NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 93, noviembre de 2016, páginas 141-150

Demostraciones geométricas automáticas en GeoGebra

Carlos Ueno Jacue
(Kodály Zoltán Gimnázium, Pécs, Hungría)

Fecha de recepción: 12/10/2016
Fecha de aceptación: 25/10/2016

Resumen En este artículo describimos algunos fundamentos sobre los que se basa la capacidad que tienen muchos programas actuales de software matemático para demostrar enunciados geométricos, y explicamos cómo hacer uso de este recurso en las últimas versiones de GeoGebra.

Palabras clave Geometría plana, GeoGebra, Demostración geométrica, Demostración automática, Método de Recio.

Title **Automatic geometric proofs in GeoGebra.**

Abstract In this article we describe some basic facts concerning the ability that many mathematical software packages currently have to prove automatically geometric statements. We also explain how to use this feature in the new versions of GeoGebra.

Keywords Plane Geometry, GeoGebra, Geometric proof, Automatic proof, Recio's method.

"*¿Qué bien buscamos? Ciertamente no se trata de introducir a los estudiantes una colección de más o menos ingeniosos teoremas sobre bisectrices de ángulos de un triángulo o sobre la secuencia de los números primos, sino más bien de enseñarles a ordenar y a enlazar sus pensamientos de acuerdo con los métodos que los matemáticos habitualmente usan, porque reconocemos en este ejercicio un modo de desarrollar una mente clara y un juicio excelente. Es el método matemático el que debería ser el objetivo de nuestra enseñanza, siendo los temas a tratar tan sólo ilustraciones bien escogidas del mismo.*"

Jean Dieudonne

1. Introducción

Hasta hace no mucho tiempo entre los matemáticos existía la opinión generalizada de que los ordenadores podían servir de herramienta para realizar con mayor rapidez y exactitud los cálculos que necesitaban a la hora de desarrollar su trabajo, pero que, en lo que a demostraciones matemáticas se refiere, el papel fundamental seguiría recayendo siempre en el ser humano, nunca en la máquina.

Sin embargo, desde finales del siglo XX el papel de los ordenadores ha ido cobrando una mayor presencia en el proceso de completar demostraciones matemáticas. No quiere decir esto que hayan ya sustituido la labor del matemático profesional, pero se han convertido en parte indispensable del proceso demostrativo. Como ejemplos muy conocidos, podemos citar la demostración del Teorema de los 4 colores o la Conjetura de Kepler, esta última recientemente confirmada gracias a los denominados "formal proof assistants". En (Recio 2001) se ofrecen interesantes reflexiones sobre el papel que la demostración matemática tiene a distintos niveles (escolar, social, universitario), y sobre cómo ha evolucionado a lo largo del tiempo, incluyendo el nuevo papel que las máquinas ya están jugando en el presente y cómo pueden alterar nuestra perspectiva de cara al futuro.

Si nos centramos en el campo de la demostración geométrica, uno de los avances fundamentales en el diseño de demostradores geométricos automáticos se debe a Wu Wen Tsun, que en 1978 publica un método para mecanizar las demostraciones que aparecen en la Geometría Elemental. Este método es de carácter fundamentalmente algebraico, y posteriormente ha dado pie a nuevas técnicas que han comenzado a implementarse en diversos paquetes de software matemático que existen hoy en el mercado.

A esta posibilidad de hacer demostraciones automáticas no escapa el software GeoGebra (Botana et al. 2015), que en sus últimas versiones incluye comandos para comprobar si una afirmación geométrica es verdadera o falsa. En este artículo haremos una presentación elemental de los fundamentos algebraicos en los que se basan las demostraciones geométricas automáticas, para a continuación mostrar la capacidad que tiene GeoGebra de comprobar la veracidad de proposiciones geométricas.

