NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 93, noviembre de 2016, páginas 75-92

Formalización progresiva en matemáticas: el caso de la adición en primer curso de primaria

Mónica Ramírez García (Universidad Complutense de Madrid. España)
Carlos de Castro Hernández (Universidad Autónoma de Madrid. España)

Fecha de recepción: 6 de enero de 2016
Fecha de aceptación: 9 de septiembre de 2016

Resumen Estudiamos el desarrollo de conocimientos matemáticos informales, de alumnos de primer curso de primaria, a través de las estrategias que utilizan para resolver problemas aritméticos verbales. Hemos creado un entorno de aprendizaje, con formato de taller, donde los alumnos elaboran estrategias propias y representaciones para la resolución de los problemas. Esto permite observar el desarrollo de las estrategias informales y representaciones concretas hacia conocimientos formales, más simbólicos y abstractos, sobre contenidos matemáticos relacionados con el valor posicional del número, la decena y la aritmética (adición). Este desarrollo del conocimiento matemático implica procesos de formalización progresiva y matematización.

Palabras clave Abstracción, educación primaria, formalización progresiva, matematización, problemas aritméticos verbales, representación, simbolización.

Title **Progressive formalization in mathematics: the case of addition in first grade of primary education**

Abstract We study the development of students' informal mathematical skills in first grade, through the strategies they invent to solve arithmetic word problems. We have created a learning environment, with a workshop format, where students produce their own strategies and representations to solve the problems. This allows us to observe the development of informal and concrete strategies toward more formal, symbolic and abstract knowledge and representations on mathematical contents related to place value, tens and arithmetic (addition). This development of mathematical knowledge implies processes of progressive formalization and mathematization.

Keywords Abstraction, primary education, progressive formalization, mathematization, verbal arithmetic problems, representation, symbolization.

1. Introducción

Las matemáticas suelen considerarse una ciencia muy abstracta. En los documentos curriculares, se trata como principio metodológico básico para las primeras edades el uso de materiales manipulativos para facilitar el aprendizaje de nuevos conceptos, dando importancia al trabajo práctico y concreto antes de llegar a nociones simbólicas, abstractas y formales (MEC, 2014). Así, en la iniciación del aprendizaje de contenidos matemáticos, nos movemos en una dialéctica entre lo concreto y lo abstracto. Muchas veces este paso se trata inadecuadamente, como si fuese algo instantáneo, como si los niños aprendiesen los símbolos "de golpe", pasando de una matemática concreta a la matemática formal.

En este artículo proponemos una visión alternativa para las transiciones de lo concreto e informal a lo abstracto y formal en el aprendizaje matemático, según la cual existe un proceso de *formalización progresiva*, que se desarrolla a lo largo de un tiempo extenso que puede abarcar varios años, que implica a su vez el desarrollo de aspectos de la competencia matemática como la comunicación, la representación y el uso de un lenguaje simbólico y formal, que evolucionarán a lo largo de la escolaridad. A continuación, vamos a revisar las ideas relacionadas con estas transiciones presentes en documentos curriculares, para después centrarnos en los términos de matematización y formalización progresiva.

2. Planteamiento del problema

El *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) publica, en el año 2000, sus *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (NCTM, 2003). El estándar de *Comunicación* indica que los niños deben "usar el lenguaje de las matemáticas para expresar ideas con precisión" (NCTM, 2003, p. 64). En las primeras edades, la comunicación se puede hacer de forma verbal, con dibujos, objetos y símbolos, dando la oportunidad de desarrollar el lenguaje matemático. En este sentido, en el estándar de proceso de *Razonamiento y Demostración* se recomienda proporcionar a los niños materiales físicos que puedan manipular para que, a partir de ejemplos concretos, tengan la oportunidad de generalizar. En la misma línea, el estándar de *Representación* señala que los niños deben usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos (NCTM, 2003). Como vemos, objetos y dibujos, con un carácter informal, tienen un estatus didáctico en este documento como instrumentos que pueden favorecer el desarrollo de importantes procesos matemáticos.

En la declaración conjunta del NCTM con la *National Association for the Education of Young Children* (NAEYC y NCTM, 2013) se indica que los niños en las primeras edades construyen conocimientos matemáticos a partir de sus experiencias de la vida cotidiana. Estas primeras ideas intuitivas y los conocimientos informales deben ser bien articulados en trayectorias de enseñanza-aprendizaje para el desarrollo de las grandes ideas matemáticas. Este documento refuerza la idea de que el aprendizaje matemático es, en su inicio, intuitivo e informal.

Otros influyentes documentos curriculares posteriores han incorporado ideas para completar los *estándares de procesos*, del NCTM, hasta llegar a definir unos *estándares de prácticas matemáticas*. Así, el *National Research Council* (NRC) enfatiza el desarrollo de la comprensión, o la fluidez procedimental, que describen la calidad que debe tener el conocimiento de las grandes ideas matemáticas, para conectar conceptos, procedimientos y problemas dentro del mismo contenido (NRC, 2001 y 2009). En los *Common Core State Standards for Mathematics* (CBP y CCSSO, 2010) se completa esta panorámica al relacionar los estándares de procesos del NCTM con las habilidades del NRC (2001 y 2009), presentando prácticas matemáticas como "modelizar con matemáticas" y "favorecer la precisión para comunicar y representar ideas matemáticas, razonando de manera abstracta y cuantitativa" (CBP y CCSSO, 2010). Todas las consideraciones sobre la actividad matemática, su potenciación y su desarrollo, incluidas en estos documentos, están alineadas con la idea de que el conocimiento matemático se inicia en contextos familiares, a través de intuiciones y conocimientos informales adquiridos pensando con ayuda de dibujos y objetos (incluyendo materiales manipulativos).

En este trabajo nos centramos en el primer curso de educación primaria, en una etapa educativa en la que se recomienda suministrar materiales manipulativos a los niños para construir sus primeras ideas matemáticas, y donde se comienzan a incluir conceptos formales como el valor posicional de los números, y a enseñar procedimientos que implican el uso de un lenguaje simbólico y formal, como el algoritmo de la suma. Pretendemos describir el proceso de formalización progresiva, que parte de las manipulaciones realizadas con materiales concretos, y desemboca en procedimientos formales como los algoritmos. Comenzamos revisando y sintetizando varios marcos teóricos que describen este proceso de *formalización progresiva*, así como el de matematización, muy vinculado a este.

