NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 96, noviembre de 2017, páginas 79-101

Características de las prácticas matemáticas en la elaboración de simuladores con GeoGebra

Irene V. Sánchez N. (E.T.C. Hermágoras Chávez, Grupo TEM, Venezuela)
Juan Luis Prieto G. (Universidad del Zulia, Grupo TEM, Venezuela)

Fecha de recepción: 9 de Abril de 2017
Fecha de aceptación: 4 de Julio de 2017

Resumen Este trabajo describe las prácticas matemáticas que han ocurrido durante la elaboración de un simulador con GeoGebra de una locomotora a vapor, en la que participan una alumna de enseñanza secundaria (16 años), un estudiante para profesor de Matemática y Física, y una profesora de Matemática. La experiencia se desarrolló en torno a un proyecto de servicio comunitario, denominado Club GeoGebra para la Diversidad. Para la descripción de las prácticas, se analizan los discursos orales y escritos de los tres sujetos antes mencionados, asumiendo una perspectiva antropológica y didáctica de las prácticas matemáticas. Los resultados dan cuenta de aspectos inherentes a la declaración de las tareas, las técnicas y las justificaciones tecnológicas que subyacen en los discursos; todo esto en relación al conocimiento matemático e instrumental del que se hace uso.

Palabras clave Práctica matemática, geometría, simulación computacional, GeoGebra, Club GeoGebra.

Title **Characteristics of mathematical practices in the construction of simulators with GeoGebra**

Abstract This paper describes the mathematical practices that have taken place in a simulation experience with GeoGebra of a steam engine, which involved a high school student (16 years old), a prospective mathematics and physics teacher and a mathematics professor. The experience was developed in the framework of a community project, called Club GeoGebra for the Diversity. To describe these practices, oral and written discourses of the individuals mentioned above were analyzed, supporting the ideas from an anthropological and didactic perspective, specifically the notion of mathematical praxeology. The results show aspects inherent in the statement of the task, the techniques used and the technological justifications underlying the discourses; all this in relation to the mathematical and instrumental knowledge which is used.

Keywords Mathematical practice, geometry, computational simulation, GeoGebra, GeoGebra Club

1. Introducción

A pesar del creciente número de estudios que se emprenden en el campo de la Educación Matemática, los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos siguen viéndose afectados por múltiples problemas, tales como, el fomento de vínculos "artificiales" entre el mundo real y la matemática, la ausencia de tecnologías digitales como medios para el aprendizaje matemático y la poca autonomía de los alumnos en el desarrollo de las actividades dentro y fuera del aula (Artigue,

Sociedad Canaria *Isaac Newton*
de Profesores de Matemáticas

2014; 2012). Estos problemas se ponen de manifiesto en el desarrollo de las prácticas matemáticas que los profesores promueven en sus clases y que suelen caracterizarse por un tratamiento del contenido bajo un enfoque de transmisión de información (teorías como objetos acabados, técnicas algorítmicas y notaciones) que luego debe ser reproducida por los alumnos, generalmente en entornos de lápiz y papel (Álvarez, 2005; Gascón, 1998). En muchos casos, este tipo de prácticas produce resistencia, desinterés, rechazo, apatía y poco compromiso de los alumnos con su propio aprendizaje (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997; Clark, Nelson, Sengupta & D'Angelo, 2009).

Frente a esta realidad, una alternativa es la apertura y apoyo de las instituciones educativas al emprendimiento de actividades de aprendizaje no convencionales, con un carácter creativo, innovador y no rutinario, que posibiliten el establecimiento de conexiones entre la matemática y la realidad, y tengan implicaciones directas sobre las prácticas matemáticas escolares. Hoy en día las tecnologías digitales constituyen medios propicios para apoyar el desarrollo de actividades con estas características, de manera que los alumnos puedan sentirse confiados de sus propios aportes y asuman el compromiso de aprender desde su experiencia. Sin embargo, la integración de las tecnologías digitales en la enseñanza de la matemática ha sido por demás lenta y compleja, en especial, debido a la resistencia a reconocerlas como herramientas "legítimas" para hacer matemáticas (Acosta, 2005). A pesar de ello, en la actualidad muchos investigadores siguen confiando en las bondades de las tecnologías digitales, al punto de sugerir el uso de simuladores y juegos de video como nuevos escenarios de aprendizaje de la matemática y las ciencias naturales (González, Molina y Sánchez, 2014; Hilton & Honey, 2011).

Las investigaciones situadas en estos escenarios se han dedicado al análisis de las implicaciones del uso de simuladores y juegos de video en el aula, dejando a un lado las experiencias de elaboración de estos recursos como contextos potenciales en los que emergen prácticas matemáticas interesantes. Desde un punto de vista investigativo, la elaboración de simuladores puede favorecer la legitimación de las nuevas tareas, procedimientos y discursos matemáticos que emergen en este contexto. La experiencia acumulada por el Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática en la elaboración de simuladores computacionales, con el fin de promover aprendizaje matemático en alumnos, futuros profesores y profesores en servicio, da cuenta de las bondades de GeoGebra como un entorno dinámico práctico y versátil para la construcción de una diversidad de modelos representativos de fenómenos de la realidad, como se ha reseñado en trabajos anteriores (Cervantes, Rubio y Prieto, 2015; Prieto y Gutiérrez, 2015, 2016; Reyes y Prieto, 2016; Rubio, Prieto y Ortiz, 2016).

Aunque la elaboración de simuladores con GeoGebra es un campo fértil para la emergencia de nuevas prácticas matemáticas, su integración al currículo escolar requiere de una reflexión profunda sobre las condiciones de la actividad que se produce en su seno, lo que implica conocer en qué términos se manifiestan estas prácticas, qué aspectos la constituyen y de qué manera ocurren cuando los sujetos interaccionan con el medio tecnológico y la teoría matemática subyacente. Con este fin describimos en el presente trabajo las prácticas matemáticas que tienen lugar en una experiencia de simulación con GeoGebra que involucra dos partes del mecanismo de una máquina de vapor, en la que participan una alumna de 5to año de Educación Media, un estudiante para profesor de Matemática y Física y una profesora de Matemática en servicio.

2. Elaboración de simuladores con GeoGebra y prácticas matemáticas

En el ámbito educativo, un simulador computacional es el producto de la representación de un proceso o fenómeno (natural o artificial), por medio de modelos computacionales elaborado con la ayuda de determinadas herramientas tecnológicas (Rodríguez y Roggero, 2014). Al usar el simulador, los sujetos interaccionan con el proceso o fenómeno estudiado a través del control de los parámetros representados en el modelo computacional, propiciando cierta comprensión del sistema (Clark, Nelson, Sengupta & D´Angelo, 2009; Hilton & Honey, 2011). Desde esta perspectiva, la elaboración de simuladores con GeoGebra es un simulador computacional cuyo modelo asociado se elabora en la vista gráfica del software, mediante las herramientas y funcionalidades dinámicas que esta tecnología ofrece a los usuarios (Rubio, Prieto y Ortiz, 2016). Es importante destacar que la elaboración del modelo de un simulador con GeoGebra, como cualquier actividad humana, es realizada por unos sujetos en el seno de una institución que hemos denominado “Club GeoGebra”. Por *institución* se entiende a toda organización social estable en la que unos sujetos realizan determinadas actividades, empleando para ello los recursos materiales e intelectuales que la propia organización pone a su disposición, bajo ciertas restricciones (Romo, 2014; Castela, 2009). En el caso de un Club GeoGebra, la actividad principal es la *elaboración de simuladores* que los alumnos realizan en la vista gráfica del GeoGebra, bajo la dirección de un profesor o estudiante para profesor de Matemática, quien actúa como promotor de los aprendizajes.

En relación a esta actividad, es importante precisar qué se entiende por *fenómeno* y *modelo* computacional asociado. En cuanto al *fenómeno*, en la elaboración de simuladores con GeoGebra, los alumnos suelen construir modelos de mecanismos, vistos como sistemas “no matemáticos”, que son seleccionados en base a la propia experiencia con el funcionamiento real de éstos o a través de un conocimiento más experto. Un ejemplo de esta clase de fenómenos lo constituye un motor de cuatro tiempos, cuyo movimiento del pistón puede ser interpretado como un cambio de posición de la sujeción de la biela y la sujeción al émbolo en el tiempo. Otros ejemplos de esta clase de fenómenos pueden ser consultados en Prieto y Gutiérrez (2015; 2016). La selección de un fenómeno se acompaña de la consulta de información sobre éste en diversas fuentes (especialmente de Internet), y de la recolección de imágenes con movimiento que se convierten en las principales referencias que se tienen al momento de emprender la actividad. De la recolección se obtiene una imagen estática que muestra una perspectiva del fenómeno, de sus partes o elementos.