2. Métodos algebraicos de demostración geométrica

Debemos a Descartes la identificación del plano con pares de números reales que representan las coordenadas de cada punto del mismo. Este método de la Geometría Analítica permitió el tratamiento aritmético y algebraico de los problemas que aparecían en la Geometría Euclídea, aportando una fructífera relación entre Aritmética, Álgebra y Geometría. La demostración algebraica de teoremas geométricos se fundamenta en esta ya vieja idea, si bien aderezada con las aportaciones posteriores del Álgebra Conmutativa y de la Geometría Algebraica, así como con la aparición de los ordenadores y los algoritmos computacionales. En este apartado damos las ideas básicas que están detrás del procedimiento algebraico para automatizar la demostración de un teorema geométrico.

Para ello, lo mejor que podemos hacer es utilizar un ejemplo que nos permita seguir mejor los argumentos. Pero antes de nada recordemos un par de ideas matemáticas básicas que necesitaremos en nuestro desarrollo:

1) La ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(a_1, b_1)$, $Q(a_2, b_2)$ puede expresarse de la siguiente manera:

$$\frac{y-b_1}{x-a_1} = \frac{b_2-b_1}{a_2-a_1} \qquad \Rightarrow \qquad (a_2-a_1)(y-b_1)-(b_2-b_1)(x-a_1)=0.$$

2) Las coordenadas del punto de intersección de las rectas (asumimos que no son paralelas) de ecuaciones

$$A_1x + B_1y = C_1$$

$$A_2x + B_2y = C_2$$

se pueden expresar así:

$$x = \frac{C_1B_2 - C_2B_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

$$y = \frac{-C_1A_2 + C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

Procedemos a enunciar ahora el Teorema que nos servirá de ejemplo para ver cómo un enunciado geométrico se puede describir de forma puramente algebraica.

Teorema: *Las medianas de un triángulo ABC se intersecan en un mismo punto G.*

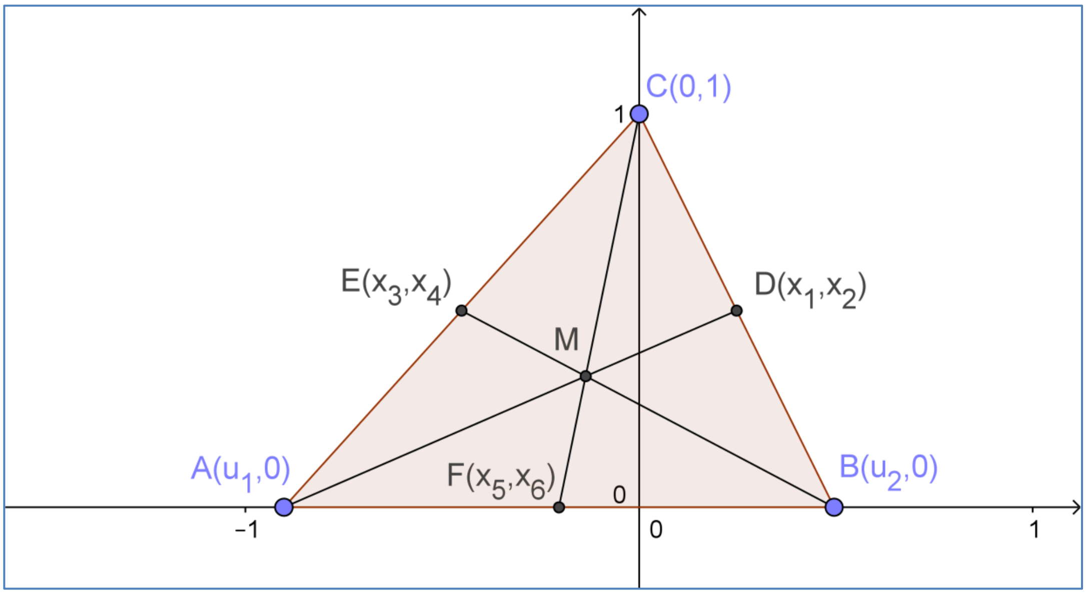

Imagen 1. Un triángulo y sus medianas.