3. Fundamentación teórica

3.1. Matematización

En las evaluaciones PISA se mide el contenido, o estructura de contenidos, que los alumnos deben adquirir, los procesos o capacidades que han de aplicar, las situaciones en las que se encuentran los problemas matemáticos y la actitud y disposición de los alumnos hacia las matemáticas. Es decir, no sólo se valoran los contenidos aprendidos, sino cómo se utilizan en situaciones de la vida cotidiana. De hecho, las tareas de evaluación de PISA están basadas en procesos de modelización y resolución de problemas, a lo que PISA denomina *matematización*. PISA describe el proceso de matematización como la actividad que se desarrolla cuando una persona se ve ante un problema en una situación real, la organiza de acuerdo con conceptos matemáticos, se despega de la realidad generalizando y formalizando, resuelve el problema y da sentido a la solución en la situación de partida (OCDE, 2013).

La matematización se puede descomponer en una primera fase de *matematización horizontal*, en la que se traduce el problema del mundo real al matemático, una segunda fase, denominada *matematización vertical*, en la que se utilizan conceptos y destrezas matemáticas, y una última fase de validación, en la que se reflexiona sobre todo el proceso desarrollado y sus resultados (Figura 1, adaptada de Rico y Lupiáñez, 2008, p. 236 y OCDE, 2013, p. 11). De acuerdo con esto, en el Informe PISA 2012 (OCDE, 2013) se consideran para la competencia matemática los procesos de (a) *formulación* matemática de situaciones, (b) *empleo* de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos, y (c) *interpretación*, aplicación y *valoración* de los resultados matemáticos al resolver un problema en el mundo real.

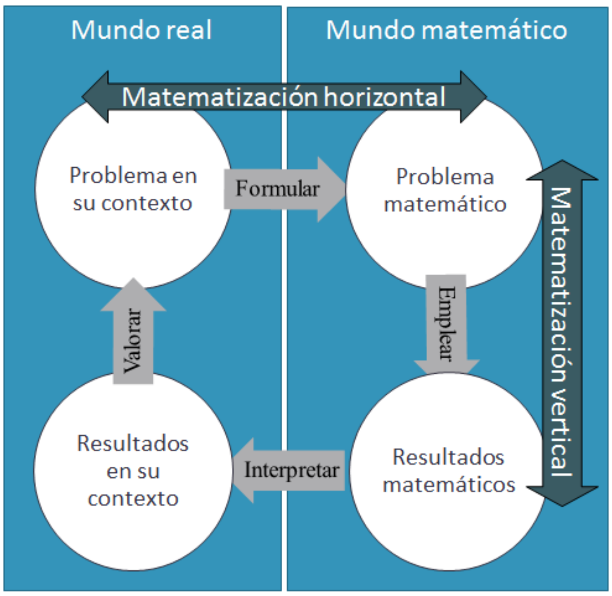


Figura 1. Fases del proceso de matematización

Al resolver un problema en su contexto, el alumno trata de identificar las matemáticas implicadas en la situación y la formula matemáticamente en función de los conceptos y las relaciones identificadas. Al hacer esto, el alumno transforma el problema del mundo real en un problema matemático. Dentro del mundo matemático, el alumno emplea conceptos y procedimientos matemáticos para obtener resultados matemáticos. En esta etapa se hacen necesarios los razonamientos, manipulaciones, transformaciones y cálculos matemáticos. Por último, los resultados matemáticos se interpretan en el mundo real. Estos procesos de formulación, empleo e interpretación de las matemáticas son componentes de la construcción de modelos matemáticos, y de la competencia matemática (OCDE, 2013).

Las *capacidades matemáticas fundamentales* que subyacen a la competencia matemática, cada vez que los alumnos se enfrentan a la resolución de problemas, son: *razonamiento y argumentación, comunicación, matematización, representación, utilización de herramientas matemáticas, utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico*, y *diseño de estrategias para resolver problemas*. Estas *capacidades* son similares a las *Prácticas Matemáticas* de los *Common Core State Standards* (CBP y CCSSO, 2010) y a los *Estándares de Procesos* del NCTM (2003), a los que hacíamos referencia en el apartado anterior. En este estudio nos centramos en el desarrollo de las capacidades de representación, utilización de herramientas matemáticas, utilización de operaciones y lenguaje simbólico, formal y técnico. Nos interesa estudiar la evolución de las primeras estrategias intuitivas e informales de los niños hasta el uso del lenguaje y contenidos formales cuando resuelven problemas aritméticos verbales.

3.2. Formalización progresiva

David Tall (2013) explica el desarrollo del pensamiento matemático, sintetizando los marcos teóricos elaborados por Piaget, Bruner o Fischbein, a través de tres etapas de larga duración a las que denomina "tres mundos matemáticos". En la primera etapa, el *mundo encarnado*, el pensamiento matemático se basa en la reflexión sobre la percepción y la interacción con objetos del mundo real. Este autor utiliza el término *cognición corpórea* (o *encarnada*) para describir la primera etapa intuitiva, basada en la percepción de las propiedades de los objetos y las operaciones con colecciones, partiendo de la idea de que todo pensamiento tiene origen corpóreo en nuestra experiencia sensorio-motora. Este pensamiento matemático evolucionará, con el tiempo, hacia el desarrollo del *mundo simbólico*, que establece el nexo entre lo corpóreo y lo simbólico, en el que los símbolos pueden reconocerse a la vez como operaciones a realizar o como conceptos manipulables en la mente. Por último, se puede alcanzar un *mundo formal axiomático*, que parte de axiomas, y mediante teoremas demostrados formalmente con un lenguaje matemático formal y un razonamiento matemático deductivo, construye teorías coherentes.

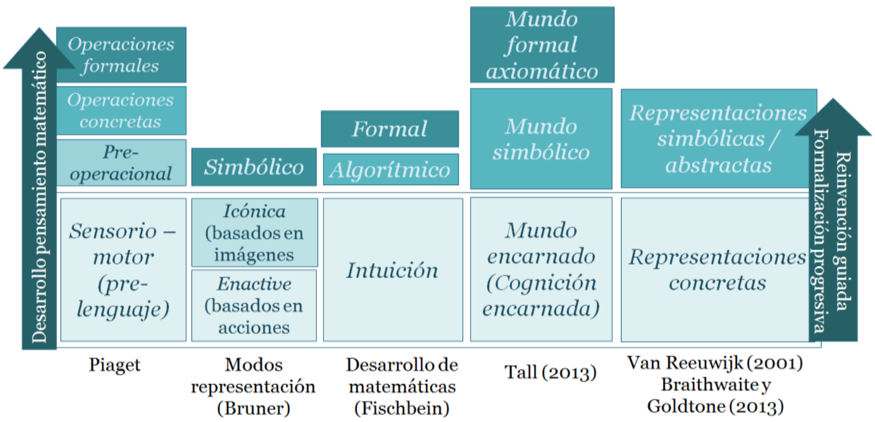


Figura 2. Evolución de las representaciones en el desarrollo del pensamiento matemático

