LA ENSEÑANZA DE LA MULTIPLICACIÓN ARITMÉTICA: UNA BARRERA EPISTEMOLÓGICA

José Antonio Fernández Bravo *

La composition multiplicative des nombres se constitue sur le plan opératoire en même temps que celle des classes (ensemble d'unités). Il n'y a pas un stade de la multiplication arithmétique; sitôt découvert, ce pouvoir se généralise immédiatement.

J. Piaget[1]

SÍNTESIS: El aprendizaje de la matemática en educación primaria necesita incorporar un significado que dote de fundamento epistemológico el conocimiento adquirido. Cuando buscamos ese significado para un concepto matemático corremos el riesgo de desnaturalizar los principios científicos que dan sentido al concepto, en este caso, en la estructura matemática.

Al expresar, en los procedimientos didácticos, la multiplicación aritmética como suma de sumandos iguales, arriesgamos la comprensión del concepto en su auténtica ortodoxia. En este artículo se dan razones que se apoyan fundamentalmente en errores cometidos por los escolares. Para finalizar, se sugiere un procedimiento para la intervención educativa en la enseñanza de la multiplicación.

SÍNTESE: *A aprendizagem da matemática na educação primária necessita incorporar um significado que dote de fundamento epistemológico o conhecimento adquirido. Quando buscamos esse significado para um*

* Profesor de Didáctica de la Matemática en el Centro de Enseñanza Superior «Don Bosco» de la Universidad Complutense de Madrid, España.

[1] Citado por Beauverd (1967, p. 48). Traducción: «La composición multiplicativa de los números se constituye sobre el plan operatorio al mismo tiempo que la de clases (conjunto de unidades). No hay un estadio de la multiplicación lógica y un estadio de la multiplicación aritmética; tan pronto es descubierta esa capacidad se generaliza inmediatamente».

conceito matemático, corremos o risco de desnaturalizar os princípios científicos que dão sentido ao conceito, neste caso, na estrutura matemática.

Ao expressar, nos procedimentos didáticos, a multiplicação aritmética como soma de parcelas iguais, arriscamos a compreensão do conceito em sua autêntica ortodoxia. Neste artigo, apresentam-se razões que se apóiam fundamentalmente em erros cometidos pelos escolares. Para finalizar, sugere-se um procedimento para a intervenção educativa no ensino da multiplicação.

ABSTRACT: *Mathematics' learning in primary school needs to incorporate meanings. Meanings that give epistemological foundations to acquired knowledge. While looking for a meaning for a mathematical concept, we take the chance of denaturalizing the scientific principals that confer sense to the concept, in this case, mathematical structure.*

When we express, during didactic procedures, that arithmetic multiplication is the addition of equal addends, we jeopardize the comprehension of the concept in its authentic orthodoxy. Reasons given in this article are fundamentally grounded in mistakes made by students. Finally, a procedure for educative intervention in the teaching of multiplication is suggested.

1. INTRODUCCIÓN

No es difícil recordar alguna situación en la que nos enseñaron algo que nosotros desconocíamos. La acción de «retener» lo que se nos había dicho implicaba, para nosotros, el haber «aprendido» y, generalmente, percibíamos como verdadero ese conocimiento.

Que sea verdad que sabemos, nada dice de la verdad de ese saber. Durante años se enseñaba en las escuelas: que la tierra era plana, que el sol giraba alrededor de ésta, que todo círculo quedaba dividido en dos partes iguales por un diámetro... Supongo que, cuando el aprendizaje de estas afirmaciones fuese evaluado, el calificar con un «bien» o un «mal», se correspondería con la «verdad» o la «mentira», respectivamente. La verdad no se refiere, en esta clasificación, a la verdad del conocimiento adquirido sino a la verdad de adquirir así ese conocimiento[2].

[2] «Dotar la investigación de una aproximación sistémica y situada, que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza.» R. Cantoral y R. M. Farfán (2003, p. 36).

2. UNA SERIA DIFICULTAD DIDÁCTICA

El conocimiento heredado nos dice que la multiplicación debe ser introducida, didácticamente, como «una suma de sumandos iguales». No obstante, una suma no es una multiplicación. Mientras que en las situaciones sumativas sólo aparece un conjunto (manzanas y manzanas; peras y peras; estanterías y estanterías), en las situaciones en las que interviene la multiplicación aparecen dos conjuntos, claramente definidos, y una relación constante (cajas y manzanas, bollos y euros, estanterías y libros, años y días). Les decimos a los niños que sólo se pueden sumar «cosas iguales» y aunque en la multiplicación aparezcan «cosas distintas» nos empeñamos en que sea una suma o, peor aún, que la actitud mental sea la misma en ambas situaciones[3].