En la imagen 1 se describe la situación, para la que hemos elegido coordenadas adecuadas para minimizar la cantidad de variables libres que va a tener nuestra construcción (en particular, aprovechamos implícitamente la invarianza de la construcción por semejanza). Consideramos así que hemos situado el triángulo ABC de modo que las coordenadas respectivas de los puntos A, B, Cson $(u_1, 0)$, $(u_2, 0)$ y $(0,1)$. Las variables u_1, u_2 pueden tomar cualquier valor real; decimos que son nuestras variables independientes. Los puntos y elementos geométricos que vamos a construir a partir de ellos dependen de A, B, C, y las coordenadas que iremos introduciendo, y que representaremos mediante las variables $x_1, x_2, \ldots$ se podrán expresar en términos de u_1 y u_2.

Empezaremos considerando los puntos medios de los segmentos BC, CA y AB, que llamaremos respectivamente $D(x_1, x_2)$, $E(x_3, x_4)$ y $F(x_5, x_6)$. Es fácil comprobar que las coordenadas de estos puntos deben satisfacer las siguientes relaciones:

$$p_1(u_i, x_j) = -\frac{u_2}{2} + x_1 = 0$$

$$p_2(u_i, x_j) = -\frac{1}{2} + x_2 = 0$$

$$p_3(u_i, x_j) = -\frac{u_1}{2} + x_3 = 0$$

$$p_4(u_i, x_j) = -\frac{1}{2} + x_4 = 0$$

$$p_5(u_i, x_j) = -\frac{u_1 + u_2}{2} + x_5 = 0$$

$$p_6(u_i, x_j) = x_6 = 0$$

Estas ecuaciones se pueden considerar las hipótesis de nuestro teorema. Ahora nos preocupamos por obtener las ecuaciones de las medianas AD, BE, CF:

$$AD: (x_1 - u_1)y = x_2(x - u_1)$$

$$BE: (x_3 - u_2)y = x_4(x - u_2)$$

$$CF: x_5(y - 1) = (x_6 - 1)x$$

Una forma de demostrar que las tres medianas se cortan en un punto se puede obtener comprobando que el punto de intersección M de las rectas AD y BE está contenido en la recta CF. Si calculamos las coordenadas de M obtenemos

$$\left(\frac{-u_1x_2x_3+u_2x_1x_4+u_1u_2(x_2-x_4)}{-u_1x_4+u_2x_2+x_1x_4-x_2x_3}, \frac{-u_1x_2x_4+u_2x_2x_4}{-u_1x_4+u_2x_2+x_1x_4-x_2x_3}\right) \equiv \left(\frac{m_x(u_i,x_j)}{n(u_i,x_j)}, \frac{m_y(u_i,x_j)}{n(u_i,x_j)}\right)$$

Ahora queremos que las coordenadas del punto M satisfagan la ecuación de la recta CF, de donde obtenemos la relación polinómica

$$q(u_i, x_j) \equiv x_5\left(m_y(u_i, x_j) - n(u_i, x_j)\right) - (x_6 - 1)m_x(u_i, x_j) = 0$$

En otras palabras: A partir de las condiciones dadas por las ecuaciones de las hipótesis debemos deducir que el polinomio conclusión $q(u_i, x_j)$ se anula. Simbólicamente podemos escribir que lo que queremos demostrar es:

$$Si\ \ p_1(u_i, x_j) = p_2(u_i, x_j) = \ldots = p_6(u_i, x_j) = 0,\ entonces\ q(u_i, x_j) = 0.$$

Como puede observar el lector, siguiendo una argumentación de tipo cartesiano hemos convertido un teorema de geometría en una afirmación completamente algebraica. Sin embargo, hemos olvidado tener en cuenta algunas condiciones para que nuestro nuevo planteamiento algebraico sea completamente correcto. Al inicio hemos considerado u_1, u_2 como variables libres que nos permitían construir un triángulo arbitrario ABC. Pero para que este triángulo pueda considerarse como tal debemos evitar que coincidan los vértices A y B. Y esto se puede conseguir si consideramos $u_1 \neq u_2$ (condición de no-degeneración). Por tanto, nuestro teorema en realidad lo que afirma es lo siguiente:

$$Si\ \ u_1 - u_2 \neq 0\ y\ p_1(u_i, x_j) = \ldots = p_6(u_i, x_j) = 0,\ entonces\ q(u_i, x_j) = 0.$$