En cuanto al *modelo computacional*, este se elabora a partir de las partes o elementos que componen al fenómeno, según el punto de vista de los sujetos pertenecientes a la institución, dando paso a una serie de *tareas de simulación* que organizan la actividad en una secuencia (Rubio, Prieto y Ortiz, 2016). Es importante destacar que las tareas de simulación son el producto de una toma de decisiones condicionada por el conocimiento del fenómeno que poseen los sujetos. Por lo tanto, son resueltas tantas tareas de simulación como partes del fenómeno sean capaces de identificar los alumnos. Resolver cada tarea de simulación implica construir *dibujos dinámicos*, es decir, dibujos creados en un entorno de Geometría Dinámica (en nuestro caso el GeoGebra) y que conservan las relaciones geométricas declaradas en su construcción (Acosta, 2010; Laborde, 1997).

Con relación a los dibujos dinámicos, vale la pena destacar tres cuestiones. En primer lugar, cada dibujo dinámico está compuesto de uno o varios *objetos geométricos* que le otorgan sentido. El número de objetos depende de las capacidades de visualización geométrica de los sujetos involucrados en la actividad. En segundo lugar, cada objeto geométrico que compone a un dibujo dinámico es construido con el GeoGebra sobre la base de las *propiedades espaciales* del dibujo, reconocidas en un boceto de elaboración previa (creado en un medio de lápiz y papel) o en alguna otra imagen de referencia, que luego son traducidas en *propiedades geométricas* (Laborde, 1997). En tercer lugar, un dibujo dinámico es una respuesta parcial a la actividad de elaborar el simulador, por ende, el conjunto de dibujos dinámicos que responden a las tareas de una misma simulación constituye el modelo computacional del mecanismo seleccionado.

La elaboración de un dibujo dinámico con GeoGebra demanda la construcción de cada objeto geométrico que lo compone, dando lugar a una nueva serie de tareas más puntuales, que denominamos *tareas de construcción*. Estas tareas tienen una naturaleza geométrica, ya que son resueltas a través de *procedimientos* de construcción mediados por herramientas del software que encapsulan conocimiento geométrico (contenidos y forma de proceder) (Acosta, 2007). Estos procedimientos son el resultado de decisiones comunicadas al programa y validadas tanto por el grado de fidelidad del dibujo obtenido con respecto al funcionamiento real del fenómeno, como por la consistencia de la construcción. La consistencia de una construcción realizada en la vista gráfica del GeoGebra es hecha por medio de la *prueba del arrastre*, una acción que consiste en desplazar el dibujo por alguno de sus elementos libres con el fin de detectar posibles inconsistencias en la construcción (Acosta, 2007; Arzarello, Olivero, Paola, & Robutti, 2002; Laborde, 2007). Las razones que justifican las formas de proceder ante una tarea de construcción se ponen de manifiesto en los *discursos* (orales o escritos) que los alumnos y promotores elaboran durante las reuniones de trabajo. Estos discursos revelan las conexiones que los sujetos son capaces de establecer entre los procedimientos y los *saberes* subyacentes, en especial, los saberes matemáticos y los derivados del uso del GeoGebra al construir cada figura geométrica.

Desde una perspectiva antropológica, estos aspectos de la elaboración de simuladores con GeoGebra ponen de manifiesto prácticas mediadas por tecnologías digitales muy particulares, que nos enfrentan a formas no convencionales de modelación de la realidad y que pueden ser caracterizadas a través de la noción de *praxeología*. A pesar de la emergencia de diferentes praxeologías (ligadas al fenómeno real o al modelo geométrico que lo representa) durante la actividad. En este trabajo interesan especialmente las praxeologías matemáticas, por considerar su análisis como el paso previo para la comprensión de esta actividad institucionalizada a mayor profundidad.

3. Prácticas matemáticas en la elaboración de simuladores como praxeologías

Según Chevallard (1999), toda actividad humana regularmente realizada puede describirse en términos de *praxeologías*. La noción de praxeología ha resultado ser una herramienta eficaz para el análisis de prácticas matemáticas poco exploradas, como es el caso de aquellas que involucran el uso de algún software de geometría dinámica (Acosta, 2007). Esta noción tiene su origen en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), un marco teórico de la Didáctica de las Matemáticas que asume como su objeto primario de investigación a la actividad matemática y los saberes que de ella emergen, en el conjunto de las actividades humanas que se dan en determinadas instituciones sociales (Bosch, 2003; Chevallard, 1999). En la noción de praxeología se considera que:

> (…) en última instancia, toda actividad humana consiste en resolver una tarea (t) de un cierto tipo (T), por medio de alguna técnica (τ), justificada por una tecnología (θ), que permite tanto pensarla como producirla, y que a su vez es justificable por una teoría (Θ). En resumen, toda actividad humana pone en obra una organización que se denota [T, τ, θ, Θ] y se denomina praxeología u organización praxeológica. La palabra praxeología hace hincapié en la estructura de la organización [T, τ, θ, Θ]: la *praxis*, que significa “práctica”, se refiere al bloque práctico-técnico (o praxis) [T, τ], y el *logos*, que significa “razón”, “discurso razonado”, remite al bloque tecnológico-teórico [θ, Θ]. (Chevallard, 2002, p. 1).

A continuación, se describe más detalladamente el funcionamiento de esta herramienta como referente teórico que permite caracterizar las prácticas matemáticas que ocurren en la actividad de elaboración de simuladores con GeoGebra.

El *tipo de tarea* (T) se refiere a cada clase de tareas problemáticas que enfrentan los miembros de una determinada institución. En el caso de las instituciones escolares, por lo general, las tareas a las que nos referimos son de naturaleza matemática. En la elaboración de simuladores con GeoGebra, las tareas t de un tipo T son las conocidas *tareas de construcción* y, por lo tanto, se refieren a la construcción de las formas que componen a un dibujo dinámico. Estas tareas de construcción se caracterizan por responder a ciertas condiciones geométricas y pertenecer a clases de tareas más amplias, tales como, construir un triángulo, una circunferencia u otra forma geométrica. En la figura 1a, se muestra un boceto de la biela que compone a un motor de cuatro tiempos (trazo en color negro). Para su representación en la interfaz del GeoGebra, esta biela puede ser interpretada geométricamente como un "segmento", el cual se construye a partir de objetos geométricos existentes en la vista gráfica del programa. La tarea de construcción correspondiente a esta situación sería: *construir un segmento a partir de un punto exterior*. Esta tarea pertenece a un tipo de tarea T que incluye todos los casos de construcción de segmentos posibles.

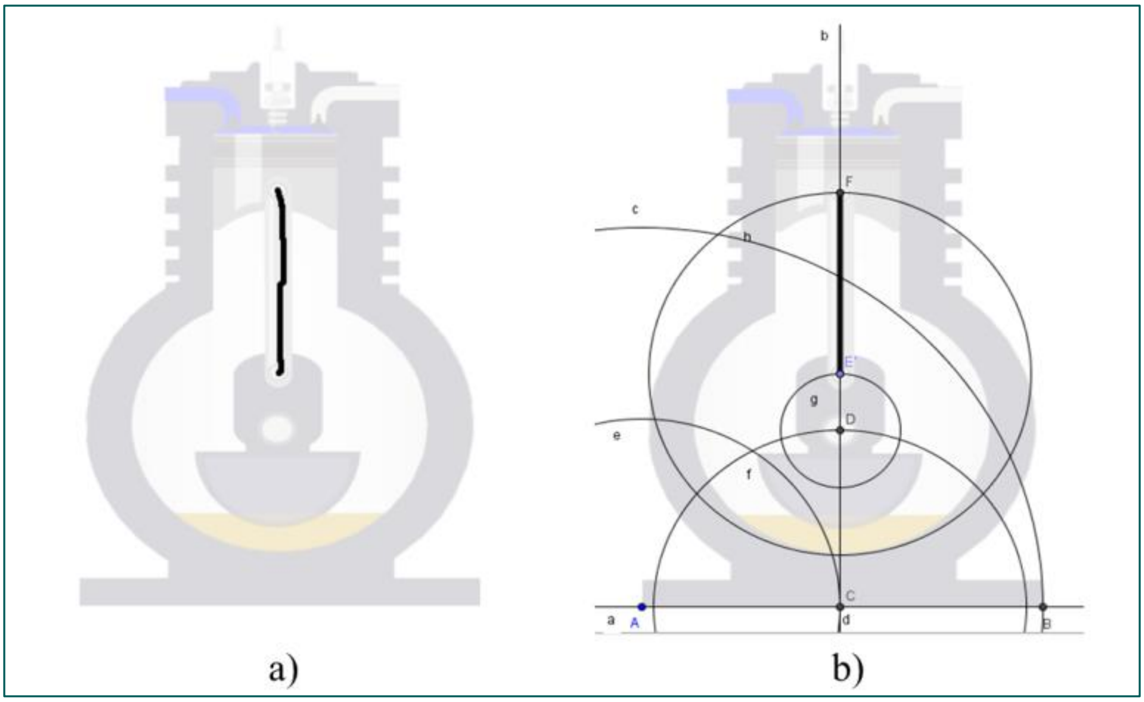

Figura 1. Imagen estática de un motor a cuatro tiempos y construcciones geométricas asociadas. Tomado, de Montiel y Castillo (2015)

El siguiente elemento de la praxeología es la *técnica* (τ), referida al conjunto de procedimientos que permiten tratar algunas tareas del tipo T con la mediación de ciertas herramientas. En particular, para la simulación con GeoGebra, una técnica τ corresponde al proceso seguido para atender a una tarea de construcción en el software. Continuando con el ejemplo anterior, en la tabla 1 se resume el proceso de construcción seguido por un alumno de Educación Media (16-17 años) y su promotor (un estudiante para profesor de Matemática y Física) para resolver la tarea antes descrita (ver Figura 1b).

