NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas

http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 92, julio de 2016, páginas 117-133

De Torneos y otros asuntos interesantes, pues empezamos con candelabros y terminamos con cavernas

(Problemas Comentados XLIII)

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático[1])

Resumen Utilizando el procedimiento de resolución de problemas en cuatro pasos: comprender, pensar, ejecutar y responder, explicamos diversas maneras de resolver los problemas propuestos en anteriores artículos. El uso de tablas de doble entrada para una ordenación de datos y resultados, contribuye a una visión más clara del procedimiento. Se exponen los problemas propuestos en la Fase Final del Torneo de 2º de la ESO recientemente celebrado, solucionando alguno de ellos y dejando el resto para que los lectores nos aporten sus soluciones y comentarios. Y terminamos con un interesante problema sobre grafos.

Palabras clave Torneo de matemáticas 2º ESO. Problemas resueltos, Metodologías de resolución de problemas. Uso de tablas. Problemas de grafos.

Abstract Using the method of problem solving in four steps: understanding, think, execute and respond, explain various ways to solve the problems proposed in previous articles. The use of double-entry tables for sorting data and results, contributing to a clearer view of the procedure. The proposed problems in the final tournament of 2nd ESO recently concluded, solving any of them and leaving the rest for readers to provide us solutions and comments are presented. And we end with an interesting problem on graphs.

Keywords Math tournament 2nd ESO. Problems solved, problem-solving methodologies. Using tables. Graph problems

Se dejaron propuestos en el artículo Problemas comentados XLII varios problemas que ahora pasamos a considerar y solucionar. Están sacados de dos de nuestros sitios favoritos: el Rally Matemático Transalpino y la revista portuguesa “Educação e Matemática”.

Propuesto en el **21º RMT Prueba I** enero - febrero de 2013

Cena a la luz de las velas (I)

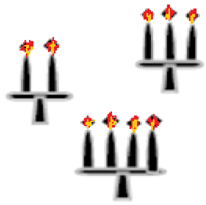
Laura ha organizado una cena en su jardín. Para crear un buen ambiente ilumina la mesa con candelabros de dos, tres o cuatro brazos. Laura elige al menos un candelabro de cada tipo y en cada uno de ellos coloca una vela por brazo.

---

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón** y **Manuel García Déniz**, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

Sociedad Canaria *Isaac Newton*
de Profesores de Matemáticas

Laura se da cuenta de haber colocado 20 velas en total en los candelabros que ha usado.
¿Cómo ha utilizado Laura las 20 velas?
Escribid todas las posibilidades.
Indicad para cada una de ellas el número de cada tipo de candelabro y explicad vuestro razonamiento.



Para presentar la manera de resolver el problema utilizaremos el proceso de resolución que propone el Proyecto Newton y que usamos de manera casi constante en estas páginas.

Proceso de Resolución

Fase I. Comprender

Datos:

Candelabros de tres tipos: con dos, con tres o con cuatro brazos. Se han colocado 20 velas en total.

Objetivo:

Cómo ha utilizado Laura las 20 velas, escribiendo todas las posibilidades.

Indicar para cada una de ellas el número de cada tipo de candelabro.

Relación:

Al menos un candelabro de cada tipo y en cada uno de ellos una vela por brazo.

Los candelabros completos, usando las 20 velas.

Diagrama:

Un diagrama simple para ensayo y error o búsqueda sistemática y exhaustiva.

Velas	De 4 brazos	De 3 brazos	De 2 brazos	Candelabros
20				
20				
20				
20				
20				

Fase II. Pensar

Estrategias:

Organizar la información con o sin simplificar

Ensayo y error

Modelización

Fase III. Ejecutar

Estamos buscando descomposiciones de 20 en una suma de términos 2, 3 y 4 (20 = 2 + 2 + … + 3 + 3 + … + 4 + 4 …) o en sumas de múltiplos de 2, de 3 o de 4 con al menos un término de cada tipo.

Se podría intentar hacer la búsqueda de las soluciones por ensayo y error, pero este procedimiento no permite garantizar que se encuentran todas las soluciones. Los alumnos se darían por satisfechos cuando se encuentre una.

De 4 brazos	De 3 brazos	De 2 brazos	Total	Velas (20)
3 x 4 = 12	3 x 3 = 9	3 x 2 = 6	12 + 9 + 6 = 27	27 > 20 NO

Razonar que sobran 7. ¿Cómo eliminar candelabros para conseguir que sólo queden 20 velas? Evidentemente sólo se puede conseguir eliminando uno de tres brazos y otro de cuatro brazos. Queda así la tabla:

De 4 brazos	De 3 brazos	De 2 brazos	Total	Velas (20)
3 x 4 = 12	3 x 3 = 9	3 x 2 = 6	12 + 9 + 6 = 27	27 > 20 NO
2 x 4 = 8	2 x 3 = 6	3 x 2 = 6	8 + 6 + 6 = 20	20 = 20 SÍ

Prosiguiendo así se pueden encontrar otras soluciones, pero sigue siendo difícil precisar que se han encontrado todas. Una búsqueda más sistemática puede ser organizada por tipos de candelabros, fijando por ejemplo el número de candelabros de 4 velas (o los múltiplos de 4).