La *Educación Matemática Realista* (RME) sigue un enfoque en el que se utilizan situaciones del mundo real, o problemas contextualizados, como inicio del aprendizaje de las matemáticas, y se sigue un proceso de matematización para llegar a estructuras formales matemáticas (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Se apoya en modelos concretos que sirven de mediadores entre lo concreto y lo abstracto. En la RME es muy importante la reinvención guiada, que consiste en animar a los niños a reinventar las matemáticas, con la guía del profesor, utilizando materiales instruccionales, permitiendo así el desarrollo de la comprensión conceptual (Van Reeuwijf, 2001). Gradualmente, se debería dar la oportunidad a los niños de construir sus representaciones libremente y pasar de estrategias informales, intuitivas con representaciones concretas a estrategias más formales y abstractas de resolución. Esto se hace con una instrucción guiada, que permita una matematización progresiva, dando la oportunidad a los niños de reinventar las matemáticas, ayudándoles a utilizar herramientas o modelos asociados a la actividad matemática. El punto de partida son las situaciones significativas realistas, entendidas como realizables o que el niño pueda imaginar, planteadas en un grupo de trabajo heterogéneo (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Como ejemplo de esta línea de trabajo, Van Reeuwijf (2001) comprobó, en el caso de resolución de ecuaciones, que empezando con métodos de resolución informales construidos por los alumnos y a través de estrategias pre-formales, se les puede ayudar a llegar a la resolución formal de las ecuaciones, desarrollando una comprensión conceptual sobre ellas. La formalización progresiva en ambientes de aprendizaje en los que los niños reinventan las matemáticas guiados por sus profesores y siguiendo una instrucción con materiales, contribuye al aprendizaje con comprensión (Van Reeuwijf, 2001).

La formalización progresiva, en el ámbito de la representación matemática, consiste en el paso de representaciones fundamentadas, que son representaciones concretas, perceptivas o de contextos reales con objetos u otros materiales, a representaciones formales, que pertenecen a sistemas de signos con reglas explícitas como pueden ser los números naturales (Braithwaite y Goldstone, 2013). Una instrucción basada en ambos tipos de representaciones, empezando con las representaciones concretas y realizando una transición gradual hacia representaciones formales, podría favorecer el aprendizaje con comprensión de los niños.

En este trabajo nos centramos en la evolución de las representaciones y estrategias utilizadas por los niños al resolver problemas aritméticos verbales de estructura aditiva de suma. Pretendemos estudiar la evolución de las representaciones fundamentadas o concretas a representaciones formales, intentando describir el proceso de formalización progresiva en este contenido en concreto.

3.2. Objetivos

En este trabajo nos planteamos los siguientes objetivos:

1. Analizar las estrategias utilizadas por los alumnos al resolver diferentes problemas de estructura aditiva, de suma.
2. Analizar las representaciones de cantidades discretas presentes en los procedimientos de resolución de los alumnos.
3. Describir la evolución de las estrategias de problemas de suma a lo largo del taller.
4. Describir la evolución de las representaciones utilizadas a lo largo del taller.
5. Interpretar la evolución de estrategias y representaciones en términos de la formalización progresiva.

4. Método

4.1. Participantes

Hemos desarrollado esta investigación en un colegio público de educación infantil y primaria de Manzanares el Real (Madrid). Participan 54 alumnos de primer curso de educación primaria, 30 niños y 24 niñas.

4.2. Intervención

La intervención realizada consiste en un taller de resolución de problemas aritméticos verbales, con el que se pretende favorecer el desarrollo de conocimientos informales sobre el valor posicional y con una metodología que permita desarrollar la competencia matemática de los niños (Ramírez, 2015). El taller consistió en 25 sesiones, una por semana, a lo largo de todo el curso escolar. El enfoque de enseñanza de las matemáticas está dirigido al desarrollo de estrategias informales y representaciones infantiles de las cantidades implicadas en los problemas, con el objetivo de construir significados y comprensión de contenidos matemáticos (Carpenter, Fennema y otros, 1999).

Hemos utilizado una serie de problemas aritméticos verbales, tanto de estructura aditiva como multiplicativa. Dentro del contexto general de la investigación, los alumnos han resuelto problemas de los tipos siguientes:

- Problemas de multiplicación y división con grupos de 10, que implican el concepto de decena, en los que los alumnos tienen oportunidad de contar distintos órdenes de unidades, como decenas y unidades, y de aprender aspectos importantes del sistema de numeración decimal (Ramírez y De Castro, 2014a).
- Problemas de estructura aditiva, con números de dos cifras, para que los niños construyan estrategias en las que la comprensión del valor posicional de los números facilite su resolución. Además, podrán relacionar el algoritmo de la suma y resta, que van a aprender en las clases habituales, con las estrategias desarrolladas en el taller (Ramírez y De Castro, 2016).
- Problemas de estructura multiplicativa, de multiplicación y división, para que construyan sus primeros significados sobre estas operaciones (Ramírez y De Castro, 2014b).

En este trabajo nos centramos en las siete sesiones del taller (3, 9, 10, 13, 17, 18 y 20) en las que se han planteado problemas de estructura aditiva de suma. Los enunciados de los problemas planteados pueden verse en la Tabla 1. Se incluyen problemas de combinación con la cantidad total desconocida con dos o más partes; problemas de cambio creciente con la cantidad final desconocida; y un problema que consideramos de dos etapas, con una primera fase que consiste en un problema de estructura multiplicativa de grupos iguales con agrupamientos de 10, ya que en primer curso de primaria el concepto de decena puede no haberse adquirido totalmente, y una segunda fase de combinación con total desconocido. Esto supone que los alumnos resuelven problemas de diferentes categorías semánticas, que se corresponden con distintos significados asociados a la suma. Además, los problemas basados en situaciones suma no se plantean de forma consecutiva, evitando que los alumnos los resuelvan de forma mecánica.

Sesión	Problema	Categoría semántica
3	Si el gato tragón se comió un hombre, un burro, 5 pajaritos y 7 niñas. ¿Cuántos se comió en total?	Combinación con 4 partes
9	Finn Herman cenó un jamón, dos pollos, tres filetes y veintiséis deliciosas salchichas. ¿Cuántas cosas tomó para cenar?	Combinación con 4 partes
10	Si Finn Herman tiene 38 dientes en la mandíbula superior y 30 en la inferior, ¿cuántos dientes tiene en total?	Combinación
13	Si en enero llegaron 31 pingüinos y en febrero vinieron otros 28, ¿cuántos pingüinos había al final de febrero?	Cambio creciente
17	Al volver a casa, la princesa le llevó a su mamá 12 pasteles, una decena de flores, un balón y un gato. ¿Cuántas cosas le lleva en total de regalo?	Combinación con 4 partes
18	Si el papá de Mónica subió 4 decenas de escalones, luego hizo un descanso, y después subió 38 escalones más, ¿Cuántos escalones había subido en total?	2 etapas -esquema jerárquico- (Multiplicación y Cambio creciente)
20	Si consigues 32 euros por saltar entre ortigas, y 29 euros por tragarte una rana muerta. ¿Cuántos euros has conseguido al final?	Combinación

Tabla 1. Problemas de estructura aditiva de suma

Las sesiones de trabajo en las que se realizan los problemas siguen las siguientes etapas: (1) Lectura de un cuento, que proporciona un contexto para el enunciado del problema; (2) Lectura de la carta, en la que una persona externa y familiar para los niños, pide ayuda para resolver el problema, consiguiendo una situación de comunicación; (3) Trabajo individual, en el que los alumnos eligen materiales y estrategias libremente para resolver el problema; (4) Puesta en común de las estrategias utilizadas; y (5) Escritura de la carta, donde se explica el procedimiento realizado por escrito.