(Nota: La unidad mencionada en la tabla se conoce como medida patrón, esto es, una medida de distancia o longitud seleccionada por los alumnos y asociada a algún objeto geométrico sobre la imagen estática.)

No. paso	Descripción del paso	Herramienta del GeoGebra	Observaciones del investigador
1	Trazar una circunferencia e de centro en el punto A (extremo del segmento d) y de radio $\frac{unidad}{2{,}02}$	Circunferencia (centro, punto)	Estos pasos se realizan para localizar el primer extremo del segmento (una de las condiciones necesarias para dibujar el segmento requerido por la tarea)
2	Determinar el punto de intersección C entre la circunferencia e y el segmento d	Intersección	
3	Trazar por el punto C una recta perpendicular b al segmento d	Perpendicular	
4	Trazar una circunferencia f de centro en el punto C y radio $\frac{\text{unidad}}{2{,}15}$	Circunferencia (centro, radio)	
5	Determinar el punto de intersección D entre la circunferencia f y la recta b	Intersección	
6	Trazar una circunferencia g de centro en punto D y radio $\frac{\text{unidad}}{6{,}69}$	Circunferencia (centro, radio)	
7	Marcar un punto E sobre la circunferencia g	Punto	
8	Crear un deslizador de tipo ángulo α con intervalo [0,360]	Deslizador	
9	Rotar al Punto E, con respecto al punto D y valor del ángulo α, para obtener el punto E'	Rotación	
10	Trazar una circunferencia h de centro E' y radio $\frac{\text{unidad}}{2{,}1}$	Circunferencia (centro, radio)	Estos pasos se realizan para localizar el segundo extremo del segmento (otra de las condiciones para representar el segmento)
11	Determinar el punto de intersección f entre la circunferencia h y la recta b	Intersección	
12	Trazar el segmento $\overline{F\,E'}$	Segmento	Este paso se realiza para dibujar el segmento demandado en la tarea

Tabla 1. Técnica de construcción un segmento a partir de un punto externo. Fuente: Adaptación realizada por los autores a partir del trabajo de Montiel y Castillo (2015)

La *tecnología* (θ) se refiere al discurso elaborado para justificar y hacer inteligible una técnica τ. Respecto a la tecnología, Castela (2009) afirma que un discurso tecnológico θ permite que una técnica τ emerja, se trasmita y legitime como una forma válida de resolver tareas del tipo T. En la simulación con GeoGebra, una tecnología θ incluye los diversos registros verbales, escritos o gestuales de los que se valen los sujetos para hacer que otros comprendan la técnica τ empleada. En la figura 2 se muestra parte de un discurso escrito que responde a la tarea mencionada en el ejemplo anterior, específicamente para explicar los pasos 1, 2 y 3 de la técnica resumida en la tabla 1.

Se necesitó localizar un punto que estuviera contenido en la recta y en el segmento que representa la base del cartel, en otras palabras, estamos determinando el pie de la perpendicularidad entre ambos objetos geométricos. Para esto, con la herramienta *Circunferencia (Centro, Radio)* trazamos una circunferencia con centro A y de radio estimado igual al cociente $\frac{unidad}{2.02}$. Luego se intersecta la circunferencia y el segmento $\overline{AB}$, determinando un punto C, después con la herramienta *Recta perpendicular*, se levantó una perpendicular al segmento

Figura 2. Ejemplo de un discurso tecnológico en la simulación con GeoGebra. Tomado, de Montiel y Castillo (2015)

Por último, la *teoría* (Θ) hace mención al discurso racional que apoya o valida a una tecnología θ, el cual está soportado en saberes provenientes de una teoría sólidamente constituida o de la experiencia socialmente aceptada y compartida por los miembros de la institución (Covián y Romo, 2014). En la elaboración de simuladores con GeoGebra, un discurso teórico Θ, vinculado a una praxeología matemática de construcción de modelos geométricos, abarca todo conocimiento de propiedades, definiciones, teoremas, postulados y demás elementos de la geometría euclidiana, que es usado para validar una cierta tecnología θ asociada. Este punto de vista no niega la posibilidad de que la teoría se apoye en otros saberes más pragmáticos, ya que la misma actividad de simulación implica la modelación de situaciones no matemáticas. Sobre esta componente, vale destacar que la intervención del promotor es clave en el momento de producirse un discurso teórico que valide un discurso tecnológico, ya que este sujeto cuenta con los referentes geométricos antes señalados, a diferencia de los alumnos quienes pueden conocerlos parcialmente o desconocerlos totalmente al momento de la simulación. Para ilustrar estas ideas, en la figura 3 se muestra un discurso teórico (dentro del recuadro rojo) que puede justificar una forma de proceder asociada al paso 11 de la técnica de la tabla 1.

Para determinar el otro extremo del segmento que representa a la biela, era necesario localizar el pun[...] sentido, con la herramienta Circun[...] con centro E' y con un radio igual al valor $\frac{unidad}{2.1}$, observándose que dicha circunferencia es la más próxima a contener el punto sobre la sujeción al émbolo. Al intersectar esta curva y la recta que pasa por C se obtuvieron dos puntos, de los cuales decidimos trabajar solo con F que determina el otro extremo de la biela (ver Figura 7).

El punto F es una de las intersecciones de dos **lugares geométricos**: una recta y una circunferencia

Figura 3. Ejemplo del discurso teórico en la simulación con GeoGebra. Tomado, de Montiel y Castillo (2015)

Considerando los referentes teóricos anteriores y la necesidad que se tiene de comprender la praxis y logos asociados a la elaboración de los modelos geométricos en la elaboración de simuladores con GeoGebra, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué características tienen las praxeologías matemáticas que emergen en la construcción de modelos geométricos que responden a tareas de simulación con GeoGebra? Para tratar de responder a esta pregunta, seguidamente se analiza una experiencia concreta de elaboración de un simulador con GeoGebra, con el fin de identificar y describir las componentes de las praxeologías matemáticas que han tenido lugar al momento de responder a dos de las tareas de la simulación de una locomotora a vapor.

4. Metodología

4.1. Contexto y participantes

La experiencia analizada en este trabajo tuvo lugar en una institución oficial de Educación Media Técnica de la ciudad de Cabimas, en Venezuela, durante el año escolar 2014-2015. En esta institución funciona un Club GeoGebra, bajo la responsabilidad del *Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática* con la aprobación de la directiva del plantel. Para el periodo antes mencionado, en el club participaban nueve alumnos de 5to año (16-18 años) de las especialidades de Contabilidad, Informática y Mercadeo, quienes de forma libre y voluntaria asistían a reuniones de trabajo los miércoles, por un tiempo de dos horas bajo la dirección de un estudiante para profesor de Matemática y Física de la Universidad del Zulia, el cual toma parte en la experiencia como el promotor de aprendizajes y responsable de este club. Ocasionalmente, la profesora de matemática (coautora de este trabajo) se involucraba en las actividades de simulación de este club, brindando asesoría a aquellos alumnos que lo requerían.

Este Club GeoGebra contaba con cinco proyectos de simulación, cuyos fenómenos estaban asociados al funcionamiento de una trompeta, máquinas de vapor, bomba reciprocante y locomotora a vapor. Ninguno de los participantes se consideraba conocedor de la mecánica concreta de estos fenómenos al momento de iniciar la construcción de su simulador. En cada reunión de trabajo se trataba alguno de los proyectos, procurando una discusión con todos los presentes sobre las formas de proceder para atender a las tareas de construcción del momento. Quienes tenían alguna responsabilidad sobre el proyecto abordado, tomaban apuntes sobre el trabajo llevado a cabo con el fin de sistematizar la experiencia y socializarla con los integrantes de los otros clubes de la región en un evento regional realizado anualmente (Prieto y Gutiérrez, 2015; 2016).