Hay como máximo 3 candelabros de 4 velas (5 o 4 no permitirían tener otros dos candelabros de 2 y de 3 brazos). Podemos utilizar una tabla simple para sistematizar la búsqueda:

Velas	De 4 brazos	De 3 brazos	De 2 brazos	Candelabros
20				
20				
20				
20				
20				
20				
20				

Empezaremos con 4 candelabros de 4 brazos

Velas	De 4 brazos	De 3 brazos	De 2 brazos	Candelabros
20	4 (16 velas)	0	2 (4 velas)	6 NO
20	3 (12 velas)	2 (6 velas)	1 (2 velas)	6 SÍ
20	3 (12 velas)	1 (3 velas)	Impar	NO
20	2 (8 velas)	4 (12 velas)	0	6 NO
20	2 (8 velas)	3 (9 velas)	Impar	5 NO
20	2 (8 velas)	2 (6 velas)	3 (6 velas)	7 SÍ
20	2 (8 velas)	1 (3 velas)	Impar	NO
20	1 (4 velas)	5 (15 velas)	Impar	NO
20	1 (4 velas)	4 (12 velas)	2 (4 velas)	7 SÍ
20	1 (4 velas)	3 (9 velas)	Impar	NO
20	1 (4 velas)	2 (6 velas)	5 (10 velas)	8 SÍ
20	1 (4 velas)	1 (3 velas)	Impar	NO

Que nos darían los cuatro casos posibles. Y, además, con el razonamiento escrito del por qué de la no validez de los otros casos.

Otra forma de razonar consiste en observar que, para utilizar un candelabro de cada tipo, Laura ha necesitado ya de 9 (2 + 3 + 4) velas; quedan 11 (20 – 9) velas para distribuir; entonces se deberá utilizar al menos otro candelabro de 3 brazos para obtener un número par. Han sido así utilizadas 12 (2 + 3 + 3 + 4) velas y quedan solamente 8 por colocar, según uno de los cuatro repartos: 3 + 3 + 2 = 4 + 4 = 4 + 2 + 2 = 2 + 2 + 2 + 2.

Podríamos simplificar bastante el cálculo si, antes de empezar, realizamos una simplificación del problema. Como debe haber al menos un candelabro de cada clase, eliminamos esos tres del total, lo que equivaldría a tener un total de velas:

$$20 - (1 \text{ x } 4 + 1 \text{ x } 3 + 1 \text{ x } 2) = 20 - (4 + 3 + 2) = 20 - 8 = 11$$

La tabla quedaría ahora de la siguiente manera:

Velas	De 4 brazos	De 3 brazos	De 2 brazos	Total velas	Candelabros
11					
11					
11					
11					
11					

Con la particularidad de que ahora sí puede haber ceros, uno o dos, en las columnas.

Una vez encontradas las soluciones posibles habría que sumarle 1 a cada uno de ellos para obtener los resultados correctos.

Velas	De 4 brazos	De 3 brazos	De 2 brazos	Total velas	Candelabros
11	1 x 4 = 4	1 x 3 = 3	2 x 2 = 4	4 + 3 + 4 = 11	4
20	2 x 4 = 8	2 x 3 = 6	3 x 2 = 6	8 + 6 + 6 = 20	7

Los cuatro casos serían éstos:

20 = 3 × **4** + 8 = 3 × **4** + 2 × **3** + 1 × **2: 6 candelabros** → **3** de cuatro brazos, **2** de tres y **1** de dos

20 = 2 × **4** + 12 = 2 × **4** + 2 × **3** + 3 × **2: 7 candelabros** → **2** de cuatro brazos, **2** de tres y **3** de dos

20 = 1 × **4** + 4 × **3** + 2 × **2: 7 candelabros** → **1** de cuatro brazos, **4** de tres y **2** de dos

20 = 1 × **4** + 16 = 1 × **4** + 2 × **3** + 5 × **2: 8 candelabros** → **1** de cuatro brazos, **2** de tres y **5** de dos

A los que se puede llegar también por razonamiento directo.

Hay otras maneras de abordar la resolución de este problema. Una de ellas consiste en realizar una modelización, utilizando tarjetas o recipientes para 2, 3 o 4 (candelabros) y 20 fichas (velas). Un reparto adecuado nos puede dar algunas soluciones. Tenerlas todas puede resultar bastante complejo.

También se puede abordar desde una organización algebraica. Llamemos x, y, z al número de candelabros de 4, de 3 y de 2 brazos, respectivamente. Planteamos:

$4x + 3y + 2z = 20$

Fijando una de las incógnitas (desde 1, mínimo, hasta 8, máximo) se nos convierte en una ecuación diofántica (soluciones enteras y positivas) de sencilla resolución, asequible e interesante de trabajar con alumnos del segundo ciclo de la ESO.

Elegimos la x (número de candelabros de 4 brazos) que puede variar desde 1 hasta 3. No puede valer 4 porque tendríamos 4 x 4 = 16 velas lo que nos dejaría 20 – 16 = 4 velas para 1 candelabro de 3 brazos y 1 candelabro de 2 brazos, lo que hace un total de 5 velas.