4.3. Recogida de información

La recogida de datos se ha llevado a cabo a través de entrevistas flexibles en el aula, según el enfoque de Ginsburg, Jacobs y López (1996), recogiendo los procedimientos de los niños en hojas de registro y grabaciones en vídeo en distintos momentos del taller como en el trabajo individual, la puesta en común, o la escritura de la carta. Además, se realizan fotografías y se recogen las hojas de trabajo de los alumnos y las cartas con la explicación final de la estrategia tras la puesta en común (Ramírez, 2015).

5. Resultados

5.1. Análisis de estrategias

Las estrategias observadas han sido analizadas y clasificadas empleando el esquema de clasificación marcado por los estudios de la *Instrucción Cognitivamente Guiada* (CGI, en adelante) (Carpenter, Fennema y otros, 1999). La estrategia de modelización directa utilizada en estos problemas es la estrategia de *juntar todo*, que consiste en representar las cantidades de los sumandos, juntarlas en una única colección o considerarlas juntas, y realizar el conteo de todo. Las estrategias observadas en las sesiones de suma dejan un gran número de modalidades de aplicación de "juntar todo" dependiendo de la elección de distintos materiales, la forma de combinar las colecciones representadas, las posibles agrupaciones de 10 de las representaciones de las cantidades de números de dos cifras, o el modo de contar las representaciones (contando de uno en uno, de diez en diez, etc.).

La modalidad de aplicación de "juntar todo" más utilizada consiste en representar las cantidades de los sumandos sin mostrar agrupaciones en decenas y unidades, considerarlas todas juntas sin desplazarlas y realizar el recuento de uno en uno de todos los elementos (Figura 3). Esta modalidad se ha realizado con cubos encajables, otros objetos, marcas o dibujos en el papel y con el *rekenrek* (ábaco holandés para el aprendizaje del cálculo mental, ver De Castro, 2015). En los problemas con cuatro sumandos, hay una variación además, en la que se ordenan las cantidades de mayor a menor antes de realizar el recuento final. Aparece incluso otra modalidad más, si además de ordenar de mayor a menor, el recuento final se hace contando a partir del mayor sumando.

Figura 3. Juntar todo con cubos encajables considerando juntas las colecciones sin desplazarlas en la sesión 10

Otra modalidad consiste en representar las cantidades de los sumandos añadiéndolas a una única colección mientras se van representando, y realizar el recuento de todos los elementos. Esta modalidad se ha realizado con cubos encajables, con marcas iguales para todos los sumandos (Figura 4), con marcas diferentes para cada sumando, con dibujos, con los dedos y con el *rekenrek*.

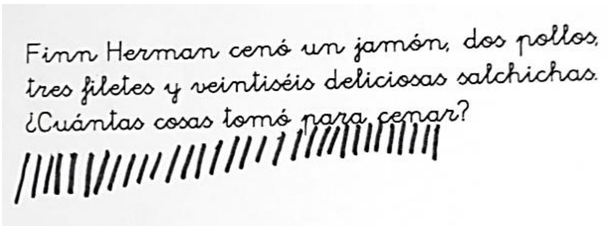


Figura 4. Juntar todo añadiendo marcas a una única colección en la sesión 9

El uso de la Tabla 100 para representar los sumandos del problema supone otra modalidad de aplicación de la estrategia "juntar todo" que consiste en representar el primer sumando con todos los numerales que hay hasta el numeral del primer sumando y a partir de ahí contar tantos numerales más como indica el segundo sumando. Hay niños que necesitan contar todas las etiquetas para el primer sumando y el segundo sumando, y hay niños que señalan el numeral del primer sumando, y a partir de ahí cuenta tantos numerales como indica el segundo sumando. Si el problema tuviese más de dos sumandos se hace de manera consecutiva. En la Figura 5, se puede observar como la niña busca el número 38 en la tabla 100 y a partir de ahí, cuenta 30 numerales, llegando así a la solución del problema, 68 (en la sesión 10).

Figura 5. Juntar todo con Tabla 100 en la sesión 10

Aunque con frecuencia menor, los niños también han representado las cantidades con bloques de base 10. Con este material se han podido observar también varias modalidades de aplicación de la estrategia “juntar todo”. La primera modalidad consiste en representar los sumandos con bloques de base 10, y hacer el recuento de todos los cubos de uno en uno, incluso contando de uno en uno las unidades que forman las decenas. Se ha observado también niños que identificaron la cantidad que representan las barras de la primera cantidad, como una década concreta (por ejemplo, 3 barras, 30), y el resto de material, ya fueran barras o unidades, se ha contado de uno en uno (ver Figura 6).

Figura 6. Estrategia de “Juntar todo” con bloques de base 10 en la sesión 10

Hay niños que han representado la primera cantidad con bloques de base 10 y el segundo sumando solo con unidades sueltas, realizando el conteo a partir del primer sumando, es decir, contando solo las unidades. Cabría pensar que esta modalidad se diese en la sesión 18 donde una cantidad se da en decenas y otra en unidades, pero no se utilizó solo en esa sesión (ver Figura 7).

Figura 7. Juntar todo con barras de base 10 y cubos encajables en la sesión 18

Los niños fueron utilizando de manera más avanzada los bloques de base 10, agrupando decenas tras representar todos los sumandos. Se dieron distintas modalidades según si el conteo se realizaba de uno en uno, de 10 en 10, o simplemente se identifica el número de dos cifras representado con bloques de base 10. En la Figura 8, los niños agrupan las decenas, teniendo así 7 decenas y 8 unidades sueltas. Concluyen que la solución es 78 por la posición de las cifras, 7 barras son decenas y 8 cubitos las unidades.