En la investigación se describen las prácticas matemáticas que emergen en el desarrollo del proyecto “Locomotora a vapor”, particularmente en lo que respecta a las dos primeras tareas de la simulación, referidas a la representación de la manivela y la rueda conductora de este mecanismo. A manera de soporte, la imagen que se muestra en la figura 4 fue insertada en la vista grafica del GeoGebra como una referencia al momento de realizar las construcciones.

Las tareas fueron atendidas por los tres participantes (la alumna, el estudiante para profesor de Matemática y Física, y la profesora de Matemática de la alumna) durante siete reuniones. La figura 4 muestra la imagen estática del mecanismo correspondiente a este proyecto.

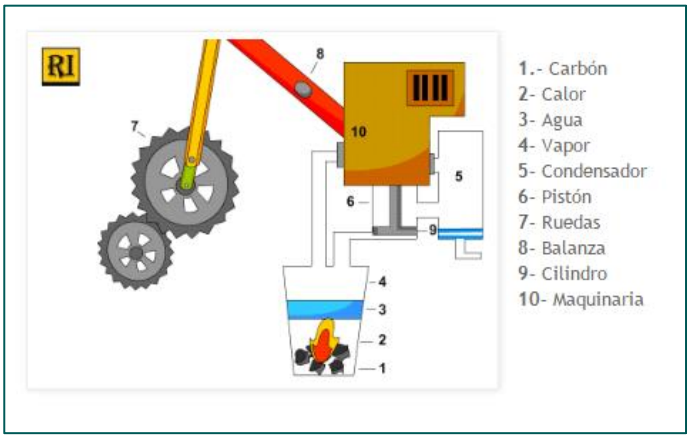

Figura 4. Locomotora a vapor y sus partes. Tomado, de Benitez y Sánchez (2015)

4.2. Datos de la investigación

Durante la resolución de las tareas de simulación, la alumna tomó apuntes sobre la dinámica de resolución de cada tarea de construcción realizada. Estos apuntes sirvieron de soporte para la sistematización de la experiencia por parte de los participantes en el proyecto. El producto de la sistematización asociada a la primera tarea de simulación (representar la manivela) se expone en el trabajo de Benítez y Sánchez (2015). Antes de su publicación, este trabajo fue sometido a un proceso de arbitraje llevado por un especialista en Didáctica de las Matemáticas de nivel universitario, quien hizo sugerencias para mejorar el discurso que luego fueron incorporadas al texto. Este proceso, conllevo a perfeccionar el discurso de la alumna en reiteradas ocasiones, hasta lograr un producto aceptable para las exigencias del arbitraje. En cuanto a la segunda tarea de la simulación (representar la rueda conductora), para el momento de la investigación la alumna solo disponía de algunos apuntes escritos sobre la resolución de las tareas de construcción asociadas.

Los datos de esta investigación provienen tanto del trabajo de sistematización de la primera tarea de simulación, como de los apuntes de la segunda. Para complementar esta información, el discurso escrito es contrastado con el protocolo de construcción de cada pieza, incorporado al archivo GeoGebra correspondiente. El protocolo es una tabla interactiva que ofrece el software, en la que se exponen todos los pasos de construcción.

4.3. Análisis de los datos

Para responder a la pregunta de investigación, el análisis de los datos se centró en la descripción de las tareas, técnicas, tecnologías y teorías que tuvieron lugar en la resolución de las tareas de simulación antes mencionadas. Dicho análisis fue llevado a cabo por etapas. En la primera etapa se identificaron la(s) tarea(s) de construcción asociada(s) a cada tarea de simulación. En la segunda etapa se organizaron las técnicas correspondientes a las tareas de construcción, estableciendo para cada técnica: (i) la secuencia de pasos, (ii) la descripción de cada paso, y (iii) la herramienta del GeoGebra utilizada. Para la tercera etapa, se extrajeron aquellos fragmentos del discurso tecnológico que dan cuenta de las razones por las cuales se han realizado determinados pasos de construcción. Además, partiendo de una adaptación de las funciones del discurso tecnológico de Covián y Romo (2014), en esta etapa se identificaron evidencias que mostraban el tipo de función práctica que la tecnología cumple en el discurso tecnológico de los participantes (ver tabla 2).

Función del discurso	Descripción
Describir la técnica	Un discurso tecnológico asociado a una tarea de construcción tiene una función descriptiva si este detalla cada paso de la construcción, acompañado o no de la herramienta del GeoGebra utilizadas para acometer la tarea
Validar la técnica	Un discurso tecnológico asociado a una tarea de construcción tiene una función de validación cuando en los pasos de construcción realizados total o parcialmente son justificados mediante referentes geométricos
Motivar la técnica	Un discurso tecnológico asociado a una tarea de construcción se considera que motiva la técnica, si uno o un conjunto de pasos, son justificados por los fines esperados, es decir, por el conocimiento/funcionamiento del fenómeno en la realidad
Explicar la técnica	Un discurso tecnológico asociado a una tarea de construcción cumple con una función explicativa si éste detalla cómo los diferentes pasos que la componen permiten alcanzar los resultados esperados

Tabla 2. Funciones de discurso tecnológico al resolver tareas de construcción con GeoGebra. Adaptación hecha por los autores a partir de la propuesta de Covián y Romo (2014)

En la cuarta etapa se identificaron los fragmentos del discurso tecnológico (seleccionados en la etapa anterior) que hacen mención de algún referente teórico de la geometría que permita justificar la técnica. Para organizar la información del análisis se elaboró una tabla que permitiera establecer una secuencia de los registros en cada etapa (ver tabla 3).

Tarea:				
Técnica			**Tecnología**	**Función de la tecnología**
Paso	**Descripción del paso**	**Herramienta del GeoGebra**		

Tabla 3. Instrumento de análisis de los datos

Una vez organizada la información, los investigadores se reunieron para analizar la información de la tabla 3, discutir las características de cada componente de la actividad matemática presente en la resolución de las tareas de construcción y establecer acuerdos sobre la manera de presentar los resultados.

5. Resultados

Los resultados de esta investigación se presentan en dos apartados que se corresponden con las tareas de simulación atendidas. En cada apartado se describen las praxeologías matemáticas asociadas a las tareas de construcción que han emergido durante la simulación.

5.1. Simulación de la manivela

La construcción de la manivela que forma parte de la locomotora comenzó por la identificación de los objetos geométricos que, a criterio de los involucrados, representaban mejor la forma de esta pieza en la vista gráfica del GeoGebra. En este sentido, los datos muestran que el segmento constituyó para los participantes un objeto geométrico "idóneo" para iniciar la simulación, como se señala en el siguiente diálogo, extraído de la sistematización del proceso de representación de la manivela. En este caso se considera al segmento como un modelo singular para la situación.

> *Para construir la manivela, lo primero que se hizo fue <u>reconocer en la imagen de fondo un objeto geométrico que mejor represente la pieza</u>. Posterior a una observación de la escena, <u>se identifica al segmento como el objeto idóneo para representar la manivela</u>.*

El establecimiento del modelo geométrico dio lugar a la declaración de una tarea de construcción en los siguientes términos: *determinar los extremos del segmento*. Vale destacar que la ausencia de ciertos elementos en la declaración de la tarea (p.e., los elementos con los que se cuenta para construir el segmento) hace de ésta una descripción típica de un *tipo de tarea* y no de una tarea de determinado tipo. Esto no impide la resolución de la situación por parte de la alumna y el promotor, quienes de forma implícita asumen a los extremos como los elementos fundamentales para la construcción del segmento. Posteriormente, estos sujetos realizan la construcción de la figura empleando una *técnica* compuesta por seis pasos, la cual se detalla en la tabla 4. Los pasos que componen a la técnica fueron elaborados con los siguientes propósitos: el paso 1 corresponde al establecimiento de un extremo; los pasos del 2 al 5 se realizaron para ubicar el otro extremo; el paso 6 se empleó para construir el segmento.

Paso	Descripción del paso	Herramienta del GeoGebra
1	Situar un punto libre denominado C	Punto
2	Trazar una circunferencia c con centro en C y de radio $\frac{2}{3}.p$	Circunferencia (centro, radio)
3	Colocar un punto D sobre la circunferencia c	Punto
4	Crear un deslizador de tipo ángulo α con intervalo [0°,360°] (repetición creciente)	Deslizador
5	Rotar a D, con respecto a C y ángulo α, para obtener D’	Rotación
6	Trazar el segmento $\overline{CD'}$	Segmento

Tabla 4. Técnica de construcción del segmento. Fuente: Benítez y Sánchez (2015).