Dicho de otro modo: asumiendo que $u_1 \neq u_2$, siempre que los polinomios $p_k(u_i, x_j)$ que aparecen en las hipótesis se anulen debe deducirse que el polinomio conclusión $q(u_i, x_j)$ también se anula. Ahora entran en juego las potentes herramientas del álgebra, que nos permiten afirmar que esto sucede si podemos encontrar un polinomio $d(u_i, x_j)$ que no se anula cuando $u_1 \neq u_2$, y polinomios $h_k(u_i, x_j)$ que satisfagan la igualdad

$$d(u_i, x_j)q(u_i, x_j) = h_1(u_i, x_j)p_1(u_i, x_j) + \cdots + h_6(u_i, x_j)p_6(u_i, x_j).$$

Nótese que, efectivamente, si los polinomios p_i se anulan y se cumple la condición de no-degeneración $u_1 \neq u_2$, entonces necesariamente q debe anularse. Las condiciones de no-degeneración están relacionadas con el polinomio d, y suponen una de las dificultades inherentes a los métodos automáticos de demostración geométrica. Evidentemente, resulta difícil para un ser humano trabajar con tantas variables y polinomios para poder establecer si es posible o no encontrar estas expresiones; y aquí entra en juego la potencia computacional de los ordenadores actuales, que mediante los algoritmos algebraicos adecuados pueden decidir en poco tiempo si, efectivamente, la conclusión que demostrar "a mano" (Wu 1994). No entraremos aquí en los detalles técnicos del método de Wu, pero en la literatura pueden encontrarse artículos (Elias 2006, Shang-Ching 1988) que ofrecen una introducción razonablemente accesible a las matemáticas que hay detrás del mismo. Para el lector curioso, a continuación detallamos los polinomios $d(u_i, x_j)$ y $h_k(u_i, x_j)$ que satisfacen la igualdad anterior en nuestro ejemplo de estudio sobre el triángulo y sus medianas:

$$d(u_i, x_j) = 1$$

$$h_1(u_i, x_j) = -\frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_2$$

$$h_2(u_i, x_j) = -\frac{1}{2}u_1^2 - \frac{1}{4}u_2^2 + \frac{3}{4}u_1u_2$$

$$h_3(u_i, x_j) = -\frac{1}{2}u_1x_2 + \frac{1}{2}u_2x_2$$

$$h_4(u_i, x_j) = -\frac{1}{2}u_1^2x_2 + \frac{1}{2}u_2^2x_2 + \frac{1}{2}u_1^2 - \frac{1}{2}u_1u_2 - \frac{1}{2}u_1x_1 + \frac{1}{2}u_2x_1$$

$$h_5(u_i, x_j) = -u_1x_2x_4 + u_2x_2x_4 + u_1x_4 - u_2x_2 - x_1x_4 + x_2x_3$$

$$h_6(u_i, x_j) = -u_1u_2x_2 + u_1u_2x_4 + u_1x_2x_3 - u_2x_1x_4$$

En la siguiente sección veremos una aproximación algo diferente a la demostración automática en Geometría, interesante entre otras razones porque se ha implementado eficazmente en las últimas versiones de GeoGebra.

3. El método de Recio

El método de Recio se caracteriza por su rapidez de ejecución, y es uno de los que GeoGebra utiliza a la hora de establecer la veracidad de una afirmación geométrica (Kovács et al. 2012). Se basa fundamentalmente en el Teorema de Bezout (para curvas algebraicas reales), que describimos someramente a continuación.

