

LA AXIOMATIZACIÓN EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

ALEMAÑ BERENGUER, RAFAEL ANDRÉS¹ y PÉREZ SELLES, J.F.²

¹ IES Jaime II. Alicante.

² IES Bernat de Sarrià. Benidorm.

SUMMARY

In this article the possibility of using the logic axiomatization of a scientific theory as another tool in the process of learning as a conceptual change is discussed. This way of teaching has to show certain features and ensure that debates in the classroom are centered on the logic connections between deductions. To achieve this the didactic action must give importance to the justification of ideas, debates must be metacognitive and the role of teachers must be more active and diversified. One example of this way of teaching is also introduced herein.

INTRODUCCIÓN

Son pocos los educadores que todavía se resisten a considerar el aprendizaje como un proceso de cambio conceptual protagonizado fundamentalmente por el propio alumno en lugar de entenderlo como una simple acumulación de conocimientos destinados al olvido a muy corto plazo. Ello ha permitido adoptar modernamente un modelo de aprendizaje en calidad de cambio conceptual propuesto inicialmente como tentativa pedagógica (Posner et al., 1982) y discutida posteriormente en numerosas ocasiones (Hewson y Thorley, 1989; Strike y Posner, 1985, 1992). Es más, el cambio no sólo ha de darse en el nivel conceptual sino también en el de la metodología (Gil y Carrascosa, 1985) y las actitudes.

Como se sabe, las directrices que animan esta concepción constructivista del aprendizaje significativo consisten (sumariamente expresadas) en tomar en cuenta las ideas previas de los alumnos, responsabilizar al estudiante de su propio aprendizaje, ensayar diversas estrategias didácticas según las necesidades del momento dentro de un programa de actividades flexible, tratar situaciones problemáticas que impliquen el uso de los conocimientos adquiridos, potenciar el diálogo y la

discusión en el aula, así como considerar la programación docente desde una óptica de continuo desarrollo. Sin embargo, ninguno de los más destacados autores adscritos a esta línea pedagógica (Driver y Oldham, 1986; Osborne y Freiberg, 1985; Novak, 1988) ha abordado el problema de la organización lógica de los conocimientos, una vez éstos han sido adquiridos por los alumnos.

Es muy posible que el automático rechazo de cuanto pudiera asociarse directa o indirectamente con la enseñanza memorística, estimulado por la implantación de este nuevo modelo educativo, haya provocado el postergamiento de lo que bien podría constituir una eficaz herramienta didáctica en el marco de una metodología pedagógica orientada a desarrollar las capacidades de razonamiento lógico en los alumnos, capacidades estas aplicables a cualesquiera ámbitos de la enseñanza y de la vida cotidiana. Dicha herramienta no es otra que la técnica de la *axiomatización*, tan habitual en las matemáticas (Hilbert, 1923) como para ser copiada en los últimos años por otros campos de la ciencia (Moulines, 1975; Gadhe, 1983; Ludwig, 1985; Bartelborth, 1988).

Ya es hora de hacer justicia a este poderosísimo instrumento intelectual que ha de ocupar en la enseñanza el mismo destacado papel que ya juega en la moderna epistemología de las ciencias, disipando los prejuicios en su contra creados por dos graves errores. Uno es el de confundir *axiomático* con *a priori* o *evidente por sí mismo*, lo que resulta del todo falso en la reconstrucción lógica de las ciencias experimentales (Sneed, 1971; Torretti, 1990; Balzer et al., 1987). El otro error surge al considerar las teorías científicas como meros artificios para el procesamiento de datos, que no requieren ordenamiento lógico. En el presente artículo se intentará mostrar lo equivocado de ambas posturas, mediante un ejemplo práctico de enseñanza constructivista coronada por la axiomatización y discusión de los conocimientos previamente asimilados.

CARACTERÍSTICAS DEL MÉTODO AXIOMÁTICO

La axiomatización de una teoría no consiste más que en presentarla de una forma estructurada tal que todas sus consecuencias puedan ser deducidas lógicamente a partir del menor número posible de premisas. Por ese motivo una buena axiomatización debe revelar las presuposiciones de la teoría en cuestión, identificar sus conceptos básicos, enumerar todas las suposiciones iniciales (algunas de las cuales, o todas, constituirán los axiomas), proponer una interpretación física coherente del formalismo (cuando tratemos, como hacemos ahora, de axiomatizar teorías de las ciencias experimentales) y, desde luego, ser internamente congruente, es decir, estar libre de contradicciones internas (Bunge, 1981).