Por tanto:

Para x = 3: $4x + 3y + 2z = 20 \rightarrow 12 + 3y + 2z = 20 \rightarrow 3y + 2z = 8$

$z = (8 - 3y) / 2$. La incógnita puede tomar valores desde y = 1 hasta y = 2.

- Si y = 1: $z = (8 - 3) / 2 = 5/2$ no entera
- Si y = 2: $z = (8 - 6) / 2 = 2/2 = 1$ entera

de donde: **x = 3**, **y = 2**, **z = 1**. Supone un total de 12 + 8 + 2 = 20 velas y 6 candelabros.

Para x = 2: $4x + 3y + 2z = 20 \rightarrow 8 + 3y + 2z = 20 \rightarrow 3y + 2z = 12$

$z = (12 - 3y) / 2$ La incógnita puede tomar valores desde y = 1 hasta y = 3.

- Si y = 1: $z = (12 - 3) / 2 = 9/2$ no entera
- Si y = 2: $z = (12 - 6) / 2 = 6/2 = 3$ entera
- Si y = 3: $z = (12 - 9) / 2 = 3/2$ no entera

de donde: **x = 2**, **y = 2**, **z = 3**. Supone un total de 8 + 6 + 6 = 20 velas y 7 candelabros.

P R O B L E M A S

Para x = 1: $4x + 3y + 2z = 20 \rightarrow 4 + 3y + 2z = 20 \rightarrow 3y + 2z = 16$

$z = (16 - 3y) / 2$ la incógnita puede tomar valores desde y = 1 hasta y = 5.

- Si y = 1: $z = (16 - 3) / 2 = 13/2$ no entera
- Si y = 2: $z = (16 - 6) / 2 = 10/2 = 5$ entera
- Si y = 3: $z = (16 - 9) / 2 = 7/2$ no entera
- Si y = 4: $z = (16 - 12) / 2 = 4/2 = 2$ entera
- Si y = 5: $z = (16 - 15) / 2 = 1/2$ no entera

de donde: **x = 1**, **y = 2**, **z = 5**. Supone un total de 4 + 6 + 10 = 20 velas y 8 candelabros.

Y también: **x = 1**, **y = 4**, **z = 2**. Supone un total de 4 + 12 + 4 = 20 velas y 7 candelabros.

Lo que nos vuelve a traer las cuatro soluciones ya obtenidas con anterioridad.

Solución:

Cuatro repartos diferentes:

6 candelabros → **3** de cuatro brazos, **2** de tres y **1** de dos

7 candelabros → **2** de cuatro brazos, **2** de tres y **3** de dos

7 candelabros → **1** de cuatro brazos, **4** de tres y **2** de dos

8 candelabros → **1** de cuatro brazos, **2** de tres y **5** de dos

Fase IV. Responder

Comprobación:

- $3 \times \mathbf{4} + 2 \times \mathbf{3} + 1 \times \mathbf{2} = \mathbf{12 + 6 + 2 = 20}$
- $2 \times \mathbf{4} + 2 \times \mathbf{3} + 3 \times \mathbf{2} = \mathbf{8 + 6 + 6 = 20}$
- $1 \times \mathbf{4} + 4 \times \mathbf{3} + 2 \times \mathbf{2} = \mathbf{4 + 12 + 4 = 20}$
- $1 \times \mathbf{4} + 2 \times \mathbf{3} + 5 \times \mathbf{2} = \mathbf{4 + 6 + 10 = 20}$

Análisis:

La solución es múltiple; hay cuatro posibilidades diferentes.

Respuesta:

Laura ha utilizado las 20 velas de una de las cuatro maneras siguientes:

- **6 candelabros** → **3 de cuatro brazos, 2 de tres y 1 de dos**
- **7 candelabros** → **2 de cuatro brazos, 2 de tres y 3 de dos**

- **7 candelabros** → **1 de cuatro brazos, 4 de tres y 2 de dos**
- **8 candelabros** → **1 de cuatro brazos, 2 de tres y 5 de dos**

El resto de problemas cuya resolución presentamos, por razones de espacio, lo haremos de manera más simplificada. Pero teniendo presente siempre que las respuestas han sido buscadas a través de su uso.

Problema propuesto en el número 104 de "Educação e Matemática"

Mensajes de móvil

Cinco amigos se encontraron y pasaron la tarde enviando mensajes de móvil, en un total de 120. Uno de ellos mandó 51 mensajes, Rita envió el doble que Sheila, Vera mandó el triple de Duarte y Juan cinco veces más que uno de sus amigos.
¿Cuántos mensajes envió cada uno?

En dicha revista se reseñan también las mejores soluciones presentadas por los profesores de la Associação de Professores de Matemática (APM) y a veces, como en este caso, alguna presentada por un alumno a instancias de sus profesores.

La que presentamos aquí está basada en una resolución de Pedro Silva, de 7º año de la Escola Secundária Vergílio Ferreira.

Los datos son: Cinco amigos. Pasan la tarde enviando 120 mensajes de móvil. El objetivo: cuántos mensajes envió cada uno. Las relaciones: uno de ellos mandó 51 mensajes. Rita envió el doble que Sheila. Vera mandó el triple que Duarte. João cinco veces más que uno de los amigos.