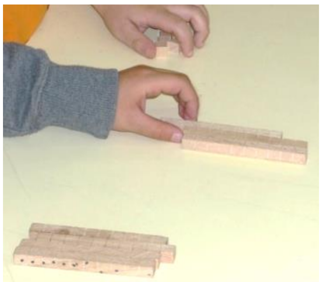


Figura 8. Juntar todo agrupando barras de 10 en la sesión 18

Las cajas de decenas de huevos tienen grupos de diez, y han provocado la aparición de modalidades de aplicación de "juntar todo" en las que se colocan las cantidades en las cajas, quedando así organizadas en decenas, aunque los niños que han utilizado este material han preferido el conteo de uno en uno (Figura 9).

Figura 9. Juntar todo con cartones de decena de huevos en la sesión 13

Las estrategias de conteo, *contar a partir del primero y contar a partir del mayor*, suponen no representar las cantidades, sino enunciar la secuencia de numerales a partir de uno de los sumandos, ya sea el primero o el mayor, llevando el rastro de numerales que se enuncian. El conteo termina cuando se hayan enunciado tantos numerales como indica el segundo sumando o el menor, respectivamente.

Una modalidad de la estrategia de "contar a partir del primero" surge al utilizar la Tabla 100 para ayudarse a llevar el rastro de la cantidad de numerales que indica el segundo sumando. En la sesión 10, una alumna utilizó la Tabla 100 para contar 30 numerales a partir de 38, llevando el rastro con las primeras filas de la Tabla 100.

En los problemas con cuatro sumandos se han podido observar *estrategias combinadas*. Dos de ellas consisten en combinar la estrategia de *juntar todo* con dedos o marcas con tres de las cuatro cantidades del problema, y con el resultado se realiza un conteo a partir del mayor, llevando el rastro con la colección de dedos o marcas previamente formada. Por ejemplo, en la sesión 9 donde hay que sumar un jamón, dos pollos, tres filetes y 26 salchichas, hubo niños que representaban con marcas en papel o con los dedos de las manos, el jamón, los dos pollos y los tres filetes, y a continuación, contaban a partir de 26, los elementos de la colección formada con las marcas o las manos. También se han utilizado estrategias combinadas de contar a partir del primero y recuperación de hechos numéricos, como por ejemplo, contar a partir del primero para los dos primeros sumandos, recuperar el hecho numérico que implica los otros dos sumandos y, finalmente, contar a partir del primer resultado, la cantidad obtenida del hecho numérico.

En los problemas de suma se han utilizado cuatro *estrategias inventadas* diferentes. La más frecuente es la estrategia de combinar por separado decenas y unidades, en la que finalmente se combina el resultado de ambos. Una variación de esta estrategia es combinar decenas y unidades en problemas con cuatro sumandos en la que se ordenan las cantidades para ir combinando de la forma más sencilla las decenas y las unidades. Hemos registrado estrategias inventadas que combinan conteos a saltos para averiguar la suma de las decenas, luego se combinan las unidades, y por último, se combina el total del conteo a saltos y las unidades. Por último, se ha observado la estrategia inventada secuencial o incremento, en la que se parte de uno de los sumandos, se suma primero las decenas del segundo sumando al primer sumando, y después se añaden las unidades del segundo sumando.

Finalmente, en las últimas sesiones predominó el algoritmo de la suma. En la Tabla 2 se presenta la frecuencia acumulada de todas las sesiones de suma de las estrategias y modalidades descritas.

	Sesiones						
Estrategia	**3**	**9**	**10**	**13**	**17**	**18**	**20**
Juntar todo, conteo 1-1	44	40	32	29	36	8	5
Juntar todo, conteo 1º						3	
Conteo		6	2	2	4		
Juntar todo grupos 10, conteo 1-1	2	2	2	2	3		2
Juntar todo grupos 10 conteo 10-10	1	1	2		2	2	1
Juntar todo grupos 10, conteo 1º			2			1	
Juntar todo grupos 10, VP				2		2	
Estrategias inventadas		1	2	3	6	7	2
Algoritmo			1	4		6	29

Tabla 2. Frecuencia del tipo de estrategia por sesión

La estrategia más utilizada en todo el taller ha sido la de modelización directa, juntar todo representando las cantidades sin agrupamientos de 10 y contando de uno en uno todos los contadores de la colección total. Se puede observar que en la última sesión que se plantea un problema de suma se utiliza el algoritmo con más frecuencia que el resto de estrategias.

5.2. Análisis de representaciones

La categorización utilizada para las representaciones de las cantidades discretas consiste en un par ordenado (representación del número, representación del tipo de objeto). Cada una de las componentes puede ser icónica y simbólica. Como resultado de esta combinación surgen 12 posibles tipos de representaciones como se puede ver en la Tabla 3, donde por columnas de izquierda a derecha la componente del número va de lo más icónico a lo más simbólico, y en las filas, la componente del tipo de objeto puede estar ausente, o tener aspectos icónicos y simbólicos.

La Tabla 3 contiene ejemplos de las representaciones que han utilizado los niños en distintos momentos del taller, tanto en la resolución del problema, como en la escritura de la solución o la carta. Las representaciones que no han aparecido en el taller son la B4, número con palabras e icónica de tipo de objeto, y la C2, con aspectos icónicos y simbólicos de número y simbólica de tipo de objetos.

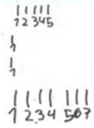
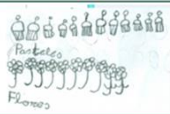
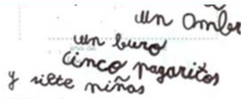
Representación tipo de objeto	Icónica **(1)**	Icónica y simbólica **(2)**	Simbólica (con cifras) **(3)**	Simbólica (con palabras) **(4)**
Sin representación **(A)**				
Icónica **(B)**				
Simbólica **(C)**				

Tabla 3. Tabla de ejemplos de representaciones recogidas en el taller

Las representaciones utilizadas en el taller han sido recogidas en tres momentos diferentes de las sesiones, teniendo en cada uno de ellos, un fin diferente. En la resolución del problema ayuda a modelizar la situación, en la escritura de la solución se necesita dar por escrito una cantidad, y en la carta, las cantidades se incluyen dentro de un texto. Estas diferencias han provocado que en cada una de ellas predominen representaciones diferentes. En la Tabla 4 se muestran las frecuencias acumuladas de las representaciones utilizadas en todas las sesiones con problemas de suma.

Para el momento de la explicación del procedimiento de *resolución*, la representación *icónica de número, sin representación de tipo de objeto* (A1) es la más habitual, seguida de la *icónica de número e icónica de tipo de objeto* (B1). Estas estrategias se utilizan en las modalidades de aplicación de estrategias del tipo de modelización directa que, como muestran los resultados anteriores, son las más elegidas por los niños, y se consideran informales, de hecho, estas representaciones son informales. La representación A2, *el número con aspectos simbólicos e icónicos de número sin representante de objeto*, se ha utilizado sobre todo al elegir la Tabla 100 para resolver el problema.