Los conceptos básicos de una teoría se denominan *primitivos* o *indefinidos* y, como su nombre indica, pueden caracterizarse pero no definirse. Esto es así porque debemos evitar la regresión infinita que supondría exigir que todo concepto tuviera que ser necesariamente definido en términos de otros lógicamente anteriores a él. Aristóteles cayó en este error del «definicionismo», y todavía algunos autores no parecen haber salido de él.

Por otra parte, los enunciados básicos de la teoría se conocen como *axiomas* o *postulados*. Ambas nociones, la de primitivo y la de axioma, dependen del contexto teórico en el que nos movamos, pues en desarrollos más profundos lo que era un postulado puede verse relegado al estado de teorema al derivarse de enunciados lógicamente más potentes (Bunge, 1973). Así, el concepto de *fuerza* es un primitivo de la mecánica clásica de partículas, pero resulta definible en otros marcos teóricos en términos del concepto de *potencial*. Asimismo, la ley fundamental de la dinámica newtoniana es un axioma de esta teoría que, a su vez, puede deducirse de la primera ley de Cauchy para la mecánica clásica de medios continuos. Por lo tanto, únicamente tiene sentido afirmar que un primitivo o axioma es básico en relación con una teoría dada.

Es cierto que, desde un punto de vista semántico, todos los contenidos de una teoría han de considerarse en pie de igualdad. En lo que respecta al significado y a la verdad, no hay ideas de primera o segunda clase: tan importantes son las ecuaciones de campo que implican teoremas de conservación, como tales teoremas de los cuales se infieren los principios variacionales que permiten deducir a su vez dichas ecuaciones de campo. Sin embargo, la distinción «básico-derivado» es puramente lógica y no atañe a la semántica del enunciado. Esta diferencia es útil incluso aunque dependa del contexto, ya que nos obliga a buscar las ideas centrales, destacar aquellas lógicamente fundamentales y evitar la caída en los círculos viciosos del definicionismo.

Los axiomas, en fin, deben desempeñar un cometido formal (especificando la categoría lógica y matemática de todo primitivo), un cometido semántico (relacionando los símbolos con algunos entes de la realidad física y sus propiedades) y un cometido físico (tratando de representar leyes físicas objetivas, vínculos entre magnitudes y condiciones de contorno).

Pero para poder iniciar la axiomatización de una teoría, hemos de examinar primero ciertos componentes del sustrato en que se fundan todas las teorías ideadas hasta el momento. Estos componentes son los presupuestos formales, los epistemológicos y los profísicos. Veámoslos brevemente a continuación.

Presupuestos formales: Los enunciados de la lógica formal son los únicos que pueden explorarse sin recurrir a nada externo a la lógica misma y constituyen un ingrediente básico en toda construcción intelectual válida. Partiendo de esto, lo mínimo que una teoría científica, como las que aquí nos interesan, da por sentado es la validez del cálculo ordinario de predicados (bivalente, con valor de «verdadero» y «falso») junto con la microteoría de la identidad. Estos dos presupuestos son suficientes para analizar la forma –no el contenido– de los conceptos, fórmulas y razonamientos que se presentan en la ciencia (Quine, 1993).

Además de las pautas lógicas, las teorías de las ciencias experimentales se fundan en la colección de desarrollos matemáticos que de hecho se utilizan como lenguaje para expresar sus resultados. Y las matemáticas se basan a su vez en las teorías de conjuntos y las teorías elementales de grupos. En resumen, la axiomática de las ciencias naturales presupone aquellas partes de la lógica y las matemáticas que habrá de explotar con posterioridad para reconstruir ordenadamente sus teorías (Suppes, 1966).

Presupuestos epistemológicos: La investigación científica comporta la asunción de ciertas hipótesis generales sobre la realidad, el significado o la verdad, que están lejos de ser construcciones puramente formales o sintácticas, entrando dentro del terreno de la epistemología (Tarski, 1956). Estas hipótesis son de dos clases: *semánticas* y *metafísicas*. Un enunciado semántico, por ejemplo, puede actuar a la vez como regla de designación y como criterio de interpretación.