La mayoría del profesorado asegura que los niños tienen dificultades con los problemas de multiplicar puesto que no son pocos los que, en principio, los confunden con la suma y, ante este problema: «Tengo 3 estanterías y en cada estantería hay 5 libros, ¿cuántos libros tengo en total?», responden: 3 + 5 = 8. El niño ha hecho problemas de sumar pero no de multiplicar, pero si le decimos que la multiplicación es una suma, ¿qué error ha cometido? Posteriormente, y a fuerza de hacer problemas iguales, el niño logra intuir la aplicación del símbolo «x», más o menos «correctamente». Mucho se desprende esta manera de proceder de los fundamentos de las matemáticas para la distinción intelectual operativa, por tanto, mucho se aleja de la posibilidad de que el alumno sea consciente de su pensamiento relacional.

Nos encontramos con una seria dificultad didáctica respecto a la comprensión del concepto, cuando decimos que una multiplicación es una suma de sumandos iguales ya que, no sólo estamos diciéndole al niño que la multiplicación es «eso», sino que todo lo que no sea «eso», no vale como multiplicación[4].

---

[3] Parece que nos hubiéramos quedado en Egipto y la Mesopotamia. En Egipto la operación aritmética fundamental era la suma y la multiplicación se hacía por sucesivas duplicaciones. Seguimos utilizando hoy esa acepción de «múltiple» sin profundizar en el sentido y significado matemático actual de esta operación. En la Mesopotamia hacían uso de muchas tablas, entre las que había tablas de multiplicar y el uso que de éstas hacían los escribas tenía como función principal el cálculo rápido y no la intencionalidad del recuerdo memorístico de resultados.

[4] Cuántas veces he soñado con un grupo de buenos profesores, que presenten, encaminen, traten y sugieran. Quizás algún día podamos reescribir desde un punto de vista

3. RAZONES DE DIFERENCIACIÓN

No podríamos hablar de construcción del conocimiento matemático si las ideas que son «válidas» no son válidas para siempre. Una idea *D* se ha descubierto y ha surgido a partir de otra idea *C,* anterior a *D,* y ésta se ha construido apoyándose en *B,* que ha surgido de la validez de la idea *A,* anterior a *B.* Una idea es matemática si es verdadero lo que afirma o falso lo que niega, se expresa con el mínimo discurso y es demostrable, con independencia de *espacio* y *tiempo*. Si 2 más 2 son 4 cuando se tienen siete años no se puede admitir un resultado distinto a 4, por ejemplo, a los doce años.

«Demostramos» que una multiplicación es una suma de sumandos iguales mediante, supongamos la expresión: 5 + 5 = 2 x 5; pero, con cierta objetividad, cualquier niño percibe diferencias. El primer miembro de la relación aparecen dos números iguales con el símbolo «+», en el segundo miembro aparecen dos números distintos con el símbolo «x», luego es evidente que se diferencian, y si hay diferencias, ¿cómo pueden ser iguales? Matemáticamente se respeta esta relación en tanto que: 5 + 5 = 10 y 2 x 5 = 10; lo único que dice es que equivalen al mismo número, respetándose así la relación «=» en esas expresiones.

Que el agua hierva cuando se pone al fuego y que el agua hirviendo queme, no quiere decir que el agua sea fuego. Habrá gente que llegue a Madrid por la Nacional II y gente que llegue a Madrid por la Nacional VI, pero eso no significa que esas carreteras sean iguales. Que el rayo de sol sea necesario para que una hoja esté verde, no quiere esto decir, como afirma Sujomlinski, que se identifique el sol con la hoja verde.

Si partiésemos, utilizando la reversibilidad de las relaciones anteriores, por ejemplo del número ocho (8), como este número se podría expresar como: 7 + 1, y también como: 9 – 1, se me puede respetar la relación: 7 + 1 = 9 – 1, pero de ahí no puedo inferir que una suma sea una resta.