Representación número	***Representación objeto***	***Resolución***	***Solución***	***Carta***
1 *Icónica*	A (Sin representación)	202	8	
	B (Icónica)	43	8	
	C (Simbólica)	5		
2 *Con aspectos icónicos y simbólicos*	A (Sin representación)	16	1	
	B (Icónica)	1		
	C (Simbólica)			
3 *Simbólica (con cifras)*	A (Sin representación)	60	192	105
	B (Icónica)		1	3
	C (Simbólica)	2	3	80
4 *Simbólica (con palabras)*	A (Sin representación)		8	20
	B (Icónica)			
	C (Simbólica)		1	11

Tabla 4. Tabla de las frecuencias acumuladas de las representaciones de los problemas de suma

La representación A3, *número con cifras sin representante de objeto*, corresponde en su mayoría, al uso del algoritmo de la suma. Para dar la solución en la hoja de trabajo, la representación más utilizada es dar el número en cifras sin tipo de objeto (A3). Esta representación también se ha utilizado con alta frecuencia en la carta, y acompañada también con el nombre del objeto (C3).

5.3. Evolución de las estrategias

El estudio de la evolución de las estrategias a lo largo de las sesiones permite describir el desarrollo de los conocimientos informales. En la Figura 10, presentamos el porcentaje de la frecuencia de uso de cada estrategia a lo largo de las sesiones en las que aparecen problemas de suma. En la sesión 3, se planteó un problema de 3 etapas de combinación con total desconocido en la que todos los niños utilizaron la estrategia de modelización directa juntar todo sin agrupamientos de 10 y contando de uno en uno cada unidad representada, siendo uno de los casos con Tabla 100. El siguiente diagrama de barras recoge toda la variedad de modalidades de aplicación de juntar todo con material estructurado en grupos de 10, las formas de manipular estos agrupamientos de 10 y el recuento final. En la siguiente sesión, se plantea un problema del mismo tipo y aumenta levemente el conteo con objetos, conteo sin objetos incluso una estrategia inventada. En la sesión 10, la tercera con problemas de suma, aparece el primer uso del algoritmo de la suma de manera espontánea. En la sesión 13, sigue bajando el uso de estrategias de modelización directa y aumentando levemente estrategias más avanzadas con las inventadas y el uso de algoritmo. En la sesión 17 aparece de nuevo un problema de 3 etapas en el que una cantidad es una decena, baja el uso del algoritmo y aumentan las estrategias inventadas. En la sesión 18 se igualan en frecuencia de uso los distintos tipos de estrategias. En la última sesión se ve un aumento hacia la estrategia formal del algoritmo de la suma.

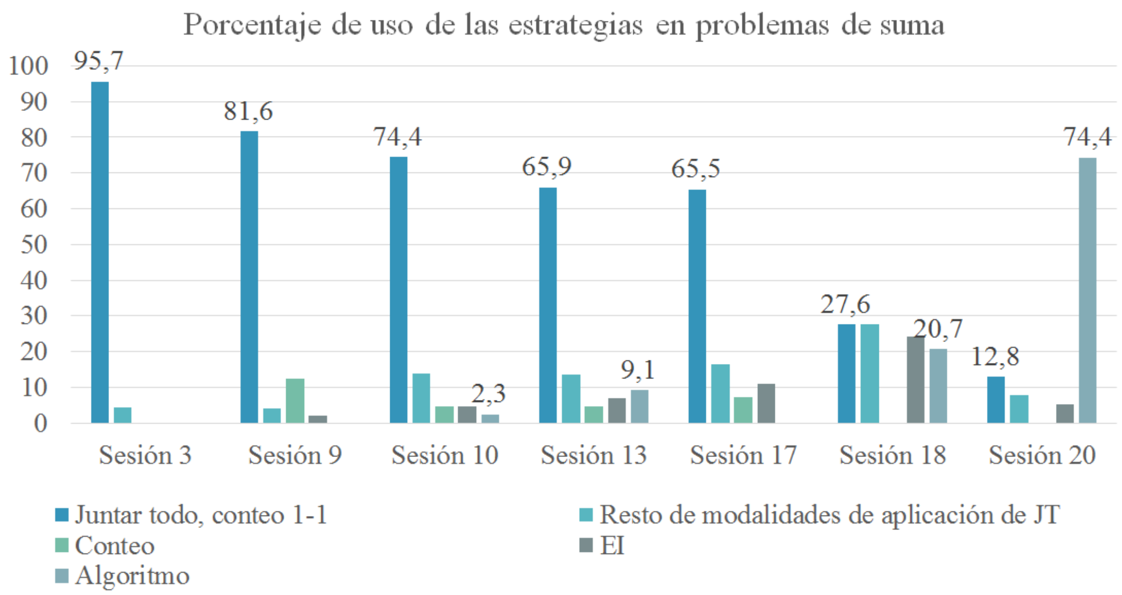


Figura 10. Porcentaje de estrategias utilizadas en las sesiones

5.4. Evolución de las representaciones

Las representaciones utilizadas en el momento de la explicación del procedimiento de la resolución, han sido A1, icónica de número y sin representante de tipo de objeto en su mayoría. Como se puede ver a lo largo del taller van descendiendo, aunque manteniéndose como las más habituales (ver Figura 11). Las representaciones icónicas de número y tipo de objeto (B1) se utilizan con menos frecuencia a lo largo del taller, presentándose en las once primeras sesiones. Más tarde son utilizadas en problemas donde el contexto de los cuentos resulta atractivo para los niños y sencillo de dibujar. Tanto las representaciones A1 como B1 contienen los aspectos más icónicos y conjuntamente, son las más utilizadas, descendiendo B1 en la segunda mitad del taller.

En las sesiones en las que las representaciones A1 y B1 tienen una frecuencia menor, se debe al aumento de la representación A3, que corresponde a cifras para el número sin representante de tipo de objeto, aumentando en las sesiones cercanas al final del taller. Esta representación es la escritura de un numeral, siendo una representación simbólica. Se utiliza en estrategias como el uso de un algoritmo que empieza a aumentar en las últimas sesiones del curso. La representación A2 con aspectos simbólicos e icónicos del número sin representante del tipo de objeto, se utiliza levemente a lo largo de todo el taller. Este tipo de representación se utiliza con la Tabla 100 o secuencias numéricas escritas por los niños. El resto de representaciones han sido utilizadas de forma esporádica en la explicación del proceso de resolución.