Tomemos el caso del enunciado: «El valor de la función *coordinada material* $X(\cdot, k, t)$ representa la posición de la partícula en el sistema de referencia k y en el instante t .» Este enunciado actúa como regla de designación señalando el símbolo que asociamos a un determinado concepto físico. Pero va más allá, puesto que interpreta que una propiedad (la posición) de una entidad física (una partícula) queda totalmente definida por una función de tres argumentos: las partículas, los sistemas de referencia y los instantes. Estas suposiciones podrían ser falsas, pues de hecho los operacionalistas sustituirían los referenciales k por los observadores o ; asimismo, en la física cuántica, esta función no existe salvo como promedio de un sistema.

Los enunciados de naturaleza metafísica son los que afirman la existencia de objetos físicos cuya realidad y propiedades no dependen de ser percibidos, pensados o medidos. También declaran que todo objeto físico encaja en algún conjunto de leyes físicas, pautas estables y objetivas. Y, por último, se presupone que es posible conocer, de forma tentativa y aproximada alguna de estas leyes físicas así como ciertas características de los objetos físicos individuales. Estas tres suposiciones son metafísicas (Smart, 1963), puesto que conciernen a la existencia del mundo externo, su legalidad y su cognoscibilidad; no pueden ser confirmadas ni refutadas por la experiencia, pero su aceptación tácita o expresa constituye la condición imprescindible para el desarrollo de las ciencias naturales (Suppes, 1969).

Presupuestos profísicos: Por último, mencionaremos aquellas hipótesis e ideas que, sin ser puramente formales o epistemológicas, aparecen como ingrediente general y básico de todas las teorías científicas de un modo u otro formalizadas. Uno de estos componentes profísicos es la teoría general de sistemas (Klir, 1980), que caracteriza las nociones de «sistema», de «partes de un sistema» y de «pertenencia a un sistema». A ello sigue la idea de *propiedad física* como un atributo poseído por alguna cosa física (no hay propiedades sin algo que las posea), la de *estado de un sistema*, las nociones de *espacio y tiempo*, así como las de *causación y probabilidad física* (Margenau, 1970).

EJEMPLO PRÁCTICO DE APLICACIÓN DE LA AXIOMÁTICA

A continuación esbozaremos un caso práctico de axiomatización para alumnos de nivel preuniversitario, como ejemplo de lo que puede llegar a lograrse con un uso racional de este poderoso instrumento. La experiencia se realiza en un grupo de segundo curso de bachillerato (antiguo COU) –compuesto por treinta alumnos de entorno urbano, clase media, capacidades intelectuales normales, sin elementos especialmente conflictivos entre ellos– y consiste en la formulación axiomática de la mecánica clásica de partículas (Bunge, 1967; Mosterín, 1987) como colofón a su planteamiento constructivista previo.

Tras las precedentes etapas de exposición del problema, exploración de las ideas previas de los alumnos, formulación y discusión de hipótesis propuestas, hasta lograr finalmente el cambio conceptual deseado, se ensaya una tentativa de axiomatizar el conocimiento adquirido. A tal efecto, comenzamos haciendo explícitos los presupuestos antes comentados, que también son objeto de animado debate entre el profesor y los alumnos, así como entre los propios alumnos. Una vez establecido el consenso de que esas premisas resultan indispensables para continuar en nuestra elucidación de lo aprendido, las exponemos ordenada y claramente.

Presupuestos formales: La lógica ordinaria (con su cálculo de predicados y su teoría de la identidad) y el análisis matemático elemental (con todas las premisas de las teorías de conjuntos, algebraicas, topológicas y aritméticas supuestas por el análisis).

Presupuestos epistemológicos: Las suposiciones semánticas (teoría del significado y la verdad) y metafísicas (independencia e inteligibilidad del mundo externo) inherentes a la investigación científica.

Presupuestos profísicos: La teoría elemental de sistemas, el análisis dimensional, la teoría newtoniana del tiempo universal y la validez física de la geometría euclídea.

En un segundo paso, hemos de determinar la base primitiva de nuestra teoría, es decir, cuál es el manojito de conceptos indefinidos de la misma a los que se asigna un significado y que figuran en sus enunciados físicos. En nuestro caso, tras la correspondiente discusión guiada por el profesor para no perder el objetivo de vista, la conclusión es la que sigue.

Base primitiva: E^3 (variedad tridimensional diferenciable que representa el espacio físico), T (continuo unidimensional representativo de tiempo absoluto postulado por Newton), \mathcal{C} (cuerpo o partícula material), k (sistema de referencia), s (posición de la partícula), m (masa de la partícula) y f (fuerza).