---

didáctico estas palabras de Sergio Yáñez (2005, p.108): «En esas épocas de múltiples agitaciones, cuando se leía y se hablaba de psicoanálisis, de Marx, de Platón y Aristóteles, de Balzac, Dostoievski y Thomas Mann, de Foucault, Althouser y muchos otros, apareció el nombre de Nicolás Bourbaki, seudónimo de un grupo de los mejores matemáticos de la época que pretendían redactar un tratado que presentara en forma axiomática el cuerpo esencial de la matemática contemporánea».

Es matemáticamente correcto que: 35 = 7 x 5 = 40 – 5, ¿diríamos, entonces, que una multiplicación es una resta? Seguramente, estamos pensando que todo esto no tiene nada que ver con la expresión, por ejemplo: 3 + 3 + 3 + 3 = 3 x 4, ya que lo que siempre sucede es que una multiplicación se puede hacer mediante sucesivas sumas.

La multiplicación 36 x 99 se puede calcular: (36 x 100) - (36 x 1); pero, ¿qué les diríamos ahora?, ¿que una multiplicación son dos sumas y una resta? Apoyándose en la multiplicación como suma de sumandos iguales a ningún alumno se le ocurriría calcular 78 x 396 como: (78 x 400) – (78 x 4), una manera rápida y mucho más matemática que seguir unas estereotipadas indicaciones.

Si pensamos que eso de *la suma de sumandos iguales* sirve para que a los niños les cueste menos entender lo que es una multiplicación[5] y que, según vayan creciendo se les va cambiando lo que se les ha dicho otorgando al cambio un rigor matemático, hay que decir que estamos engañando su pensar lógico, que no nos podremos apoyar en lo que saben para conducir el avance, que su respuesta intelectual no se apoyará en el razonamiento. Una cosa es añadir a un concepto más saber sobre él según avance el conocimiento, y otra, muy distinta, cambiar el saber anterior sobre el concepto para entender su significado. Rigor es ante todo claridad, y éste se debe dar a cualquier edad.

Pensemos en la multiplicación de un número cualquiera por el número uno (1), en la forma «una vez». Pensemos por ejemplo en, «una vez siete». Una vez 7 es igual a 7, y es difícil ver esta multiplicación como una suma de sumandos iguales debido a que, para hablar de sumandos, deben existir al menos dos. Quizás falte algo que añadir a la definición. Digamos que se podrá expresar como una suma de sumandos iguales, excepto cuando se multiplica por el número 1. Mejor aún, podríamos decir que la multiplicación de un número cualquiera por el número 1, no debe ser considerada como una multiplicación y, así, nos seguiríamos sujetando a la *¿auténtica definición?*

[5] «Las matemáticas están en evolución constante, son una herramienta, una necesidad. El espíritu matemático en el desarrollo del *pensum* y el espíritu filosófico en el aprendizaje eran actitudes indispensables en una orientación meditada de la Escuela.» (Santamaría, citado por C. H. Sánchez B., 2005, p. 97).

Supongamos que afirmo que un número es el producto de su raíz cuadrada y que tomo esto como definición de número. No tendría sentido, ¿qué tiene que ver eso con el concepto número? Habría que estudiar la estructura interna de esa operación con radicales y las propiedades implícitas que verifican un resultado numérico, distinguiendo la representación de los símbolos de las relaciones entre las representaciones simbólicas.

No he conocido ningún libro que desarrolle la expresión: 7 x 3 x 2 x 2 como suma de sumandos iguales; sería verdaderamente complicado. Si aplicamos esa expresión a una situación real tendríamos cuatro conjuntos diferentes: 7 casas; en cada casa 3 habitaciones; en cada habitación 2 camas; en cada cama 2 sábanas.

Si avanzamos un poco más en el programa matemático que se establece por currículum en los colegios, para la etapa de educación primaria, llegaríamos a calcular áreas y volúmenes; por ejemplo el área de un rectángulo y valiendo eso de «largo por ancho», por mucho que se sume una longitud jamás equivaldría a una superficie. O, si hablásemos de volúmenes, y valiese eso de «superficie por altura», ¿cómo lo comprenderían a través de una suma de sumandos iguales?: por mucho que sumemos una superficie nunca saldríamos del plano para situarnos en el espacio.

Supongamos un prisma de 7 cm^2 de base y una altura de 3 cm. Podríamos sumar 3 veces 7 cm^2 y formaríamos una superficie de 21 cm^2. Ese número 21, coincidiría con el número 21 del volumen, pero que el número coincida no quiere decir que la suma de superficies equivalga al volumen, o decir que un volumen es una suma de repetidas superficies, o que una superficie es una suma de repetidas longitudes.