Un resultado bien conocido al hablar de funciones polinómicas con coeficientes reales es el siguiente:

Teorema: *Si $p(x)$ es un polinomio no nulo de grado n, entonces la función $y = p(x)$ puede tener a lo sumo n raíces reales.*

Este teorema podría enunciarse también de la siguiente forma:

Teorema: *Si $p(x)$ es un polinomio no nulo de grado n, entonces la intersección del eje X y la curva $y = p(x)$ tiene como mucho n puntos de intersección distintos.*

Y el lector puede demostrar que esta afirmación se mantiene cierta si pensamos en la intersección de $y = p(x)$ con cualquier otra recta (¡que no coincida con la curva!) del plano, cuya ecuación siempre viene dada por una ecuación de grado 1. Si ahora consideramos la intersección de dos cónicas distintas, es decir, de dos curvas dadas por ecuaciones polinómicas de grado dos, tras estudiar las diversas posiciones que pueden ocupar en el plano llegamos a la conclusión de que el número de sus puntos de intersección nunca puede exceder de $4 = 2 \times 2$. Así, tenemos que:

Una recta de grado 1 y una curva de grado n se intersecan como mucho en $1 \times n = n$ puntos. Dos curvas de grado 2 se cortan como mucho en $2 \times 2 = 4$ puntos.

Estas afirmaciones que pueden demostrarse de manera elemental corresponden en realidad a casos concretos del Teorema de Bezout. Primero establezcamos algunas definiciones básicas. Una curva algebraica real es el conjunto de soluciones reales de una ecuación polinómica $f(x, y) = 0$. Si esta curva no se puede expresar como unión de dos curvas algebraicas del plano distintas entre si decimos que es irreducible. Es un resultado importante en geometría algebraica que toda curva algebraica se puede expresar de modo único como una unión finita de curvas irreducibles, que podemos denominar sus componentes. Podemos ahora enunciar el Teorema de Bezout de la siguiente forma:

Teorema de Bezout: *Dos curvas algebraicas reales de grados m y n sin componentes irreducibles comunes se cortan como mucho en $m \times n$ puntos distintos.*

En particular, si una de las curvas es una recta tendremos entonces que una curva algebraica de grado m y una recta no contenida en ella pueden intersecarse como mucho en m puntos distintos.

La astucia del método de Recio para demostrar un teorema geométrico consiste ahora en lo siguiente: Supongamos que hemos expresado de forma algebraica el teorema geométrico que queremos demostrar, y que requiere de dos variables independientes u_1, u_2 y de variables dependientes $x_1, \dots, x_k$, Como ya hemos visto en la sección anterior, este teorema tendrá la forma

Si $d(u_i, x_j) \neq 0$ y $p_1(u_i, x_j) = \ldots = p_n(u_i, x_j) = 0$, entonces $q(u_i, x_j) = 0$.

Consideremos ahora el espacio de todos los valores (u_1, u_2) de las variables independientes del teorema geométrico que queremos demostrar. Como las variables x_j son dependientes de las variables independientes u_i, el polinomio conclusión $q(u_i, x_j)$ puede en principio expresarse exclusivamente mediante estas variables independientes, y si lo hiciéramos así lo que nos gustaría demostrar es que, al simplificarlo completamente, dicho polinomio es en realidad 0. Dicho en otras palabras: La conclusión siempre se satisface para cualesquiera valores iniciales fijados de las variables (u_1, u_2) (aquí debemos descartar los puntos que pertenecen a condiciones de degeneración del teorema). El problema es que el proceso de simplificación del polinomio conclusión para determinar si efectivamente es nulo puede ser costoso desde el punto de vista del tiempo necesario para efectuar algorítmicamente las comprobaciones necesarias. Más costoso que, por ejemplo, sustituir los u_i por valores concretos, calcular después los valores de las variables dependientes asociadas, y comprobar si para estos valores concretos de todas las variables en juego el polinomio conclusión se anula. Y Recio hace la siguiente observación, que se deduce del Teorema de Bezout:

Si elegimos adecuadamente un número finito de puntos (u_1, u_2) en el espacio de variables independientes y al evaluar el polinomio $q(u_i, x_j)$ obtenemos 0, entonces necesariamente el polinomio debe ser el polinomio nulo.