Una vez hecho esto, pasamos a realizar una axiomatización informal de la mecánica clásica de partículas, llamando al conjunto de todas las partículas sobre las que regirá nuestra teoría. Entonces decimos que M es una mecánica clásica de partículas si existe el quinteto $\{ \mathcal{C}, E^3, k, T, s, m, f \}$ y cumple los axiomas:

1) $M = \{ \mathcal{C}, E^3, k, T, s, m, f \}$, esto es, la teoría consta de todos sus primitivos.

2) $\mathcal{C} \cap \text{Card}\{ \mathcal{C} \}$ es finito. Afirmamos con este segundo axioma que existen partículas materiales y que su número no es infinito (\cap es el símbolo lógico de la conjunción y).

3) T es un intervalo de la recta real R ; el tiempo es un parámetro monótono representado por un número real.

4) $s: \mathcal{C} \times T \times k \rightarrow R^3, \quad \frac{d^2 s(\cdot, t)}{dt^2} = f(\cdot, t)$

El cuarto axioma establece que la posición es una función que a cada partícula p de \mathcal{P} , cada instante t de T y cada sistema de referencia k , se les asocia una terna de números (vector de posición) pertenecientes a R^3 . Además, para cada partícula y cada instante existe la derivada segunda de la posición respecto al tiempo (la aceleración).

5) $m: \mathcal{P} \times T \times N \rightarrow R^+$. La masa es otra función que a cada partícula material asigna un número real positivo.

6) $f: \mathcal{P} \times T \times N \rightarrow R^3$, $(p, t, k) \mapsto f_i(p, t)$ es absolutamente convergente.

Este sexto axioma caracteriza la noción de *fuerza* como una función cuyo dominio son las partículas materiales, los instantes de tiempo y los números naturales (esto último expresa que los conjuntos de fuerzas son numerables), y cuyo recorrido es el conjunto de todas las ternas de números reales (manifestando así el carácter vectorial de las fuerzas). Asimismo se añade que la suma total de las fuerzas que actúan sobre una cierta partícula en un instante dado es siempre finita (la fuerza total neta sobre un cuerpo no puede ser infinita).

7) $\frac{d}{dt} [m(p) \cdot ds(p, t)/dt] = \sum_{i \in N} f_i(p, t)$.

Como era de esperar, este último axioma establece la ley fundamental de la dinámica igualando la derivada temporal del momento lineal (la masa por la derivada temporal de la posición) de una partícula a la fuerza neta que ésta sufre en un instante dado.

DISCUSIÓN Y DEBATE

La enumeración de los axiomas de la teoría incita a un interesantísimo debate en el que alumnos y profesor destacan lo que les parece más importante en la reconstrucción lógica realizada, razonando cuáles serían las consecuencias de modificar uno o más axiomas, de agregar nuevos postulados o de comparar cuanto puede deducirse lógicamente de los postulados expuestos frente a lo que a menudo se da erróneamente por descontado en muchos textos al uso. Las conclusiones obtenidas en esta animada discusión podrían catalogarse en cuatro apartados que examinaremos seguidamente.

Adición de nuevos postulados: La ampliación del conjunto de axiomas inicialmente aceptados, enriquece la teoría aumentando su capacidad deductiva a la vez que permite realizar un mayor número de predicciones y abarcar un mayor número de fenómenos. Tras la criba de la puesta en común ante el grupo –siempre bajo la orientación del docente– se perfilaron diversas posibilidades:

1) Podemos añadir a los anteriores axiomas el que constituye el principio «débil» de acción y reacción; es decir, aquél que establece que las fuerzas mutuamente ejercidas por dos partículas han de ser iguales en magnitud pero opuestas en sentido, aunque sin especificar que se ejerzan a lo largo de la línea que une ambas masas

puntuales. Esta ley (que fue la originariamente formulada por Newton) no se cumple para todos los tipos de fuerzas (las fuerzas entre cargas eléctricas predichas por la ley de Biot-Savart pueden violarla), sólo garantiza la conservación del momento lineal (Wangness, 1992).

El nuevo postulado requerido sería (8): $f_i(p, t) = -f_i(p', t)$, y con él obtendríamos una mecánica clásica newtoniana de partículas.