Pero..., supongamos que alguien nos dice, como me han llegado a decir, que una superficie se puede sumar «hacia arriba» consiguiendo así el volumen, ¿qué podríamos decirle? Creo que más que decirle habría que plantearle dos preguntas: ¿cuántos centímetros cuadrados equivalen a un centímetro cúbico?, ¿depende, quizás, del grosor del centímetro cuadrado?

Es imposible permitir un aprendizaje heurístico, llegando los alumnos al saber por sus propios descubrimientos, cuando los conceptos en los que se apoyan les llevan a confusiones por ser éstos cambiados de curso en curso, que una cosa es contenido y, otra, conocimiento.

4. EL LENGUAJE Y LA SIMBOLIZACIÓN

La palabra «por» que utilizamos al leer el signo «x» no tiene para el niño ningún significado ni asociación con la realidad. Identifica «por» con el signo «x», pero más que asociar imágenes debe intelectualizar una simbología. Entendiendo, que no existen símbolos matemáticos sino una interpretación matemática de los símbolos, es la palabra «veces» la que les acerca a una buena intuición del signo «x». Cuando el alumno asocie el concepto a la palabra «veces» y al signo «x» de forma correcta y en repetidas ocasiones, podremos indicarles que, en matemáticas, lo que nosotros leemos por «veces» se lee: «multiplicado por» y, para abreviar decimos, simplemente: «por».

El arduo empeño que tenemos en que el alumno escriba al revés de como lee o, si se prefiere, en que lea al revés de como escribe, la expresión, por ejemplo: «tres veces cinco», que debería escribirla según el monopolio didáctico de los libros de texto como: 5 x 3, no constituye más que una reeducación metodológica. Nunca me he encontrado con la expresión: a2 + a3 = a5 (dos *a* + tres *a* = a cinco *a*).

Análogas consideraciones podríamos hacer sobre las palabras «multiplicando» y «multiplicador». ¿Cuál es el multiplicando? ¿Cuál es el multiplicador? Decimos que 5 x 4 = 4 x 5, entonces, ¿el multiplicando puede ser multiplicador y el multiplicador multiplicando? Pero, si el multiplicando puede ser multiplicador y el multiplicador multiplicando, ¿cómo los distingo? ¿Es quizás una cuestión de orden más que de concepto? Si es una cuestión de orden no tendría relevancia su distinción y, si es una cuestión de concepto, ¿qué sentido matemático tiene para el niño su distinción? Digamos, entonces: «factores», palabra admitida y que pertenece al lenguaje objeto de la Matemática. ¿Cuánto de amplia puede ser la epistemología? Chevallard (1992) nos hace ver que la concepción tradicional de la epistemología es «restringida» pues se preocupa principalmente por la producción del saber. Sin embargo, el saber también puede ser utilizado, enseñado y aprendido, y esto nos permite tener una visión más amplia de la epistemología.

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$[(2 + 2) + (2 + 2)] + [(2 + 2) + (2 + 2)]$$

Encuentro también en los libros de texto utilizados por nuestros alumnos, y de forma habitual, órdenes como ésta: «Escribe en forma de producto: 17 + 17». ¿Qué quiere decir eso? ¿Es el producto una forma de la suma? Se ha inventado un postulado didáctico y a partir de él se ha dado significado a otros elegidos conceptos, se han elaborado correspondientes procedimientos y se han creado fieles ejercicios. Y ¿qué tiene que ver la propiedad con la definición? Digo «elegidos conceptos» porque no he encontrado en ningún material escrito órdenes como: «Expresa como suma de sumandos iguales "2 elevado a 4"». ¿Por qué? Si se acepta que la multiplicación es una suma de sumandos iguales y la potencia es una multiplicación, se podría definir potencia a partir de multiplicación y decir que una potencia es una «suma larga de sumandos iguales».

Podríamos definir una potencia «*a* elevado a *n*» como una suma que tiene tantos sumandos iguales como indica el resultado de calcular «*a* elevado a *n-1*». Nos encontraríamos con una proposición recurrente ya que tendríamos que definir «*a* elevado a *n-1*», (es mejor no intentarlo por el mismo procedimiento).