Utilizaremos como diagrama una tabla y las estrategias **ensayo y error** y **organizar la información.**

Procedemos:

De los datos se deduce que los cinco amigos son: Rita, Sheila, Vera, Duarte y João. João envía el quíntuple de alguno de los otros amigos que no sé cuál es todavía. Ninguno de ellos puede mandar mensaje y medio. Se trabaja con números naturales.

Veamos cuál de ellos envió 51 mensajes:

Suponemos que Rita envía 51 mensajes:

Rita	Sheila	Vera	Duarte	João	Conclusión
51	51 : 2 = 25,5				NO

Rita envió el doble que Sheila.

Rita envía 51 mensajes → Sheila enviaría 25,5. No es número natural. Rita no puede ser.

Suponemos que Sheila envía 51 mensajes:

Rita	Sheila	Vera	Duarte	João	Conclusión
51	51 : 2 = 25,5				**NO**
51 x 2 = 102	**51**				**NO**

Rita envió el doble que Sheila.

Sheila envía 51 mensajes → Rita enviaría 102. Y como 102 + 51 da 153 mensajes → se pasa del total de mensajes. Sheila tampoco es.

Suponemos que Vera envía 51 mensajes:

Rita	Sheila	Vera	Duarte	João	Conclusión
51	51 : 2 = 25,5				**NO**
51 x 2 = 102	**51**				**NO**
		51	51 : 3 = 17		**Posible**

Vera mandó el triple que Duarte.

Vera envía 51 mensajes → Duarte enviaría 17. Es posible, pero tenemos que ver lo que pasa con los otros amigos para estar seguro.

Suponemos que Duarte envía 51 mensajes:

Rita	Sheila	Vera	Duarte	João	Conclusión
51	51 : 2 = 25,5				**NO**
51 x 2 = 102	**51**				**NO**
		51	51 : 3 = 17		**Posible**
		51 x 3 = 153	**51**		**NO**

Vera mandó el triple que Duarte.

Duarte envía 51 mensajes → Vera enviaría 153. Pasa de los 120. Es imposible que fuese Duarte.

Suponemos que João envía 51 mensajes:

Rita	Sheila	Vera	Duarte	João	Conclusión
51	51 : 2 = 25,5				**NO**
51 x 2 = 102	**51**				**NO**
		51	51 : 3 = 17		**Posible**
		51 x 3 = 153	**51**		**NO**
				51	**NO**

João envía cinco veces más mensajes que uno de los amigos.

João no puede ser el que envía 51 porque como manda 5 veces más mensajes que uno cualquiera de los amigos y como la quinta parte de 51 no es un número entero (51 no es múltiplo de 5) no es correcto. No se pueden enviar mensajes que no sean completos.

Podemos ya asegurar que fue Vera quien envió 51 mensajes. Y también sabemos que Duarte envió 17, la tercera parte de 51. Entre Vera y Duarte, por tanto, enviaron 51 + 17 = 68 mensajes.

Como se enviaron en total 120 mensajes, quedan 120 – 68 = 52 mensajes para distribuir entre los otros 3 amigos. Rita envió 2 veces el número de mensajes que Sheila. João envió o 5 veces el número de mensajes que Sheila o bien 5 veces el número de mensajes que Rita.

Hagamos una nueva tabla sólo para los tres amigos que quedan:

Rita	Sheila	João	Total	Conclusión
2N	N	5N	52	52 : (2N + N + 5N) = 52 : 8N → 6 < N < 7
2N	N	10N	52	52 : (2N + N + 10N) = 52 : 13N → N = 4

No encontramos un número natural que satisfaga primera fila. No puede ser. Para la segunda fila sí encontramos ese número natural: N = 4.

Sheila envía, por consiguiente, 4 mensajes. Rita mandó el doble, 8 mensajes. João, como envió el quíntuplo que Rita, mandó 8 x 5 = 40 mensajes.

Solución: Vera envió 51, Duarte 17, Sheila 4, Rita 8 y João 40 mensajes.

Comprobamos: 51 + 17 + 8 + 4 + 40 = 120

Uno de ellos mandó 51 mensajes → Vera

Rita envió el doble que Sheila → 8 = 2 x 4

Vera mandó el triple que Duarte → 51 = 3 x 17

João cinco veces más que uno de los amigos → 40 = 5 x 8

La solución es única y satisfactoria.

Respuesta

Vera envió 51 mensajes, Duarte envió 17, Sheila envió 4, Rita envió 8 y João envió 40 mensajes.

El pasado 13 de mayo se celebró en La Laguna la Segunda Fase del XXXII Torneo de Secundaria del año 2016. Como casi siempre se propusieron a los alumnos 5 problemas y una prueba de tipo práctico para resolver de manera manipulativa.

Nos llamó la atención que el segundo problema, que nos tocó corregir a nosotros, no fuese resuelto por ninguno de los 23 alumnos (15 a nivel individual y 4 parejas) seleccionados en la Primera Fase.