2) Un paso más adelante nos conduce al principio «fuerte» de acción y reacción, exigiendo que las fuerzas se hallen sobre la recta que une las partículas (fuerzas centrales). El nuevo axioma que hemos de agregar con este fin es (9): $s(p, t) \cdot f(p, t) = -s(p', t) \cdot f(p', t)$, siendo \cdot el símbolo del producto vectorial. Esta adición permite ahora garantizar la conservación del momento angular para sistemas de partículas en ausencia de fuerzas externas. Llegamos así a una mecánica clásica newtoniana ampliada de partículas (Aharoni, 1972).

3) Aun cuando los sistemas de cargas electromagnéticas pueden vulnerar ambas versiones del principio de acción y reacción junto a los teoremas de conservación citados, siempre es posible hallar alguna generalización del momento lineal y del momento angular que sí se conserve. Así, en un sistema aislado de cargas eléctricas en movimiento, lo que se conserva es la suma del momento «mecánico» (atribuible a la partícula material que porta la carga y que existiría aun cuando no hubiese tal carga) y el «electromagnético», imputable a una nueva entidad física, el «campo» electromagnético.

Este razonamiento nos hace reflexionar sobre el carácter de acción a distancia de las fuerzas newtonianas de acción y reacción, destacándose la necesidad de introducir aquí también el concepto de *campo de fuerzas* a fin de evitar velocidades infinitas (y por ello carentes de sentido físico) en la propagación de interacciones (Landau, 1973). A partir de aquí no resulta difícil introducir el concepto de *potencial* como un campo escalar, mostrando que con este paso la fuerza deja de ser un concepto primitivo, pues ahora puede derivarse del potencial, $f = -dU/dr$.

Eligiendo la forma $U = -GMm/r$, obtenemos la ley newtoniana de la fuerza gravitacional entre dos masas puntuales cualesquiera M y m , separadas por una distancia r : $f = GMm/r^2$ (prescindiendo de notación vectorial). En esta etapa es conveniente explicar que Newton instauró su ley de gravitación como una interacción a distancia y que el devenir de la historia introdujo posteriormente el concepto de *campo*. Un noveno axioma que estableciese la forma de la fuerza gravitacional (o en su caso la del potencial gravitatorio correspondiente) nos deja con una mecánica clásica newtoniana, ampliada, gravitacional y de partículas.

4) Por último, si introducimos el concepto primitivo de *tensión mecánica* y el de *densidad de materia*, como el cociente entre la masa y el volumen, al tiempo que cambiamos el concepto primitivo de *partícula material*

por el de *medio material continuo B*, podemos esbozar el perfil básico de la mecánica clásica de medios continuos (Truesdell, 1975). En ésta, las leyes de Newton (sólo válidas para partículas puntuales) pierden vigencia y hemos de considerar, por ejemplo, la primera ley del movimiento de Cauchy $[d^2s(\cdot, t)/dt^2] = T + f_b$, siendo

T la divergencia de las tensiones en el seno del medio y f_b la densidad de fuerza ejercida sobre el mismo en cada unidad de volumen.

El docente hace notar aquí que la mecánica de medios continuos es lógicamente más importante que la de los puntos (Truesdell, 1966), dado que –como sabemos de las matemáticas elementales– de un medio continuo puede extraerse un punto, pero ninguna agregación finita o infinita de puntos proporcionará un medio continuo (Suppes, 1966). En efecto, podemos recuperar la ley fundamental de la mecánica (en versión: fuerza = masa \times aceleración) si anulamos T y multiplicamos ambos miembros por la unidad de volumen.

Otra consecuencia de esta generalización es que el conocido enunciado según el cual la aceleración gravitacional sólo depende del punto del campo gravitatorio en que nos encontremos se verifica únicamente cuando la divergencia de las tensiones es nula. Recordemos que, para una masa puntual y constante m en el campo gravitatorio de otra M , siempre podíamos poner $m \cdot a = GMm/r^2$ $a = GM/r^2$, al haber simplificado m en ambos miembros. Pero, si adoptamos la formulación de Cauchy de medios continuos, generalmente válida para cuerpos extensos, resulta que ello sólo es cierto si $T = 0$. En concreto, si este término adquiere un valor negativo, puede llegar a contrarrestar la acción mecánica del campo gravitatorio. Ésta es la explicación, por ejemplo, por la cual la aceleración de la gravedad no aplasta los objetos contra la superficie terrestre; sus tensiones mecánicas internas lo evitan (Truesdell, 1975).

Modificación de axiomas: En este apartado nos dedicamos a explorar las consecuencias de alterar algunos de los postulados sobre los que construimos previamente la teoría.