El número de puntos necesario depende del grado del polinomio conclusión. Sigamos con un poco más de detalle el razonamiento que hay detrás de la idea de Recio. El polinomio conclusión q, si no es idénticamente nulo, puede asociarse a una curva algebraica de grado m. Si elegimos $m+1$ puntos distintos (no degenerados), todos sobre una recta de ecuación $l_1(u_1, u_2) = 0$, y el polinomio se anula en todos ellos, entonces por el Teorema de Bezout la curva debe contener a toda la recta l_1, que pasa a ser una de sus componentes, y esto quiere decir que q se puede factorizar de modo que $q = l_1 q_1$, donde el grado de q_1 será menor que el de q en una unidad. Si realizamos este proceso sobre $m+1$ rectas diferentes y siempre obtenemos que la evaluación de q sobre cada una de ellas es cero, deberíamos concluir que las ecuaciones de las $m+1$ rectas dividen a q, que tan sólo tiene grado m. Entramos así en contradicción y el polinomio inicial m es en realidad el polinomio nulo, y esto equivale a afirmar que la conclusión se deduce de las hipótesis del teorema, con lo que podemos concluir su validez. El método de Recio puede generalizarse a problemas que requieran de un número de variables independientes $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ mayor a 2.

4. Demostraciones automáticas en GeoGebra

El método de Recio es tan sólo uno de los métodos (Recio, Botana, Puresymbolic, OpenGeoProver, GeoProver) de demostración automática que las nuevas versiones de GeoGebra incorporan entre sus nuevas funcionalidades, y que son implementaciones que se basan en los métodos algebraicos ya comentados anteriormente o en algunas de sus variantes.

Los comandos principales que permiten interactuar con estos demostradores automáticos incluidos en GeoGebra son los siguientes:

- Comprueba[<proposición>]

Cuando se utiliza este comando, la respuesta de GeoGebra puede ser “true” (verdadero), “false” (falso) o “indefinido” (GeoGebra no es capaz de asegurar la veracidad o falsedad de la expresión). Esta respuesta no incorpora los posibles casos de degeneración que pueden darse al realizar la construcción, y viene a indicar si, salvo casos muy específicos en la configuración geométrica con la que se está trabajando, la afirmación geométrica se puede considerar verdadera.

- CompruebaDetallles[<proposición>]

El comando CompruebaDetalles es más preciso que el anterior. Cuando se utiliza, el comando responde con una lista cuyo primer término indica si puede considerarse verdadera o falsa la afirmación geométrica en términos generales, para a continuación listar las condiciones de degeneración que provocan que la veracidad del teorema falle. Si el comando tan sólo devuelve la expresión {} es que no ha podido extraer ninguna conclusión y la respuesta es equivalente a "indefinido". Estas condiciones de degeneración tienen un interés intrínseco, porque ayudan a comprender mejor, cuando se enfrenta a GeoGebra con una conjetura geométrica, cuáles son las condiciones que se deben satisfacer para que dicha conjetura sea verdadera, y se pueden convertir incluso en asistentes para el establecimiento de nuevos teoremas geométricos.

La <proposición> a demostrar puede expresarse, entre otras, de las siguientes formas:

- SonIguales[] (A==B)
- SonParalelos[] (A $\parallel$ B)
- SonPerpendiculares[] (A $\perp$ B)
- EstánAlineados[]
- SonCocíclicos[]
- SonConcurrentes[]
- Igualdades entre expresiones numéricas