Aparentemente se trata de un sencillo problema de porcentajes. No debería tener dificultad. Pero lo cierto es que solamente cinco alumnos fueron capaces de hacer correctamente la primera parte del problema y ninguno la segunda parte. ¿Por qué? Creemos que es debido a fallos en el aprendizaje de los porcentajes. Todos ellos utilizaron la técnica de la regla de tres, de manera totalmente mecánica. Pensamos también que si utilizaran un diagrama partes/todo para representar la situación o alguna tabla de proporcionalidad cometerían menos errores.

Sandías a secar

Un estudio científico pretende determinar cómo afecta el sol en los cultivos de las sandías.

Se toma una sandía de 8 kg, de los cuales el 98% de su peso es agua. Después de cierto tiempo al sol se evapora parte del agua, siendo ahora el porcentaje de agua en la sandía del 96%.

¿Cuál es el peso actual de la sandía?

Explica detalladamente tus razonamientos.

Los datos son: una sandía de 8 kg. El 98% de su peso es agua. Al sol se evapora parte del agua, siendo ahora el porcentaje de agua en la sandía del 96%.

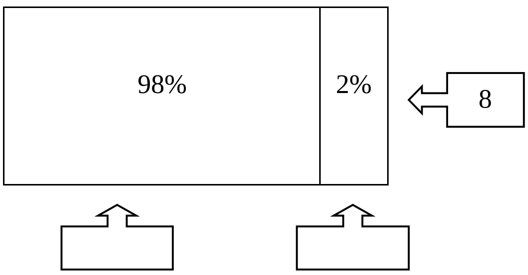
El objetivo es: peso actual de la sandía.

La relación es: se evapora parte del agua, no la materia sólida.

Usaremos un diagrama Partes/Todo y la estrategia de ORGANIZAR LA INFORMACIÓN.

Procedemos: Representamos las dos situaciones mediante diagramas **partes/todo**.

1º. La sandía **antes** de ser expuesta al sol.



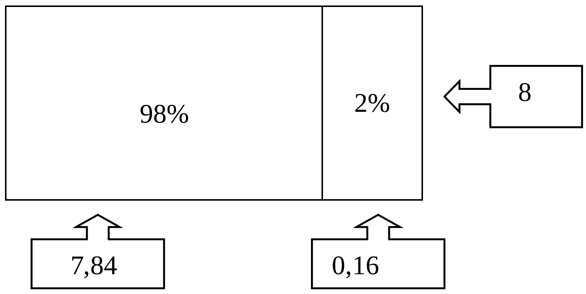
La etiqueta del **todo** es el peso de la sandía.

Cada parte tiene dos etiquetas: la del peso y la del porcentaje; son dos formas distintas pero equivalentes de medir el peso del agua y de la materia sólida.

Se hace una transformación de la etiqueta porcentual de cada parte en unidades de peso (kg).

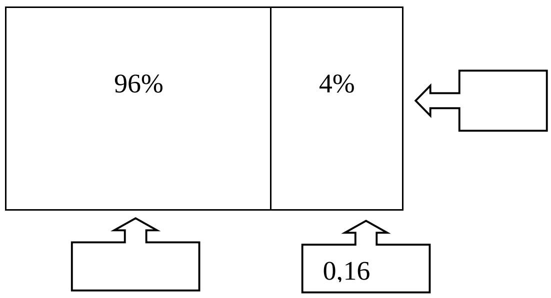
La sandia tiene un 98% de agua → 0,98 x 8 = 7,84 kg de agua.

El 2% es materia sólida → 0,02 x 8 = 0,16 kg de materia sólida.



2º. La sandía **después** de ser expuesta al sol.

Después de un tiempo el agua es el 96%, pero la materia sólida es la misma (0,16 kg), el peso de la cual se corresponde ahora con el 4%.



Por tanto, siendo x el peso total de la sandía, tenemos la siguiente ecuación:

$$0{,}04\ x = 0{,}16 \rightarrow \quad x = 0{,}16 : 0{,}04 = 4 \text{ kg}$$

También podemos calcular así (por reducción a la unidad):

$$0{,}16 : 4 = 0{,}04 \rightarrow 0{,}04 \text{ x } 96 = 3{,}84 \rightarrow 3{,}84 + 0{,}16 = 4 \text{ kg}$$

La solución es 4 kg. La comprobamos razonando de la siguiente manera: si el porcentaje actual de materia sólida ha aumentado (sin modificarse en sí misma) del 2% al 4% (el doble) es porque la sandía ha disminuido su peso a la mitad.

También, como hemos realizado los cálculos de dos maneras diferentes, usar uno de ellos como comprobación del otro. La solución es única.

Respuesta

El peso actual de la sandía es de 4 kg.

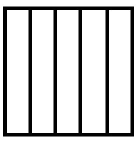
El resto de los problemas de la prueba se los dejamos aquí para que se entretengan en resolverlos hasta la salida del próximo número de esta revista.

Elaborando el calendario

En el mes de enero de un determinado año hay exactamente 4 viernes y 4 lunes. **¿Qué día de la semana podría ser el 20 de enero?**

Explica detalladamente tus razonamientos.