(Nota: p representa la medida patrón seleccionada por la alumna.)

En la figura 5 se muestra las construcciones geométricas que se exponen en la tabla 4 (ver Figura 5a) asociadas a la primera tarea de simulación y su resultado (ver Figura 5b).

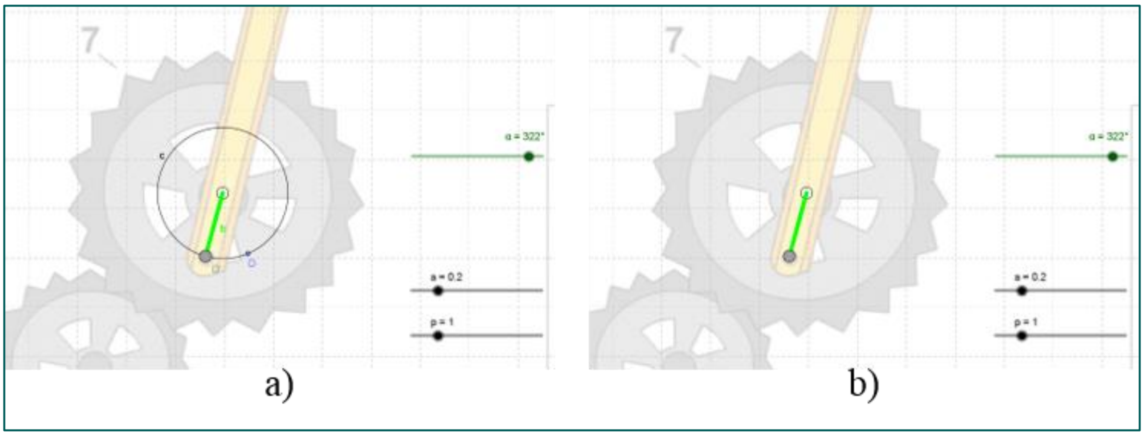

Figura 5. Representación de la manivela

Así mismo, los datos muestran las justificaciones tecnológicas de la construcción realizada y ponen de manifiesto su naturaleza práctica. Tales justificaciones provienen de un conocimiento del fenómeno, esto es, de las características del movimiento de la pieza que fueron identificadas en la imagen GIF (animada) correspondiente. Por ejemplo, la justificación dada por los sujetos al identificar los movimientos asociados a los extremos del segmento (un extremo permanece fijo y el otro describe una trayectoria circular) revela que esta cualidad del objeto fue determinada por las propiedades espaciales presentes del mecanismo en la imagen de referencia, como se muestra a continuación:

> *Para construir la manivela, lo primero que se hizo fue reconocer en la imagen de fondo un objeto geométrico que mejor represente la pieza. […]. Ya conocido el objeto, se tiene en cuenta el movimiento que describe la pieza –movimiento circular– […]. Atendiendo a las características de este movimiento, se precisa que uno de los extremos del segmento debe permanecer fijo (estático) y el otro en movimiento (dinámico).*

Como consecuencia de lo anterior, la función *motivación* tiene una presencia que predomina en las justificaciones, ya que éstas se basan más en el conocimiento del fenómeno que en la matemática misma. Otra función presente es la *descriptiva*, ya que los involucrados tienden a describir cada paso de la técnica realizada, como se observa en dos de los pasos en los que se señala la herramienta del GeoGebra empleada. El siguiente discurso escrito es evidencia de esto último:

> *Para el extremo fijo, se observa en la imagen de referencia que éste se encuentra en el centro de la rueda, por lo tanto, para representarlo se utiliza la herramienta Punto y se construye esta figura en el lugar antes descrito, estableciéndose así un punto C que representa al extremo[...]*

Con respecto a la teoría, vale resaltar que en los datos correspondientes a esta tarea de simulación no se encuentran evidencias de este nivel de justificación durante el proceso de construcción.

5.2. Simulación de la rueda conductora

Para construir la rueda conductora, la alumna y su profesora inician el trabajo de simulación reconociendo que esta pieza está compuesta por el *cubo* y la *corona* (ver Figura 6a). Estas partes de la rueda conductora organizan el accionar de las participantes, dando lugar a dos sub-tareas de simulación. A continuación, se describen las praxeologías que emergen en la resolución de cada una de estas sub-tareas.

Figura 6. Partes de la rueda conductora.

Construcción del Cubo

Los datos muestran que, para representar el cubo, las participantes (alumna y profesora) comienzan identificando ciertas estructuras que componen al cubo: una rueda gris claro maciza "con hendiduras" y una rueda gris oscuro, más pequeña que la anterior (ver Figura 6b). Aunque las formas antes mencionadas no se corresponden directamente con algunos objetos geométricos definidos por la teoría, éstas constituyen una manera de traducir la situación en propiedades espaciales que luego pasarían a ser interpretadas en términos geométricos.

Luego de establecer las formas que componen al cubo, las involucradas inician la representación de esta parte por lo que han denominado "rueda con hendiduras" (rueda gris claro con hendiduras). Para ello, las participantes se disponen a construir por separado la rueda y las hendiduras, lo que indica que su representación responde a un modelo compuesto. En relación a la *rueda*, se comienza reconociendo la circunferencia como el objeto geométrico adecuado para su representación con el GeoGebra, sin hacer mención a la región interna. Seguidamente, realizan un análisis de este objeto con el fin de reconocer los elementos necesarios para su construcción (centro y radio).

Posteriormente se hace mención del elemento presente en la vista gráfica del GeoGebra (centro) para luego atender al desconocido (radio). Los datos no muestran evidencias explicitas de la declaración de la tarea de construcción por parte de la alumna y su profesora; ellas solo hacen referencia a ciertos elementos que permiten la construcción del objeto, como se muestra en el siguiente discurso:

> *[…] lo primero que se hizo fue determinar la circunferencia como objeto que permite representarla, para construir esta circunferencia es necesario conocer la ubicación del centro y la longitud de su radio […] se considera su extremo fijo como el centro de la circunferencia (punto C), y para el radio posterior a una estimación […]*

Para realizar la construcción de la circunferencia, las participantes emplean una técnica compuesta de dos pasos (ver tabla v), con las siguientes finalidades: el primer paso se realiza para construir la circunferencia y el segundo paso corresponde a la asignación de la opacidad de este objeto. Con este último se pone de manifiesto la emergencia de la noción de círculo para la construcción.

Paso	Descripción del paso	Herramienta del GeoGebra
1	Trazar una circunferencia e de centro C y radio $\frac{11}{10} \cdot p$	Circunferencia (centro, radio)
2	Asignar el valor 100 a la opacidad	Propiedad del objeto

Tabla 5. Técnica de construcción de una circunferencia

Similar a la tarea de construcción anterior, las justificaciones tecnológicas presentes en el discurso escrito de las participantes tienen una naturaleza más *práctica*, esto es, basada en el conocimiento del fenómeno. Prueba de ello se tiene cuando las participantes relacionan el centro de la circunferencia con la parte del mecanismo que conecta la manivela y la rueda conductora. Sumado a esto, el uso de las propiedades del dibujo dinámico que le otorga el programa les permite dar un aspecto a la figura más semejante con lo mostrado en la imagen de referencia.

> *[…] como la rueda está conectada a la manivela, se considera su extremo fijo como el centro de la circunferencia (punto C) [...] una vez construido se le asigna opacidad 100 para generar esa apariencia maciza.*

Con respecto a la naturaleza de las justificaciones, la motivación de la técnica en el fenómeno tiene mayor presencia en la representación de la rueda que las propias cuestiones matemáticas. A su vez, el discurso tiene una función *descriptiva* ya que se detalla cada paso de la técnica, como se puede ver en los diálogos anteriores. Con respecto a los referentes teóricos, no se tiene evidencia de su presencia a lo largo del discurso escrito.

Luego de atender a la representación de la rueda, se procedió a hacer lo propio con las *hendiduras*. Esta construcción se inició con la identificación de ciertas características espaciales de la forma de las hendiduras que facilitaron la emergencia de un modelo geométrico apropiado para estas. Tales características fueron enunciadas en los siguientes términos: "las hendiduras están formadas por dos lados rectos y dos arqueados" (ver Figura 7). Es así como las participantes deciden representar las hendiduras en el GeoGebra por medio de un modelo compuesto por un cuadrilátero y dos arcos de circunferencia, logrando con ello la apariencia deseada. Luego, se procede a declarar la tarea de construcción: *determinar los vértices del cuadrilátero que a su vez serán vértices de los arcos de circunferencia*. Esta forma de declarar la tarea tiene en cuenta los elementos comunes de ambos objetos, obviando alguna referencia hacia un análisis más independiente, aunque no jerárquico.