1) Si suprimimos el concepto primitivo de *partícula material* sustituyéndolo por el de *medio material*, sustituimos el axioma 4 referente a la posición de la partícula por el principio de Huygens, y reemplazamos el axioma 7 de la ley de la dinámica por la ecuación de ondas; obtenemos así una primera aproximación a la física ondulatoria. Remodelando algunos otros postulados puede introducirse las nociones de *amplitud, longitud de onda; frecuencia, período y fase*. A continuación se comentan la diferencia entre los trenes infinitos de ondas y los pulsos o paquetes de ondas, para finalizar mencionando que la velocidad de una onda una vez emitida no depende de la velocidad del foco emisor, al contrario de lo que ocurre con las partículas lanzadas por una fuente en movimiento (Bunge, 1967).

2) Actuando como antes, pero sustituyendo el primitivo concepto de *partícula* por el de *cuantón*, intercambiando el axioma 4 por las relaciones de conmutación entre

operadores y reemplazando el axioma 7 por la ecuación de Schroedinger, llegaremos a una versión informal de la teoría cuántica no relativista (Bunge, 1967).

3) Por último, modificando el axioma 3 de modo que t dependa del sistema de referencia k , a la vez que añadimos el postulado de constancia de la velocidad de la luz c en todo k , habremos abierto el camino hacia la teoría de la relatividad de Einstein (Resnick, 1981).

Consecuencias de los axiomas: Algunas consecuencias lógicas de los axiomas aceptados como base de la mecánica clásica de partículas no son revisadas suficientemente para evitar ciertas confusiones y malentendidos ampliamente diseminados.

1) La mecánica clásica de partículas y, en particular, las leyes newtonianas del movimiento sólo rigen estrictamente para masas puntuales, lo que explica que su aplicación a cuerpos extensos dé lugar a efectos perturbativos, como las bien conocidas mareas.

2) Concretamente, las leyes newtonianas del movimiento resultan válidas únicamente en sistemas de referencia inerciales, pues de lo contrario aparecen efectos dependientes de la aceleración del referencial (fuerzas centrífugas). La primera ley de la dinámica, o ley de inercia, aparece ahora como una consecuencia de la segunda cuando la aceleración se anula. Pero, por otro lado, la ley de la gravitación universal indica que las fuerzas de atracción gravitatoria poseen un alcance infinito. Ello nos brinda la oportunidad de discutir las condiciones en las cuales este principio de inercia se verificará realmente o si sólo se trata de una «ley-límite»: un enunciado que establece una pauta de comportamiento en el límite de una situación ideal (Alemañ, 1998).

3) La segunda ley de Newton no afirma que la fuerza sea igual al producto de la masa por la aceleración ($f = m \cdot a$), sino a la derivada temporal del momento lineal ($f = dp/dt$). Aunque suelen ser equivalentes, ambas formulaciones difieren en sistemas en los que la masa es no constante con el tiempo (un bloque de hielo que se funde durante su movimiento, por ejemplo). Ello nada tiene que ver con la pretendida variación relativista de la masa con la velocidad, lo cual es una concepción inconsistente con el formalismo de la propia relatividad (Alemañ, 1997).

4) Entre la fuerza y la derivada del momento lineal no hay identidad sino igualdad. Éste es un punto muy importante, ya que algunos autores, como Alonso y Finn (1970) entienden que *fuerza* es la palabra con que designamos abreviadamente la derivada temporal del momento lineal; es decir, para ellos $f = dp/dt$, en lugar de $f = m \cdot a$. Sin embargo, de los axiomas se desprende con toda claridad que la fuerza es un primitivo caracterizado por una función (que, en el caso de la gravedad clásica, consiste en el producto de la constante G por dos masas, dividido todo ello entre el cuadrado de la distancia) enteramente distinta al producto de la masa por la aceleración.

5) El valor numérico de la magnitud *masa* viene dado por la misma función tanto en la segunda ley de la dinámica como en la de la gravedad. Esto significa que, en este marco teórico, las tres nociones de masa distinguidas por Newton, la masa «material» (obtenida de multiplicar la densidad de un cuerpo por su volumen, $V = m_m$), la masa «gravitatoria» (definida como el cociente de la fuerza gravitacional que sufre un cuerpo entre la aceleración que ésta le produce, $f_g/a = m_g$), y la masa «inercial» (obtenida de dividir cualquier otra fuerza no gravitacional ejercida sobre un cuerpo entre la aceleración que le provoca, $f/a = m_i$) son en realidad idénticas.