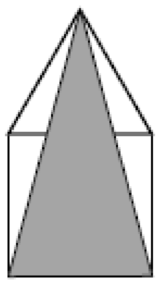
El cuadrado dividido



Si cada uno de los 5 rectángulos internos en los que está dividido el cuadrado de la figura posee un perímetro de 72 cm, **¿cuál es el área total del cuadrado?**

Explica detalladamente tus razonamientos.

Un triángulo especial



Uno de los lados de un triángulo equilátero coincide con el lado de un cuadrado. Se construye un triángulo de la forma sombreada que se muestra en la figura adjunta.

1. **Calcula la medida del ángulo x indicado.**
2. **Sabiendo que el lado del cuadrado mide a centímetros, averigua el área del triángulo sombreado**

Explica detalladamente tus razonamientos.

El camión de Savonex

El lunes la empresa Savonex ha producido 279 cajas de pastillas de jabón. Para transportarlas el camión de la fábrica realiza varios viajes, en todos ellos va completamente cargado, quedando 3 cajas para ser transportadas el martes.
El martes la fábrica produce 216 cajas y el camión realiza 2 viajes menos que el día anterior, todos ellos con el camión completamente cargado, salvo el último viaje en el que quedaba sitio para 11 cajas.

a) **¿Cuántos viajes hizo el martes?**

b) **¿Cuántas cajas transporta el camión cuando va totalmente cargado?**

Explica detalladamente tus razonamientos.

Prueba práctica: desafío del juego de los “barquitos” o “batalla naval”

Todos hemos jugado alguna vez a este juego. Es esta cuadrícula de 10x10 casillas se han de colocar diez barcos: 4 submarinos (1x1), 3 destructores (2x1), 2 cruceros de guerra (3x1) y un portaviones (4x1). Los barcos deben colocarse en el tablero sin que contacten entre sí, ni siquiera en las esquinas.

El desafío consiste en colocar todos los barcos menos el portaviones, de tal manera que este barco se quede sin sitio donde ser colocado. Es decir, debes colocar todos los 9 barcos más pequeños de manera tal que sea imposible colocar el portaviones cumpliendo con la regla del primer párrafo. No valen las soluciones obtenidas por giros o simetrías de otras.

Tienes varios tableros reproducidos a menor tamaño para que dibujes las soluciones que encuentres. Cada solución correcta es un punto al que se le podrá aplicar un coeficiente para sumar en el resultado al resto de la Prueba Final.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										
J										

El tablero iba acompañado de reproducciones de los barcos al tamaño adecuado como para poder manipularlos y ensayar sobre el mismo, las posibles soluciones.

Dentro de los problemas trimestrales del Proyecto Newton, en este tercer trimestre del curso se propuso un problema muy interesante, sacado de una Olimpiada de problemas matemáticos.

Resulta interesante porque al resolverlo se evidencia con mucha claridad que el álgebra (planteamiento de ecuaciones), siendo una herramienta muy eficaz, es sin embargo bastante poco realista en su aplicación a problemas de números enteros.

Pisadas

Alicia midió el largo del jardín de su amiga Paula con pasos de 48 cm.
Después lo midió Paula con pasos de 64 cm.
Quedaron marcadas en total 58 pisadas distintas.

¿Cuál es el largo del terreno?

Los datos son: Alicia y Paula miden el largo del jardín. Alicia lo hace con pasos de 48 cm. Paula lo mide con pasos de 64 cm. Quedaron marcadas en total 58 pisadas distintas.

El objetivo es: Cuál es el largo del terreno.

La relación es: A mayor tamaño de la pisada menos pisadas son necesarias.

Usaremos como diagrama un modelo (huellas recortadas en papel), un diagrama rectilíneo doble o una tabla, mediante estrategias de **modelización** u **organizar la información**.

Procedemos: Como el paso de Paula es más largo dará menos pasos al medir el terreno.

Mediante **modelización**:

Recortaremos (o dibujaremos) las huellas (pueden ser segmentos) de ambas niñas en un tamaño proporcional a las medidas que da el problema. Luego pondremos en dos líneas paralelas -diagramas rectilíneos- dichas huellas hasta completar las 58 indicadas en el problema. Puesto que la relación entre las huellas es de 64/48 = 4/3, es fácil hacerlo con recortes de tiras de papel o cartulina que midan 2 y 1,5 cm, por ejemplo. Además, se pone en evidencia esta relación al ver que coinciden cada 4 pasos de Alicia con 3 pasos de Paula.

Alicia											
Paula											

En algún caso, y si hay cintas métricas de papel disponibles en el aula, puede ocurrírseles a los propios alumnos el marcar en dos cintas estas medidas y luego ponerlas en paralelo. Siempre podemos darles una *ikea* de conseguir esas cintas de papel.

Contando las huellas y calculando la distancia recorrida tendremos resuelto el problema.

Mediante **razonamiento aritmético**:

Hacemos una tabla para comparar las pisadas y distancias recorridas hasta encontrar una coincidencia:

Número de pasos	Distancia recorrida por Alicia	Distancia recorrida por Paula
1	1 x 48 = 48 cm	1 x 64 = 64 cm
2	2 x 48 = 96 cm	2 x 64 = 128 cm
3	3 x 48 = 144 cm	3 x 64 = **192** cm
4	4 x 48 = **192** cm	
5		
6		

Al fin y al cabo, lo que hemos hecho es hallar el mínimo múltiplo común de 48 y 64, que se puede realizar con la descomposición en factores clásica.

