciones a la investigación y al desarrollo curricular. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez y A. Maz (Eds), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 1-22). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de Universitat de Valencia y SEIEM.

Martín M. Socas Robayna, Doctor en Matemáticas y Catedrático de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de La Laguna (ULL). Coordinador del marco conceptual: Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) y del grupo de investigación de la ULL: Pensamiento numérico, algebraico y analítico. Tiene como líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas: Pensamiento numérico y algebraico, Dificultades, obstáculos y errores, Resolución de problemas y Formación del profesorado de Matemáticas.
Email: msocas@ull.edu.es

Raquel M.^a Ruano Barrera, Profesora de Matemáticas de Educación Secundaria, Instituto de Enseñanza Secundaria Valle de Guerra. La Laguna (Tenerife). Tiene como líneas de trabajo: Didáctica de las Matemáticas, Pensamiento numérico y algebraico, Errores y procesos característicos del Lenguaje Algebraico.
Email: r75@msm.com

Josefa Hernández Domínguez, Profesora Titular jubilada de Didáctica de la Matemática de la Universidad de La Laguna. Tiene como líneas de trabajo la resolución de problemas de Matemáticas, la formación del profesorado y las actitudes hacia las Matemáticas.
Email: jhdez@ull.edu.es