Debemos sin embargo hacer notar aquí que para que GeoGebra pueda aplicar sus métodos de demostración las construcciones deben realizarse con cierto cuidado, y los teoremas que pueden ser demostrados deben poder traducirse al lenguaje de los polinomios (cosa que no siempre es posible). Es difícil describir exactamente en este contexto a qué nos referimos al decir "con cierto cuidado". Para ver un sencillo ejemplo de cómo las respuestas de GeoGebra pueden diferir en función de las construcciones que se emplean, el lector puede comprobar que si utilizamos la herramienta "Polígono Regular" para construir un cuadrado, GeoGebra es incapaz de demostrar que las rectas que contienen dos de sus lados opuestos son paralelas, mientras que si realizamos una construcción a partir de las herramientas más básicas como "Crear segmento", "Recta", "Recta perpendicular", "Circunferencia (centro, punto)" e "Intersección" entonces el comando "Comprueba" sí puede conseguir su objetivo (ver imágenes 2 y 3).

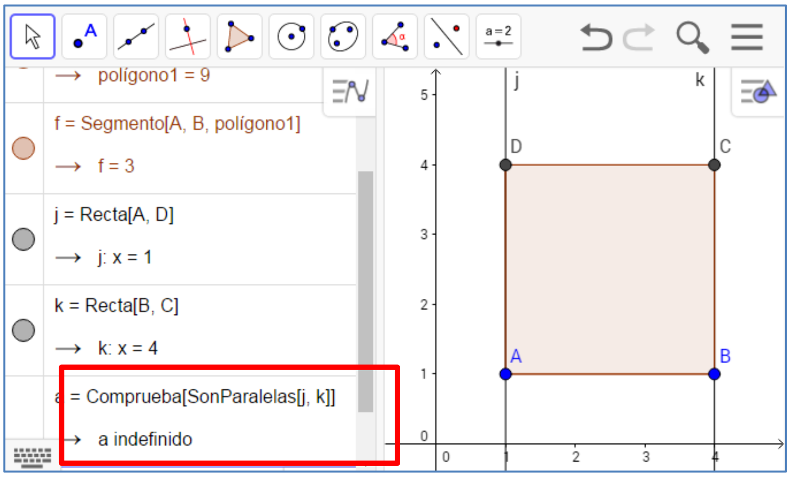

Imagen 2. Cuadrado construido con "Polígono regular"

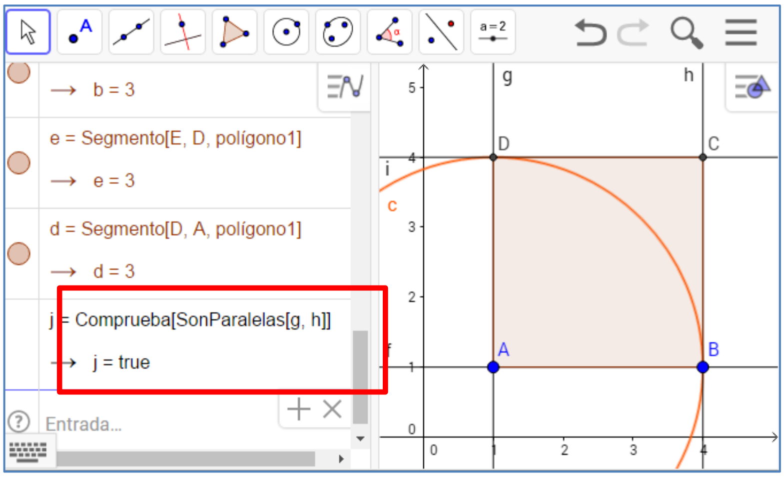

Imagen 3. Cuadrado construido con herramientas básicas

En general, la regla de oro a seguir consistiría en realizar construcciones que utilicen las herramientas más básicas de la manera más económica posible, entendiendo por básicas las que se corresponden con el tipo de construcciones elementales que pueden realizarse con una regla y un compás. Entre ellas, podemos citar las siguientes:

- Unir dos puntos mediante una recta o segmento.
- Trazar la recta paralela a otra que pasa por un punto.
- Trazar la recta perpendicular a otra que pasa por un punto.
- Hallar la intersección entre dos rectas, dos circunferencias o una recta y una circunferencia.
- Trazar la circunferencia con centro en un punto que pasa por otro.