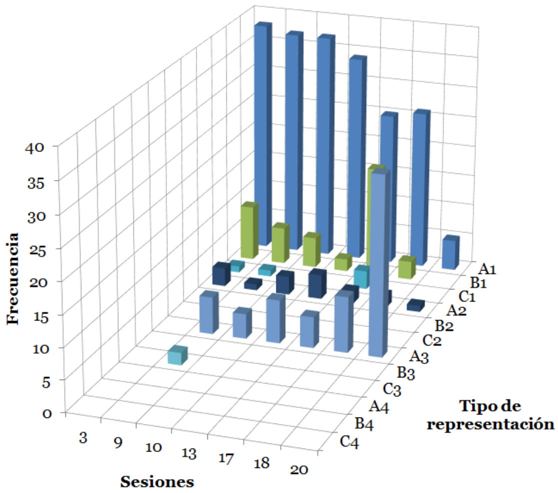


Figura 11. Frecuencia de representaciones en el momento de la resolución del problema

La representación utilizada para dar la solución y que ha predominado a lo largo de todo el taller es la A3, el numeral con cifras sin representante de tipo de objeto. No se ha observado gran variabilidad en el tipo de representación elegida para este momento, solo que se ha utilizado la representación A4 que consiste en escribir el número con palabras sin representante del tipo de objeto. Para dar por escrito una solución numérica los niños prefieren estos tipos de representación, ya de carácter simbólico y por lo tanto formal.

Las representaciones utilizadas en la carta han variado desde escribir el numeral con cifras o con palabras (14 o catorce). En las últimas sesiones del curso, aumenta la preferencia de las representaciones C3 y C4 (14 niñas o catorce niñas). Este aumento es debido a la mejora de la elaboración de la explicación escrita en la carta.

5.5. Interpretación en términos del proceso de formalización progresiva

Los alumnos de primero de primaria han preferido estrategias de modelización directa a lo largo del taller para resolver problemas aritméticos verbales. Estas estrategias se consideran informales e implican la representación de cantidades con objetos, de forma concreta. A lo largo del taller han ido incluyendo materiales como la Tabla 100 para representar las cantidades donde los numerales se utilizan como contadores, que incorporan aspectos simbólicos matemáticos. También han ido apareciendo estrategias de conteo, donde los numerales se mantienen representados mentalmente. Las estrategias inventadas sin utilizar material también suponen una abstracción de los numerales y manipulación con cada una de las cifras que muestran indicios de ese proceso de abstracción matemática. Por último, el uso del algoritmo de la suma es el procedimiento formal matemático para la resolución de este tipo de problemas.

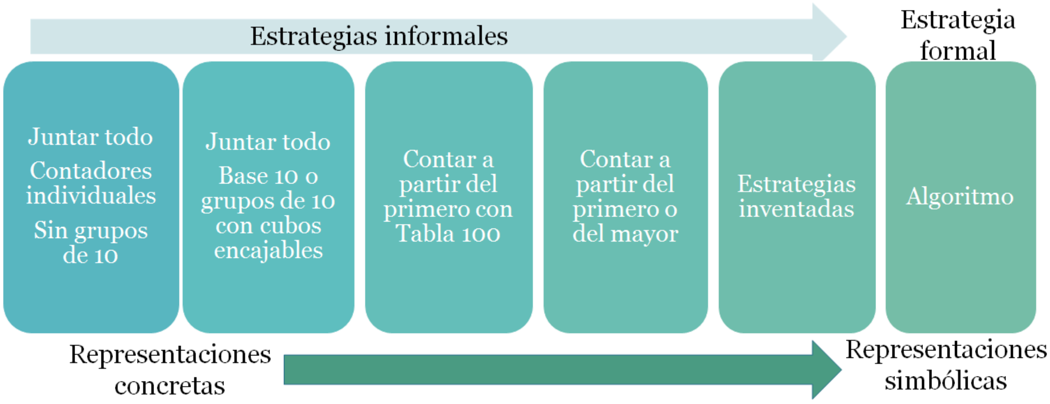


Figura 12. Evolución de las estrategias y representaciones hasta el conocimiento formal y simbólico

En la Figura 12 se puede observar como la evolución de las estrategias a lo largo del curso muestra una formalización progresiva de las representaciones de las cantidades. Los niños utilizan primero contadores individuales o agrupados en estructuras de 10. Después se apoyan en la secuencia numérica, escrita o mental para la resolución del problema. Más tarde, manipulan mentalmente los numerales usando el valor posicional de las cifras, hasta llegar al algoritmo convencional de la suma.

6. Conclusiones

6.1. La formalización progresiva: evolución de estrategias y representaciones

Las estrategias de modelización directa (con diferentes modalidades de aplicación) han sido elegidas por los niños más frecuentemente, a pesar de que en el primer curso de educación primaria se presta mucha atención al simbolismo aritmético y a la iniciación en los algoritmos de las operaciones con números de dos cifras. Dentro de un ambiente regido por normas que permitan la libre elección de instrumentos y estrategias, los niños han utilizado estrategias de modelización directa prácticamente en todas las resoluciones, y han ido incorporando en menor medida estrategias basadas en conocimientos formales como el algoritmo, aprendidos en el resto de clases de la asignatura, siendo en la última sesión la estrategia más usada. La propuesta de dejar a los niños que elijan procedimientos de resolución, permite la utilización de *conceptos corpóreos* (Tall, 2013), que tras procesos de abstracción matemática se van convirtiendo en conceptos matemáticos abstractos.

En la fase de resolución del problema, donde los niños buscan estrategias de resolución, los niños han presentado una preferencia a lo largo del taller por representaciones icónicas de número sin representante del tipo de objeto, para resolver el problema. En su mayoría han sido cantidades representadas con objetos, cubos encajables, marcas y, en menor medida, dibujos. Estas representaciones se utilizan en la mayoría de las estrategias de modelización directa que, como hemos comentado antes, fueron las más utilizadas. Estas representaciones se pueden considerar *representaciones concretas* tal como lo hacen Braithwaite y Goldstone (2013). A lo largo del curso de primero de educación primaria, se introducen conocimientos formales como la escritura de los numerales y procedimientos de cálculo como los algoritmos. Los niños comienzan a utilizar progresivamente la representación simbólica de número en cifras, adaptándose a un lenguaje simbólico matemático, tal como se hace en los procesos de formalización progresiva.

Los niños han establecido relaciones entre estrategias informales como la modelización directa y los algoritmos, establecen conexiones entre los conocimientos informales que van adquiriendo en el taller y los conocimientos formales que paralelamente trabajan en el resto de clases de matemáticas (Carpenter y Lehrer, 1999). Estas conexiones entre el conocimiento informal y formal son las referidas por el NCTM (2003) en sus Estándares para la Educación Matemática como las fundamentales para el aprendizaje de las matemáticas en los primeros años de escolaridad.