Por cada cuatro pasos de Alicia, Paula da tres para recorrer la misma distancia: 192 cm. Eso supone siete huellas de pisadas sobre el jardín. Ahora buscaremos las coincidencias que se producen hasta que se produzcan 58 huellas distintas en total:

Pisadas de Alicia	Pisadas de Paula	Distancia recorrida	Nº total de pisadas
4	3	192 cm	7
8	6	192 x 2 = 384 cm	14
12	9	192 x 3 = 576 cm	21
16	12	192 x 4 = 768 cm	28
20	15	192 x 5 = 960 cm	35
24	18	192 x 6 = 1152 cm	42
28	21	192 x 7 = 1344 cm	49
32	24	192 x 8 = 1536 cm	56
36	27	192 x 9 = 1728 cm	63

Tenemos que no pueden medir exactamente las dos niñas el largo del terreno. Con 56 pisadas lo miden exactamente y resulta ser de 15,36 metros. Pero falta una pisada de cada una, lo que supone:

- 15,36 + 0, 48 = 15,84 metros
- 15,36 + 0,64 = 16,00 metros

Esto nos hace concluir que aunque las dos dan un paso más (Alicia da 33 y Paula da 25) la que alcanza la marca es la que lo da mayor, es decir, Paula; ella da la medida exacta del largo del jardín.

Mediante **razonamiento algebraico**:

Llamamos *x* al número de pasos de Alicia e *y* al número de pasos de Paula.

$$\left.\begin{aligned} 48x &= 64y \\ x + y &= 58 \end{aligned}\right]$$

Despejamos *y* en la primera de las ecuaciones: $y = 48x/64$ y resolvemos:

$x + \frac{48x}{64} = 58 \rightarrow 64x + 48x = 3712 \rightarrow 112x = 3712 \rightarrow x = \mathbf{33.14} \rightarrow y = \mathbf{24.86}$ aproximando ambos valores a la centésima.

Para x: 33,14 x 0,48 = 15,9; para y: 24,86 x 0,64 = 15,9

Por aproximación, la solución es 16 metros. Comprobamos los valores enteros: 33 x 0,48 = 15,84 metros; 25 x 0,64 = 16 metros; 33 + 25 = 58 pisadas. La solución es única pero necesita discusión.

Si operamos con fracciones, en lugar de hacer las divisiones y despreciar parte de los valores al aproximar, nos encontraríamos lo siguiente:

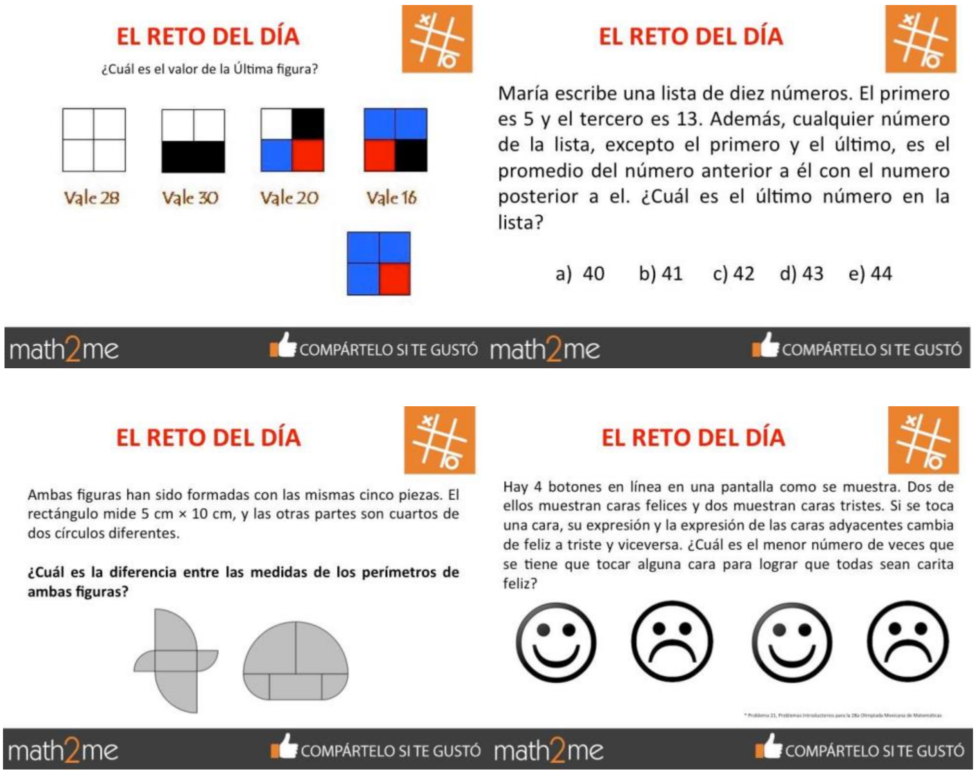
$x = 33\frac{1}{7} = \frac{232}{7}$, e $y = 24\frac{6}{7}$, y la suma de $x + y = \frac{174}{7} + \frac{232}{7} = \frac{406}{7}$ = 58, que es el total de pasos exacto.