No tendría por qué ser necesariamente así: una fuerza gravitacional ejercida sobre un cuerpo podría, en principio, imprimirle una aceleración distinta a la ocasionada por una fuerza de igual magnitud pero de distinta naturaleza (por ejemplo, originada por un muelle, por una interacción eléctrica, etc.). Y, no obstante, la experiencia indica lo contrario (Sánchez-Ron, 1983; Hoffman, 1985; Cabrera, 1986; Einstein e Infeld, 1986). De hecho, la igualdad estricta –o mejor sería decir *identidad*– entre ambas fue uno de los postulados a los que Einstein se atuvo para desarrollar su teoría relativista de la gravitación.

6) Los límites de validez de la teoría se establecen para velocidades pequeñas comparadas con la de la luz, campos gravitacionales débiles o lentamente variables, en promedios cuánticos que conduzcan a las magnitudes clásicas (o, de otro modo, para acciones mucho menores que la constante de Planck, energía · tiempo $\ll h$), para partículas puntuales, sistemas de masa constante y en ausencia de efectos electromagnéticos.

CONCLUSIÓN

La organización axiomática de una teoría física previamente asimilada de modo constructivista es un objetivo del todo factible y presenta mayores ventajas de las consideradas hasta el momento. Con este método, las presuposiciones se reconocen y mantienen bajo control,

el referente no se pierde de vista, la asignación de significados se realiza de forma sistemática, es posible deducir multitud de consecuencias, se evita el definicionismo y se facilita el aprendizaje. En relación con la mejora de la asimilación, los psicólogos experimentales (Miller, 1967) afirman que el rendimiento de aprendizaje es mucho mayor en un material inteligentemente organizado que en otro desordenado.

Los alumnos sobre los que se realizó la experiencia mostraron una mayor comprensión de los conceptos y una mejor capacidad de organizar lógicamente sus conocimientos. Se planteó la cuestión de si era mejor tomar como primitiva la noción de *fuerza* o la de *energía*. La conclusión fue, tras un interesante debate, que ambas formulaciones son igualmente legítimas diferenciándose tan sólo por el punto de vista adoptado, como un mapa topográfico y otro geológico de un mismo territorio. La distinción entre masas puntuales, cuerpos extensos y medios continuos también dio lugar a una animada controversia, en la que surgieron cuestiones concernientes al concepto de *continuo matemático* y a la relación entre los modelos abstractos y las entidades reales de las que se ocupa la física. Los alumnos percibieron, asimismo, la disparidad entre la mecánica de partículas y la física ondulatoria de un modo que antes ignoraban. Y tampoco fue difícil que comprendieran que los límites de la validez de la teoría vienen dados por la aplicabilidad, o no, de los axiomas en que ésta se funda, los cuales se plantean de manera tentativa y siempre a expensas del veredicto de la experiencia.

La axiomatización permite también exponer las teorías científicas como estructuras –en la línea de la moderna epistemología científica– cuyos postulados básicos pueden alterarse de acuerdo con las necesidades lógicas y el veredicto de los hechos, creando una suerte de constructivismo estructuralista cuyo interés pedagógico a nadie debe ocultársele. Asimismo, la axiomática puede enseñar a los alumnos que la veracidad de muchos enunciados científicos es en gran medida contextual, debilitando en ellos el espíritu dogmático y animándoles al pensamiento riguroso y a los razonamientos lógicos en todos los ámbitos de sus vidas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AHARONI, J. (1972). *Lectures on mechanics*. Oxford: Oxford Univ. Press.

ALEMAÑ BERENQUER, R.A. (1997). Errores comunes sobre relatividad entre los profesores de enseñanza secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 15(3), p. 301.

ALEMAÑ BERENQUER, R.A. (1998). *Grandes metáforas de la física*. Madrid: Celeste-MEC.

ALONSO, M. y FINN, E. (1970). *Física. Vol I. Mecánica*. México: Fondo Educativo Interamericano.

BALZER, W., MOULINES, C.U. y SNEED, J.D. (1987). *An Architectonic for Science: The structuralist program*. Dordrecht (Holanda): D. Reidel.

BARTELBORTH, P. (1988). *Eine logische Rekonstruktion der klassischen elektrodynamik*. Frankfurt: P. Lang Ed.