5. Propuestas

A continuación, proponemos las siguientes actividades para que el lector interesado pueda comprobar si los comandos Comprueba y CompruebaDetalles de GeoGebra pueden afrontar con éxito la demostración automática de algunos teoremas y problemas habituales en la geometría euclídea del plano.

Propuesta 1: Demostrar que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera ABCD forman un paralelogramo.

Propuesta 2: Una circunferencia está inscrita en un trapecio $ABCD$ de lados paralelos AD y BC. La circunferencia es tangente a los lados AB y CD en K y L respectivamente, y a las bases AD y BC en M y N respectivamente. Si Q es el punto de intersección de los segmentos BM y AN, demuestra que KQ es paralelo a AD.

Propuesta 3: En el cuadrado $ABCD$ se trazan dos rectas l_1 y l_2 que pasan por el vértice A. Estas rectas intersecan los lados del cuadrado. Se trazan ahora rectas perpendiculares BB_1, BB_2, CC_1 y CC_2 a estas rectas. Demostrar que los segmentos B_1B_2 y C_1C_2 son perpendiculares.

Propuesta 4: Demostrar que el ortocentro, el baricentro y el circunscentro de un triángulo ABC siempre están lineados.

6. Reflexiones finales

La posibilidad de demostrar teoremas automáticamente, sin la necesidad de que el ser humano deba ser partícipe del proceso demostrativo, nos invita a plantearnos cuestiones interesantes sobre el papel que las demostraciones matemáticas deben jugar en la formación básica de nuestros jóvenes. Empezamos ahora a encontrarnos en una situación semejante al momento en el que la aparición y popularización de las calculadoras hicieron cuestionarnos la necesidad de la enseñanza de los algoritmos tradicionales de cálculo en las escuelas. El debate sobre la necesidad de dominar estas destrezas básicas sigue siendo intenso y sin acuerdo definitivo. Ahora, con el progreso de las tecnologías digitales y la capacidad demostrativa que las máquinas empiezan a tener, hay cabida para la siguiente pregunta: ¿Hasta qué punto, con qué profundidad y con qué intensidad los métodos de demostración matemáticos deben estar presentes en los currículos de Matemáticas de nuestro sistema educativo? Es posible que esta pregunta abra un nuevo debate en el panorama de la educación matemática del que, previsiblemente, no será fácil extraer puntos comunes de acuerdo.

Bibliografía

Botana, F., Hohenwarter, M. et al. (2015). Automated Theorem Proving in GeoGebra: Current Achievements. *Journal of Automated Reasoning 55*, 39–59.

Elias, J. (2006). Automated Geometric Theorem Proving: Wu's Method. *The Montana Mathematics Enthusiast, 3(1)*, 3-50.

Kovács Z, Recio, T. & Weitzhofer, S. (2012). Implementing theorem proving in GeoGebra by exact check of a statement in a bounded number of test cases. *Libro de Resúmenes del XIII Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones: EACA2012*, 123-126.

Recio, T (2001). La mecánica de la demostración y la demostración mecánica. *Presentación en X JAEM (Zaragoza, 7-9 de septiembre de 2001)*.

Shang-Ching C. (1988). An Introduction to Wu's Method for Mechanical Theorem Proving in Geometry, *Journal of Automated Reasoning 4*, 237-267.

Wu, W.T. (1994). Mechanical Theorem Proving in Geometries. *Texts ans Monographs in Symbolic Computation*, Springer-Verlag, Wien.

Carlos Ueno Jacue.. Profesor de Matemáticas en el Kodály Zoltán Gimnázium de Pécs (Hungría) durante el curso escolar 2016/17. Es Doctor en Matemáticas por la Universidad Complutense de Madrid y su campo de investigación principal está relacionado con el estudio de las imágenes de aplicaciones polinómicas entre espacios euclídeos.
Email: cuenjac@gmail.com

Marcador