6.2. Implicaciones para la enseñanza

En la metodología seguida en el taller, los alumnos resuelven problemas inventando estrategias propias y debatiéndolas con el resto de compañeros del aula; para cada problema, se admiten varias estrategias cómo válidas; y los alumnos desarrollan su competencia matemática, ya que se ven inmersos en procesos de resolución de problemas, razonamiento, comunicación, establecimiento de conexiones y representación (De Castro y otros, 2012). Un aspecto importante de esta metodología es la libre elección del material para la construcción de estrategias. Los niños han mostrado una clara preferencia por las estrategias informales, antes que por las formales. Estas últimas no corresponden a su forma natural de pensar, pero son las que aparecen explícitamente en el currículo.

Proponemos la inclusión de conocimientos informales en la planificación del aula, adelantando experiencias en las que los niños puedan construir ideas sobre conceptos o procedimientos antes de su enseñanza formal. La finalidad didáctica de la resolución de problemas, en este enfoque, es la construcción de significados y no de aplicación de contenidos. A través de la resolución de problemas hemos conseguido que los niños razonen y modelicen las situaciones descritas en los enunciados, articulen sus ideas para comunicarlas al resto de la clase, pudiendo establecer así relaciones entre los conocimientos propios y los de sus compañeros. Esto implicará un aprendizaje con comprensión de estos contenidos matemáticos (Carpenter y Lehrer, 1999) y el desarrollo de la competencia matemática.

A finales de curso, hemos constatado que los alumnos acaban empleando procedimientos formales (algoritmos) y un lenguaje técnico y formal (ver Figura 10, sesión 20, en que el uso espontáneo -y correcto- del algoritmo alcanza un 74,4%). Esto muestra, a nuestro juicio, que los objetivos que se plantean habitualmente para el primer curso de educación primaria en matemáticas son compatibles con alternativas metodológicas constructivistas que pueden mejorar a la metodología tradicional en comprensión y en desarrollo de capacidades matemáticas fundamentales (OCDE, 2013).

Como línea de investigación futura, se propone estudiar la articulación de los conocimientos informales y formales, elaborando trayectorias de enseñanza-aprendizaje para contenidos concretos que faciliten las conexiones entre ambos tipos de conocimiento. Las trayectorias describen cómo es la progresión del aprendizaje de un contenido y contienen tareas para adquirirlo (Ramírez, 2015).

Bibliografía

Braithwaite, D.W. y Goldstone, R.L. (2013). Integrating formal and grounded representations in combinatorics learning. *Journal of Educational Psychology, 105*(3), 666-682.

Carpenter, T.P., Fennema, E., Franke, M.L., Levi, L. y Empson, S.B. (1999). *Las matemáticas que hacen los niños. La enseñanza de las matemáticas desde un enfoque cognitivo*. Portsmouth, NH:

Heinemann. Traducción de Carlos de Castro Hernández y Marta Linares Alonso. Recuperado el 15 de octubre de 2015 de: http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/CarpenterT99-2642.PDF

Carpenter, T.P., y Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. En E. Fennema y T.A. Romberg (eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19-32). Mahwah, NJ: Erlbaum.

CBP y CCSSO (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: NGA Center & CCSSO. Recuperado el 15 de noviembre de 2015 en: http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf

De Castro, C. (2015). Aprendiendo a subitizar cantidades con el rekenrek en un sistema online para el aprendizaje de las matemáticas. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 32*(2), n. 90, 49-57.

De Castro, C., Molina, E., Gutiérrez, M.L., Martínez, S., Escorial, B. (2012). Resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 80*, 53-70.

Ginsburg, H., Jacobs, S.F. y López, L.S. (1998). *The teacher's guide to flexible interviewing in the classroom: Learning what children know about math*. Needham Heights, MA: Allyn & Bacon.

Ministerio de Educación y Ciencia (2014). Orden ECD/686/2014, de 23 de ABRIL, por la que se establece el currículo de Educación Primaria para el ámbito de gestión del Ministerio de Educación, Cultura y deporte y se regula su implantación, así como la evaluación y determinados aspectos organizativos de la etapa. *BOE, 106*, 33827-34369. Recuperado el 21 de noviembre de 2015 de: https://www.boe.es/boe/dias/2014/05/01/pdfs/BOE-A-2014-4626.pdf

NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 1-23. Recuperado el 15 de octubre de 2015 de: http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/download/30/34

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

NRC (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. J. Kilpatrick, J. Swafford y B. Findell (eds.), Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

NRC (2009). *Mathematics Learning in Early Childhood: Paths Toward Excellence and Equity*. C.T. Cross, T.A. Woods y H. Schweingruber (eds.), Committee on Early Chilhood Mathematics, National Research Council.

OCDE (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Madrid: MEC-INEE. Recuperado el 23 de julio de 2014 de: http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d

Ramírez, M. (2015). *Desarrollo de conocimientos matemáticos informales a través de resolución de problemas aritméticos verbales en primer curso de educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

Ramírez, M. y De Castro, C. (2014a). Descubrimiento del valor posicional a través de la resolución de problemas. *Didácticas Específicas, 11*, 40-66.

Ramírez, M. y De Castro, C. (2014b). Trayectorias de aprendizaje de la multiplicación y la división de cuatro a siete años. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 31*(3), 41-56.

Ramírez, M. y De Castro, C. (2016). Caminos de aprendizaje para problemas aritméticos de estructura aditiva de sustracción. *Indivisa. Boletín de Estudios y de Investigación, 16*.

Rico, L. y Lupiáñez, J.L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. New York: Cambridge University Press.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics 54*, 9-35.

Van Reeuwijk, M. (2001). From informal to formal, progressive formalization an example on “solving systems of equations”. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (eds.), *The future of teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study conference* (Vol. 2, pp. 613–620). Melbourne, Australia. Recuperado el 25 de septiembre de 2014 de: https://minerva-access.unimelb.edu.au/handle/11343/35000

Mónica Ramírez García. Profesora de Didáctica de las matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid. Licenciada en Ciencias Matemáticas por la Universidad Autónoma de Madrid y doctora por la Universidad Complutense de Madrid, en la Facultad de Educación, centrando su perfil investigador en la didáctica de las matemáticas. Algunas de sus publicaciones pueden consultarse en http://eprints.ucm.es/ y en https://www.researchgate.net/profile/Monica_Ramirez_Garcia.
Email: monica.ramirez@edu.ucm.es

Carlos de Castro Hernández. Profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad Autónoma de Madrid (UAM). Licenciado en Matemáticas por la UCM y doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada, tiene como líneas de investigación la Educación Matemática Infantil y el Pensamiento Numérico. Autor, junto con Elisa Hernández, del proyecto de Santillana “A contar. Matemáticas para pensar”, para la enseñanza de las matemáticas de 4 a 6 años http://www.santillana.es/blog/acontar/. Algunas de sus publicaciones están disponibles en https://www.researchgate.net/profile/Carlos_De_Castro_Hernandez
Email: carlos.decastro@uam.es