- BUNGE, M. (1967). *Foundations of Physics*. Nueva York: Springer-Verlag.
- BUNGE, M. (1973). *A world of system*. Boston: Reidel.
- BUNGE, M. (1981). La investigación científica. Barcelona: Ariel.
- CABRERA, B. (1986). *Principio de relatividad*. Barcelona: Alta Fulla y Fontalba.
- DRIVER, R. y OLDHAM, V. (1986). A constructivist approach to curriculum development in science. *Studies in Science Education*, 13, p. 105.
- EINSTEIN, A. e INFELD, L. (1986). La evolución de la física. Barcelona: Salvat
- GADHE, U. (1983). *T-Theorizität und Holismus*. Frankfurt: P. Lang Ed.
- GIL, D. y CARRASCOSA, J. (1985). Science learning as a conceptual and methodological change. *European Journal of Science Education*, 7(3), p. 231.
- HOFFMAN, B. (1985). *La relatividad y sus orígenes*. Barcelona: Labor
- HEWSON, P.W. y THORLEY, N.R. (1989). The conditions of conceptual change in the classroom. *International Journal of Science Education*, 11, p. 541.
- HILBERT, D. (1923). Die logische Grundlagen der Mathematik. *Mathematischen Annalen*, 88, p. 151.
- KLIR, G.J. (1980). *Teoría general de sistemas*. Madrid: ICE
- LANDAU, L. y LIFSHITZ, E. (1972). *Curso de física teórica. Vol. 2. Teoría clásica de los campos*. Moscú: MIR.
- LUDWIG, G. (1985). *An axiomatic basis for quantum mechanics* (2 vol.). Berlín: Springer
- MARGENAU, H. (1970). *La naturaleza del mundo físico*. Madrid: Tecnos
- MILLER, G.A. (1967). *The psychology of communication*. Nueva York: Basic Books.
- MOSTERÍN, J. (1987). *Conceptos y estructuras en la ciencia*. Madrid: Alianza Univ.
- MOULINES, C.U. (1975). A logical reconstruction of simple equilibrium thermodynamics. *Erkenntnis*, 9, p. 101.
- NOVAK, J.D. (1988). Constructivismo humano: un consenso emergente. *Enseñanza de las ciencias*, 6(3), p. 213.
- OSBORNE, J.R. y FREYBERG, P. (1985). *Learning in Science. The implications of children's Science*. Londres: Heinemann.
- POSNER, G.J., STRIKE, K.A., HEWSON, P.W. y GERTZOG, W.A. (1982). Accommodation of a scientific conception: Towards a theory of conceptual change. *Science Education*, 66, p. 211.
- QUINE, W.V.O. (1993). *Los métodos de la lógica*. Barcelona: Planeta.
- RESNICK, R. (1981). *Introducción a la teoría especial de la relatividad*. México: Limusa.
- SÁNCHEZ RON, J.M., (1983). *El origen y desarrollo de la relatividad*. Madrid: Alianza
- SMART, J.J.C. (1963). *Philosophy and scientific realism*. Londres: Routledge & Kegan.
- SNEED, J.D. (1971). *The Logical Structure of Mathematical Physics*. Dordrecht (Holanda): D. Reidel.
- STRIKE, K.A. y POSNER, G.J. (1985). A conceptual change view of learning and understanding. West & Pines (eds.). *Cognitive Structure and Conceptual Change*. Orlando (Florida): Academic Press.
- STRIKE, K.A. y POSNER, G.J. (1992). A revisionist theory of conceptual change. Duschl & Hamilton (eds.). *Philosophy of science, cognitive psychology, and educational theory and practice*. Nueva York: State University of New York Press.
- SUPPES, P. (1966). *The role of axiomatic and problem solving in Mathematics*. Boston: Gin & Co.
- SUPPES, P. (1969). *Studies in methodology and foundations of science*. Dordrecht (Holanda): Reidel.
- TARSKI, A. (1956). *Logic, semantics and metamathematics*. Oxford: Clarendon Press.
- TORRETTI, R. (1990). *Creative Understanding: Philosophical Reflections on Physics*. Chicago: University of Chicago Press.
- TRUESDELL, C. (1966). *Six lectures on modern natural philosophy*. Nueva York: Springer Verlag.
- TRUESDELL, C. (1975). *Ensayos sobre la historia de la mecánica*. Madrid: Tecnos.
- WANGNESS, R.K. (1992). *Campos electromagnéticos*. México: Limusa.

[Artículo recibido en marzo de 1998 y aceptado en junio de 1998.]