Adicionalmente, en la declaración no se menciona la existencia de algún elemento en la vista grafica para la construcción del cuadrilátero y arcos de circunferencia, lo que hace de la tarea una forma discursiva propia de un tipo de tarea.

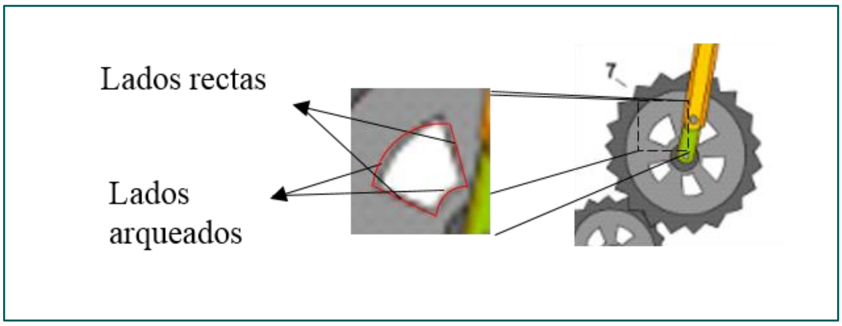

Figura 7. Hendidura de una parte de la rueda conductora

Para la construcción de estos objetos se empleó una técnica compuesta por 24 pasos, la cual se detalla en la tabla 6. Estos pasos tuvieron los siguientes propósitos: determinar los vértices/extremos (pasos del 1 al 9); construir el cuadrilátero (paso 10); construir los arcos de circunferencia (pasos 11 y 12); rotar la figura formada por el cuadrilátero y los arcos de circunferencia (pasos 13 al 24). Vale precisar que la asignación de la propiedad opacidad a las figuras no se evidencia en los registros a pesar de ser empleada, como se pudo observar en el archivo de la construcción. Cabe mencionar aquí que las construcciones geométricas realizadas en cada nueva etapa se apoyan en construcciones correspondientes a tareas previas.

Paso	Descripción del paso	Herramienta del GeoGebra
1	Colocar un punto E sobre la circunferencia e	Punto
2	Crear un deslizador de tipo ángulo de rotulo β con intervalo [0°,360°] (repetición creciente)	Deslizador
3	Rotar a E, con respecto a C y ángulo β (homologo E')	Rotación
4	Trazar una recta f, que pase C y E'	Recta
5	Determinar el punto de intersección entre c y f (punto F)	Intersección
6	Rotar a F, con respecto C y ángulo 43° (antihorario) (homologo F')	Rotación
7	Trazar una circunferencia g de centro en F y radio $\frac{8}{20}.p$	Circunferencia (centro, radio)
8	Determinar el punto de intersección entre g y f (punto G)	Intersección
9	Rotar a G, con respecto C y ángulo 43° (antihorario) (homologo G')	Rotación
10	Trazar el polígono F', G', F y G (polígono 1)	Polígono
11	Trazar el arco de circunferencia C, F', F	Arco de Circunferencia
12	Trazar el arco de circunferencia C, G', G	Arco de Circunferencia
13	Rotar el polígono 1, con respecto a C y ángulo 72°	Rotación

14	Rotar el polígono 1´, con respecto a C y ángulo 72°	Rotación
15	Rotar el polígono 1´´, con respecto a C y ángulo 72°	Rotación
16	Rotar el polígono 1´´´, con respecto a C y ángulo 72°	Rotación
17	Rotar el arco k, con respecto a C y ángulo 72°	Rotación
18	Rotar el arco k´, con respecto a C y ángulo 72°	Rotación
19	Rotar el arco k´´, con respecto a C y ángulo 72°	Rotación
20	Rotar el arco k´´´, con respecto a C y ángulo 72°	Rotación
21	Rotar el arco h, con respecto a C y ángulo 72°	Rotación
22	Rotar el arco h´, con respecto a C y ángulo 72°	Rotación
23	Rotar el arco h1´´, con respecto a C y ángulo 72°	Rotación
24	Rotar el arco r, con respecto a C y ángulo 72°	Rotación

Tabla 6. Técnica de construcción de un cuadrilátero y dos arcos de circunferencia

Las justificaciones tecnológicas presentes en el discurso escrito, relacionadas con la construcción de los objetos geométricos antes mencionados, tienden hacia razones más matemáticas para algunos de los pasos de la técnica. Para ilustrar este resultado, cuando las participantes se plantean "determinar el centro de rotación para rotar las figuras", sus acciones son producidas por las propiedades y/o relaciones geométricas entre los objetos construidos en la interfaz del software, como se evidencia a continuación:

> *Como centro de rotación, se determina el punto C ya que los objetos a rotar están determinados por una circunferencia de centro C […]*

Al mismo tiempo, el discurso cumple una función *descriptiva*, ya que se describen la mayoría de los pasos de la técnica. En los primeros nueve pasos, orientados hacia la localización de los vértices/extremos, solo se describe el objeto a construir y su resultado. Por su parte, los siguientes pasos, además de cumplir con lo anterior, se incluye una mención a la herramienta de construcción y a los elementos requeridos para su uso.

> *Seguidamente se realiza una circunferencia g con centro F y radio estimado 8/20p con la cual se obtiene el punto G […] determinado los vértices del cuadrilátero a través de la herramienta polígono se realiza la construcción de éste seleccionando los puntos F´, G´, F y G; […] para hacer uso de la herramienta se debe seleccionar el objeto a rotar, el centro de rotación y asignar el valor del ángulo*

A pesar de que en el discurso escrito se intenta justificar desde un punto de vista matemático, no se presentan sustento teórico en las construcciones.

Para culminar la representación del cubo, las participantes representaron la "rueda gris oscuro más pequeña" (ver Figura 6b). Para ello las involucradas consideran al círculo como un objeto geométrico acorde para la situación, remitiéndose a un modelo singular. A pesar que se designa al círculo como modelo de la situación, en los datos no se manifiesta tarea de construcción alguna relacionada con éste objeto. Para su construcción, solo se reconoce a uno de los elementos requeridos (centro) de entre los objetos presentes en la vista gráfica del software. Luego se "fija" un valor para el radio, sin hacer mención de cómo ha sido establecido.

> *[…] se precisa al círculo para su representación, al igual que en los casos anteriores el punto C representa el centro y su radio queda fijado por un valor de 1/6p.*

Para la construcción del círculo se empleó una técnica conformada por dos pasos (ver tabla 7). Cada paso se elaboró con los siguientes propósitos: el paso 1 se realiza para construir la circunferencia y el paso 2 para asignar la opacidad.

Paso	Descripción del paso	Herramienta del GeoGebra
1	Trazar una circunferencia t de centro en C y radio $\frac{1}{6}.p$	Circunferencia (centro, punto)
2	Asignar el valor 100 a la opacidad	Propiedades del objeto

Tabla 7. Técnica de construcción de un círculo

Para la representación del cubo, la alumna junto a su promotora realizaron varias construcciones que les permitieron encontrar la representación deseada. Los procesos utilizados por las involucradas se presentan en las tablas 5, 6, y 7. En la figura 8a muestras tales construcciones y el resultado se puede visualizar en la figura 8b

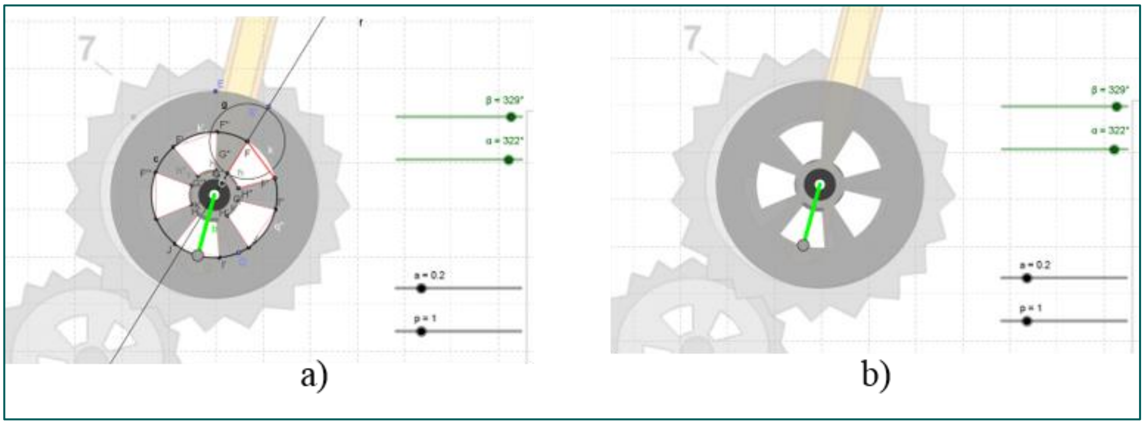

Figura 8. Representación del cubo

En el registro escrito es escasa la información que justifique esta técnica. Sin embargo, desde un punto de vista práctico, se presenta la intención de mantener cierta similitud entre la apariencia del círculo y el cubo, especialmente cuando se proponen "generar esa apariencia maciza". Esto a su vez motiva la técnica, ya que se hace alusión al fenómeno. Otro aspecto que vale la pena mencionar es la determinación del centro del círculo a partir de un reconocimiento de este objeto en la vista gráfica del software, como se muestra en el diálogo anterior. Con respecto a los referentes teóricos, no hay evidencias de una presencia de éstos en el discurso.