Entonces, cuando alguien nos invitase a inventarnos un problema en el que intervenga para su solución la potencia «2 elevado a 4» podríamos proceder así: «Tengo 8 bolsas y en cada bolsa 2 botones, ¿cuántos botones tengo?» Si damos eso por válido, tendríamos que admitir la igualdad de estas dos siguientes situaciones problemáticas:

- Tengo 3 euros y me dan 2 euros. ¿Cuántos euros tengo en total?
- Tengo 7 euros y me gasto 2. ¿Cuántos euros me quedan?

Pero no se puede admitir la igualdad de esas dos situaciones problemáticas, porque una cosa es que tengan el mismo resultado y otra, muy distinta, es que la conducción intelectual sea la misma.

Es de comprensión ambigua para el pensamiento la utilización de una pareja permutable para la demostración de la propiedad conmutativa de la multiplicación en N, pero restringe más la clarificación de tal demostración si atendemos a:

$$3 \times 4 = 4 \times 3; \text{ porque } 3 + 3 + 3 + 3 = 4 + 4 + 4$$

y no percibo, por más que miro esta última expresión, el cambio de orden de los factores. Ahí no hay factores sino sumandos y, ¿qué es lo que hay que ver?, que siempre que haya cuatro sumandos iguales ¿es lo mismo que tres sumandos iguales? ¿La propiedad conmutativa consiste en tener un sumando más en un miembro de la igualdad? Y ¿qué tienen que ver las propiedades de la suma con las de la multiplicación? ¿Es posible demostrar las propiedades de la multiplicación con las propiedades de la suma? En cierta ocasión me dijo un niño que «una multiplicación no podía ser una suma porque multiplicar no era lo mismo que sumar cero, y cero y uno no eran iguales». ¿Qué quiso decir? ¿Tendrá esta afirmación algo que ver con lo que estamos diciendo?

Confundir la didáctica de la matemática, que debería estar apoyada en el descubrimiento del conocimiento completo de las alternativas, con la exposición de un modo de hacer, trae como consecuencia la transformación de «la fundamentación lógica» en «una psicología del convencimiento»[6].

Quiero terminar diciendo que en este momento llevo puesto un jersey de color verde. Es verdad que he dicho que llevo puesto un jersey de color verde, pero... ¿será verde el color de mi jersey? Que sea verdad que se haya escrito esto, nada dice de la verdad de lo que se ha escrito.

5. PROCESO DIDÁCTICO DE INICIACIÓN A LA MULTIPLICACIÓN

- *Presentar al alumno el concepto «veces», de forma intuitiva.* Es un concepto que debe intelectualizarse a partir de dos universos o clases de elementos y una relación constante. Así, por ejemplo: vagones y pasajeros, sobres y cromos, libros y páginas; la igualdad del número de pasajeros, cromos y páginas en cada vagón, sobre o libro, respectivamente, representaría la relación constante[7].

- *Utilizar la palabra veces correctamente en situaciones de su entorno.* 2 coches y cada coche 4 ruedas: 2 veces 4 ruedas; 3 botes y en cada bote 8 lapiceros: 3 veces 8 lapiceros.

[6] Utilizando palabras de Wittgenstein (1987).

[7] Esta explicación sirve para dar significado a expresiones matemáticas de la forma: a x b, con dos factores. Las expresiones: a x b x c, precisan de tres universos y dos relaciones constantes (a, b y b, c); y así, sucesivamente, en función del número de factores. Cuando el número tomado por la relación constante es el mismo y coincide con el número de elementos del universo, trabajamos con el significado epistemológico del concepto matemático de potencia: a x a x a x a.

- *Distinguir situaciones en las que se puede, o no, utilizar la palabra veces.* 2 botes, en uno 3 lapiceros, en el otro 5 lapiceros: no se puede expresar de la forma dos veces.

- *Asociar a la palabra «veces» el signo «x», que se lee: «multiplicado por», y de forma abreviada «por».* Veces = x.

- *Expresar matemáticamente situaciones con el signo «x».* 2 coches y cada coche 4 ruedas: 2 veces 4 ruedas (2 x 4); 3 botes y en cada bote 8 lapiceros: 3 veces 8 lapiceros (3 x 8).

- *Distinguir situaciones multiplicativas de situaciones sumativas.* Las situaciones sumativas tienen una sola clase de elementos, y pueden o no tener una relación constante: 3 frutas y 2 frutas; 5 cucharas y 5 cucharas. Las situaciones multiplicativas tienen al menos dos clases de elementos y, necesariamente, al menos una relación constante.