Respuesta

El largo del jardín de Paula es de 16 metros.

Aunque ya tienen los problemas restantes del Torneo para entretenerse en verano, como son de nivel sencillo, vamos a incluir algunos más que les den algo más que pensar.

Estos están sacados del blog "Mates y Más" del amigo José Mª Vázquez:



De la revista "Educaçao e Matematica", nº 132, de la sección Problemas de Prof-Mat (2015), el concurso presentado a los participantes en ProfMat 2015 consistió en la resolución del problema:

Mármol en la plaza

El municipio de Évora tiene la intención de construir en la plaza Sertório un área rectangular (no cuadrada) pavimentada con mármol, en torno a la cual luego se colocarán varios bancos de jardín y algunos árboles para hacer sombra.

Para ello, encargó placas cuadradas de mármol que midan un metro de lado. Cierto número de placas de mármol de color rosa formarían un rectángulo más pequeño y un número diferente de placas de mármol verde crearían una banda de ancho constante alrededor de la zona rosa.

La orden ya había sido dada cuando el alcalde pensó que sería más bonito un rectángulo central verde con un borde de color rosa.

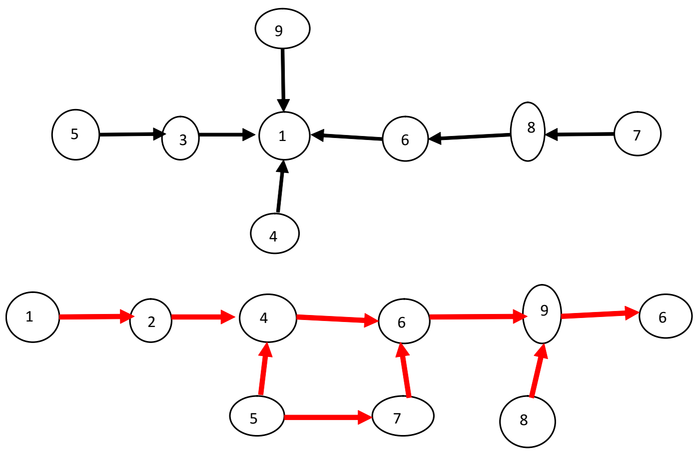
- No importa - dijo el técnico responsable después de hacer algunos cálculos. Casualmente, sin tener que cortar ninguna placa, se puede hacer una banda rosa, un poco más grande de lo previsto, alrededor de un rectángulo verde central. Por otra parte, se trata de una zona pavimentada con un área más pequeña a la que podría haberse realizado.

¿Cuál es el área de la zona rectangular a pavimentar y cuántas placas de cada color se usarán?

Y tomado de "*El gran libro de juegos para la mente*" de *Ivan Moscovich*, problema 88, que a su vez se basa en el problema de los caminos coloreados (Teoría de Grafos) de varios autores (es un problema del tipo G*rafo direccionado estrictamente bifurcado*):

Visitando el yacimiento arqueológico

En un yacimiento arqueológico hay 9 cavernas conectadas por pasadizos, todos de sentido único menos uno. Unos pasadizos están marcados en color rojo y otros en negro.
Las cavernas las hemos numerado de 1 a 9 y están unidas por los pasillos según estos esquemas que hizo el guía con el que se visita el yacimiento. Las flechas indican el sentido en que se puede ir de una a otra caverna, los pasillos no se cruzan y al menos 3 pasadizos llegan o salen de cada cueva.
Resuelve las siguientes cuestiones:



a) ¿Qué dos cavernas están unidas por un pasillo de doble sentido?

b) Dibuja un esquema con las cuevas y los pasadizos que las unen, indicando con flechas negras y rojas el sentido en que se pueden recorrer y su color.

c) Finalizada la visita, el guía quiere reunir en una de las cavernas a todos los asistentes, que se hallan dispersos por las cuevas, dando una única instrucción a todos (por el sistema de megafonía), diciéndoles qué pasillos (color) y en qué orden, deben hacer el recorrido. Por ejemplo: salir por el negro, luego otros dos negros y por último uno rojo.

c1) ¿Qué instrucción serían para que el número de pasillos recorridos sea mínimo?
c2) ¿En cuál de las cavernas acabarán todos reunidos?
c3) ¿Cuál es la única cueva desde la que tienes dos itinerarios distintos para ir al punto de reunión?

d) Si quisiera un recorrido más corto de solo dos pasillos, ¿cuál podría ser la instrucción? ¿Desde qué cavernas no se podría cumplir?

Y perdonen que insistamos: resuelvan los problemas, singulares y alejados de los cotidianos; utilícenlos con los alumnos y, sobre todo, aporten sus comentarios a la revista, sus soluciones e, incluso, nuevas propuestas. O, simplemente, cuéntennos lo sucedido en el transcurso de la clase en que probaron el problema. Queremos pensar que nuestras propuestas tienen uso en el aula. Eso nos alegraría mucho y también al resto de lectores. Vamos, anímense…

Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera de la próxima edición de la revista

NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**