Construcción de la Corona

La simulación de la corona se inicia con la identificación en la imagen de referencia de cierta "uniformidad" en esta parte de la pieza, lo cual condujo a la definición de los "dientes" como esas partes uniformes (ver Figura 5a). Mediante una observación directa a estos dientes se concluyó que tales partes eran iguales en tamaño y forma. Además, una indagación sobre la pieza llevó al reconocimiento de un valor mínimo en el número de dientes (8 dientes), aunque al final se optó por considerar la representación de 10 dientes.

> *[…] observando la imagen referencial es posible determinar que los dientes no tienen uniformidad en el tamaño; indagando un poco sobre este tipo de superficie, encontré que estos deben tener tamaño y forma uniforme y como mínimo en una rueda debe poseer ocho dientes, por lo cual determinan 10 dientes.*

Una vez establecido el número de dientes, las participantes declaran las formas geométricas que, a su criterio, mejor representan la corona en los términos siguientes: “se identifican, para los dientes, *triángulos* y un *círculo* que rellene el espacio”, dejando de manifiesto un modelo geométrico compuesto. Posteriormente, se dio paso a la formulación de la tarea de construcción: *determinar el radio de la circunferencia y los vértices del triángulo*. Es importante resaltar que esta forma de enunciar la tarea abarca a dos figuras geométricas, las cuales no se vinculan en la declaración y cuyos análisis asociados se hacen de forma incompleta. Tal es el caso de la circunferencia, de la cual solo se menciona la determinación del radio sin hacen referencia a su centro. En este caso, la tarea declarada es propia de un tipo de tarea.

Además, los datos reflejan poca claridad en cuanto al manejo de la noción de círculo en la construcción, ya que al inicio se declara a este objeto geométrico en la tarea, pero luego la atención se centra en la circunferencia que le bordea, sin evidencias de vinculación entre estas figuras. Otro aspecto a resaltar es la cantidad de triángulos a ser construidos, cuyo número fijado (10 unidades) no se considera a lo largo de la simulación. A pesar que se establecen las tareas de forma simultánea, las construcciones son realizadas por separado, atendiendo primero a la circunferencia y luego a los triángulos.

La técnica para construir la circunferencia es similar a las empleadas en otras tareas previas, referidas al mismo objeto geométrico. Esta se compone de dos pasos (ver tabla 8), con los siguientes propósitos: el primer paso corresponde a la elaboración de la circunferencia y el segundo paso a la asignación de la opacidad.

Paso	Descripción del paso	Herramienta del GeoGebra
1	Trazar una circunferencia t de centro en punto C y radio $\frac{5}{4}.p$	Circunferencia (centro, punto radio)
2	Asignar el valor 100 a la opacidad	Propiedades del objeto

Tabla 8. Técnica de construcción de la circunferencia

La justificación tecnológica para este objeto, al igual que en otros casos, responde al interés por “dar ese acabado macizo de la pieza”, motivando la técnica en este sentido. También se presenta la función *descriptiva* ya que señala cómo fue realizada la construcción, como se muestra en el siguiente dialogo.

> *Para la circunferencia […]en relación al centro se toma al punto C y el radio luego de algunas estimaciones se define como 5/4p, una vez […]*

En las justificaciones de la tarea de construcción no se describen referentes teóricos asociados.

Para construir los triángulos, las involucradas emplean una técnica que se compone de 18 pasos (ver tabla 9). Estos pasos tienen como propósito: ubicar los vértices de un triángulo (1 al 7), elaborar el triángulo (paso 8), asignar opacidad al triángulo (paso 9), rotar el triángulo (10 al 16).

Paso	Descripción del paso	Herramienta del GeoGebra
1	Trazar una circunferencia t de centro en punto C y radio $\frac{6}{4}$.p	Circunferencia (centro, radio)
2	Determinar el punto de intersección entre la t y f (Punto N)	Intersección
3	Rotar N, con respecto a C, y ángulo 18° (antihorario)	Rotación
4	Trazar una recta m, que pasa por $N´$ y C	Recta
6	Determinar el punto de intersección entre la circunferencia c_1 y m (punto q)	Intersección
7	Rotar a $N´$, con respecto a C, y ángulo 18° (antihorario)	Rotación
8	Trazar el triángulo polígono $N, Q, N´´$ (polígono 3)	Polígono
9	Asignar la opacidad a 100 al triangulo polígono 3	Propiedades del objeto
10	Rotar el polígono 3, con respecto a C y valor del ángulo 36°	Rotación
11	Rotar el polígono 3´, con respecto a C y valor del ángulo 36°	Rotación
12	Rotar el polígono 3´´, con respecto a C y valor del ángulo 36°	Rotación
13	Rotar el polígono 3´´´, con respecto a C y valor del ángulo 36°	Rotación
14	Rotar el polígono 4, con respecto a C y valor del ángulo 36°	Rotación
15	Rotar el polígono 4´, con respecto a C y valor del ángulo 36°	Rotación
16	Rotar el polígono 4´´, con respecto a C y valor del ángulo 36°	Rotación
17	Rotar el polígono 4´´´, con respecto a C y valor del ángulo 36°	Rotación
18	Rotar el polígono 5, con respecto a C y valor del ángulo 36°	Rotación

Tabla 9. Técnica de construcción de los triángulos

Para culminar la representación de la rueda la participante y su promotora emplean las construcciones geométricas que se presentan en las tablas 8 y 9. Una ilustración de éstas se muestra en la figura 9a y el resultado obtenido tras haber finalizado las representaciones se puede observar en la figura 9b.

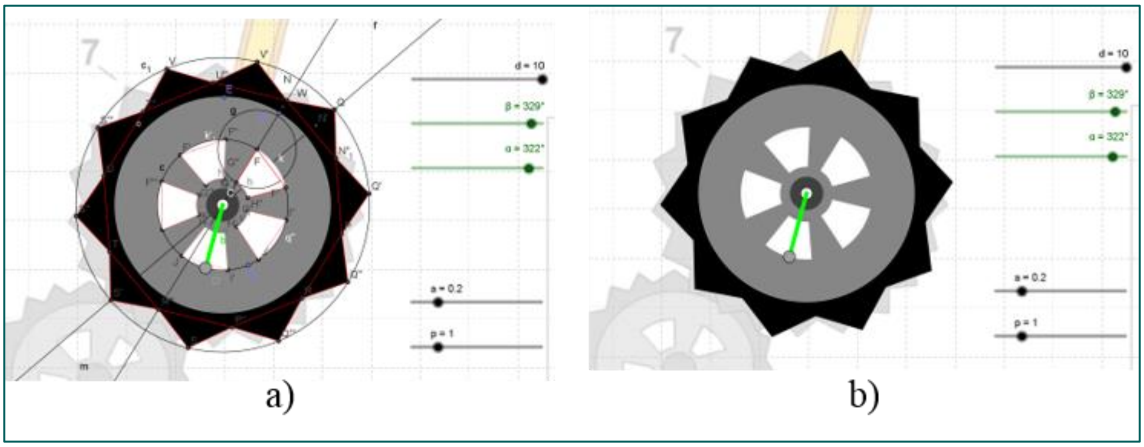

Figura 9. Representación de la corona

Los datos muestran que las justificaciones tecnológicas tienen una naturaleza más práctica, es decir, relacionada con el conocimiento del fenómeno. En este orden de ideas, previo a la construcción, la alumna y su profesora deciden el número de triángulos que representarán la corona según la información consultada con respecto al fenómeno, cuestión que motiva la técnica. Otra función presente es la *descriptiva* ya que en el discurso escrito se detallan las construcciones realizadas, en particular para el paso 8 (en donde se enfatiza la herramienta empleada) y otros los pasos del 3 al 7 (en donde se deja claro cómo fueron deducidas ciertas medidas). Un ejemplo de lo anterior, es el caso de la determinación de dos vértices del triángulo sobre una circunferencia.