- *Construir las tablas de multiplicar.* Antes de llegar a este punto, y como se habrá observado por la lectura de los anteriores, el alumno sabrá resolver cualquier problema multiplicativo, no calcularlo. Así, iremos del problema al cálculo; no al revés. Muchos alumnos saben cómo se calcula, pero no saben qué significa lo que están calculando: una cosa es hacer multiplicaciones y, otra, muy distinta, saber multiplicar. Las tablas no se le deben dar hechas al alumno; tiene que ser él quien las construya apoyándose en un material manipulativo. Empezar por las más fáciles para dar seguridad; un posible orden, podría ser el siguiente: 1, 10, 5, 2, 4, 3, 6, 8, 9, 7.

- *Reconocer la propiedad conmutativa de la multiplicación.* a x b = b x a.

- *Estudiar relaciones entre las tablas.* Los resultados de la tabla del 4 son dobles de los resultados de la tabla del 2; los resultados de la tabla del 8 son dobles de los resultados de la tabla del 4; los resultados de la tabla del 9 son los resultados de la tabla del 10 menos los resultados de la tabla del 1; la tabla del 7 coincide con: la tabla del 5 más la tabla del 2.

- *Entender el algoritmo de la multiplicación por una cifra y calcular correctamente mediante su utilización.*

- *Descubrir otras formas de calcular, más rápidas y sencillas a partir de la aplicación de las relaciones estudiadas entre las tablas.* 124 x 7 = 124 (5 + 2); 124 x 5 = 1240/2; 124 x 7 = 620 + 248; 124 x 7 = 868.
- *Multiplicar por el uno seguido de ceros y sus múltiplos.* La tabla del 20 es 10 veces los resultados de la tabla del 2; la tabla del 500 es 100 veces la tabla del 5.
- *Entender el algoritmo de la multiplicación por cualquier cifra y calcular correctamente mediante su utilización.* 124 x 45 = 124 x 5 + 124 x 40.
- *Descubrir otras formas de calcular, más rápidas y sencillas a partir de la aplicación de las relaciones estudiadas entre las tablas.* 124 x 45 = 124 (50 – 5) = 6200 – 620; 124 x 45 = 5.580.
- *Resolver y formular situaciones problemáticas.*

BIBLIOGRAFÍA

BEAUVERD, B. (1967): «Avant le calcul», en *Cahiers de Pédagogie Expérimentale et de Psychologie de l´Enfant,* n.º 21. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

BERNAT, P. (1993): «Chypre: un logiciel d'aide au raisonnement», en *Repères-IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques),* n.º 10. Pont à Mousson: Topiques éditions, pp. 25-46.

BIEHLER, R. y OTROS (eds.) (1994): *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

CANTORAL, R. y FARFÁN, R. M. (2003): «Matemática educativa: una visión de su evolución», en *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime),* vol. 6, n.º 1, marzo, pp. 27-40.

CHEVALLARD, Y. (1992): «Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique», en *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 12, n.º 1, pp. 73-111.

D'AMORE, B. (1999): *Elementi di didattica della matematica.* Bologna: Pitagora Editrice.

DOUADY, R. (1995): «La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento», en P. Gómez (ed.): *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 61-96.

FERNÁNDEZ BRAVO, A. (2003): *La numeración y las cuatro operaciones matemáticas.* Madrid: Central Catequética Salesiana (CCS).

HIDALGO ALONSO, S., MAROTO SÁEZ, A. y PALACIOS PICOS, A. (1999): «Evolución de las destrezas básicas para el cálculo y su influencia en el rendimiento escolar en matemáticas», en *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas,* n.º 30, pp. 37-45.

HITT, F. (1998): «Matemática educativa: investigación y desarrollo 1975-1997», en F. Hitt (ed.): *Investigaciones en Matemática Educativa II.* México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 41-65.

SÁNCHEZ B., C. H. (2005): «Anotaciones para la historia de las matemáticas en Antioquia», en *Lecturas Matemáticas,* vol. 26, n.º 1, pp. 91-105.

YÁÑEZ CANAL, S. (2005): «35 años de la carrera de matemáticas», en *Lecturas Matemáticas,* vol. 26, pp. 107-110.

WITTGENSTEIN, L. y OTROS (1987): *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática.* Madrid: Alianza.