> *[…] el borde de la corona debe contener la cantidad de triángulos establecidas (diez); una circunferencia tiene 360° quiere decir que* <u>*el lado del triángulo que está sobre la corona debe tener una amplitud angular de 36°*</u>.

Al igual que en los casos anteriores, esta construcción no presenta referentes teóricos en el discurso. Al término de las construcciones, los involucrados afirman que “se concluye la construcción de la rueda conductora”.

6. Discusión y conclusiones

La investigación realizada permitió reconocer algunas características de las prácticas matemáticas que tienen lugar en la actividad de elaboración de simuladores con GeoGebra. Para esto se analizaron los discursos escritos por una alumna, su promotor (un estudiante para profesor de Matemática y Física) y profesora de Matemática, que dan cuenta del proceso de elaboración y resolución de un conjunto de tareas de construcción de modelos geométricos, relacionadas con representación de dos piezas que forman parte del mecanismo de una máquina de vapor. A partir de la noción de praxeología de Chevallard (1999), en los resultados de este trabajo se ponen de manifiesto tres de los cuatro elementos que componen a esta organización, a saber, el tipo de tarea (T), la técnica (τ) y la tecnología (θ).

En relación al tipo de tarea (T), los resultados muestran que la formulación de cada tarea de construcción es un proceso basado en las formas geométricas y movimientos identificados en el boceto de la pieza que se intenta simular, dando cabida a la emergencia de un modelo geométrico que sirve de soporte para la toma de decisiones sobre qué hacer y cómo proceder. Los modelos generados en el estudio fueron de dos tipos: *singular* (referido a la construcción de un mismo tipo de objeto geométrico) y *compuesto* (asociado a la representación de objetos geométricos distintos). En lo que respecta a la forma de enunciar las tareas, por lo general, los participantes se apoyaron en los elementos requeridos por cada herramienta del GeoGebra empleada en la construcción del modelo computacional. A pesar de esta ayuda, en la mayoría de los casos, sólo se declaró el tipo de tarea, y no la tarea concreta de este tipo. De acuerdo con el estudio realizado por Bosh, Fonseca y Gascón (2004), este tipo de situaciones problemáticas pueden considerarse como "tareas matemáticas abiertas" en el sentido de no ser prescritas por la actividad, siendo los participantes los responsables de decidir la pertinencia de los datos de la situación, para formularlas y resolverlas.

Sobre esta componente consideramos que una forma que pudiera permitir que los participantes lleguen a enunciar el tipo de tarea (t) y no solo la Tarea (T), es mediante una secuencia en la cual, atenderían primero a la Tarea y luego al tipo de tarea. En el caso de la Tarea identificar el objeto geométrico a construir p.,e. "construir un triángulo" y luego realizar una evaluación y descarte tanto de las herramientas del software que posibilitan la construcción del objeto geométrico como de los elementos disponibles en la interfaz del GeoGebra que servirán de apoyo para su elaboración, puntualizando con una tarea (t) con una estructura similar a "construir un triángulo a partir de uno de sus lados"

Con respecto a la técnica (τ), éstas son producidas en relación a las propiedades geométricas de los objetos matemáticos que intentan ser dibujados con el software, de tal manera que las construcciones alcancen la consistencia matemática requerida, según lo sugiere Laborde (1997). Este tipo de técnicas, apoyadas en el uso de un Software de Geometría Dinámica, no son únicas, como bien lo señala Acosta, Mejía y Rodríguez (2013), en una investigación previa, es decir, el software GeoGebra pone a disposición de los usuarios una variedad de herramientas de construcción, de las cuales algunas coinciden en el objeto geométrico. Una de estas, es la que posibilita la construcción de circunferencia designando tres herramientas para ello, a saber, *circunferencia (centro, radio); circunferencia (centro, punto) y circunferencia tres puntos*. Además, otros factores que intervienen en la determinación de la técnica son, por un lado, la correspondencia entre las construcciones obtenidas y las propiedades espaciales de fenómeno que tales construcciones intentan modelar, y por otro lado, tiene que ver con los elementos necesarios para representar un objeto geométrico en el software y las herramientas del GeoGebra que faciliten su construcción. Por ejemplo, los elementos disponibles al momento de construir los cuadriláteros y arcos de circunferencia (ver Tabla vi), dejaban entrever que la transformación en el plano, específicamente la rotación, era una opción viable debido que ya se contaba con el centro de rotación y los objetos debían elaborarse en el interior de un círculo.

En cuanto a las tecnologías (θ), los resultados muestran que las justificaciones asociadas a las técnicas de construcción se basan más en los aspectos del fenómeno que en la propia matemática empleada, muy a pesar de que en algunos momentos la tecnología deja entrever algunos elementos teóricos. Esta tendencia hacia la explicación de los procedimientos en función de los fenómenos concuerda con la investigación de Covián y Romo (2014), en la cual las justificaciones prácticas cumplen un rol fundamental en las praxeologías, de acuerdo al contexto de la actividad analizada. Por otro lado, se observó que la mayoría de los discursos tecnológicos cumplen una función descriptiva, la cual puede ser atribuida a la cultura escolar. Esto, en concordancia con Sierra, Bosch y Gascón (2013), puede ser atribuido a que el discurso argumentativo y/o explicativo no suele formar parte de las prácticas matemáticas escolares, lo que puede ser indicio de la falta de una presencia de la componente teórica en la actividad. Finalmente, a diferencia del planteamiento de Bosch, Fonseca y Gascón (2004), este tipo de actividad alcanza el nivel tecnológico en la institución de referencia, pero no el nivel teórico ya que esta componente no es abordada.

Aun cuando las justificaciones por la naturaleza de la actividad tiendan a sustentarse en el funcionamiento del fenómeno de interés, debe involucrarse al discurso justificativo aspectos matemáticos debido a que la construcción de dibujos dinámicos involucra conocimiento teórico, el cual respalda las propiedades geométricas que este debe cumplir. De tal manera que las técnicas empleadas puedan vislumbrar la relación entre la matemática abordada y la realidad modelada.

A partir del análisis de los datos ha sido posible evidenciar la emergencia de prácticas matemáticas mediadas por el GeoGebra, que ponen de relieve formas de construcción del conocimiento matemático en el seno de una actividad no convencional, caracterizada por la resolución de tareas de construcción cuyas técnicas son justificadas y validadas institucionalmente. A pesar de los avances, es necesario seguir desarrollando estudios centrados en este tipo de prácticas, de manera que nos permita comprender otros aspectos de la actividad de simulación con GeoGebra, tales como la naturaleza social de la formulación de una tarea de construcción, las técnicas empleadas, el cuestionamiento de los discursos tecnológicos y el uso de componentes teóricos (Θ) para explicar las tecnologías surgidas. La intención es seguir haciendo aportes a este proyecto, en miras de su integración plena al currículo escolar.

Reconocimiento

Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto de investigación No. CH-0510-15, adscrito al Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI) y financiado por el Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico y Tecnológico (CONDES) de la Universidad del Zulia, Venezuela.

Bibliografía

Acosta, M. (2005). Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática. *Educación Matemática*, 17(3), 121-140.

Acosta, M. (2007) La teoría antropológica de lo didáctico y las nuevas tecnologías. En L. Higueras, A. Castro, y F. García. (Eds.). *Sociedad, escuela y matemáticas: aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico*, 85-100. Jaén, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Acosta, M. (2010). Dificultades de los profesores para integrar el uso de Cabri en clase de geometría. Experiencias de un curso de formación docente. *Tecné, episteme y didaxis: Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología*, *28*(1), 57-72.

Acosta, M., Mejía, C. y Rodríguez, C. (2013). Lugares geométricos en la solución de un problema de construcción: presentación de una posible técnica de una praxeología de geometría dinámica. *Educación matemática*, 25(2), 141-160.

Álvarez, Y. (2005). ¡Auxilio! No puedo con la matemática. *Revista Iberoamericana de Enseñanza de la Matemática Equisángulo*, *2*(1), 1-6.

Artigue, M. (2014, febrero). ¿Qué pilares fundamentales deberían orientar la educación científica en primaria y secundaria? En G. Caetano (Pres.), *Formar Ciudadanos del Conocimiento: El Desafío de una Educación Científica para Todos*. Seminario – Taller realizado en Motenvideo, Uruguay.

Artigue, M. (2012). *Challenges in basic mathematics education*. Paris: UNESCO [en línea]. Recuperado el 6 de mayo de 2016, de http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776e.pdf

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(3),. 66-72.

Benítez y Sánchez (2015). La locomotora a Vapor. En J.L. Prieto y R.E. Gutiérrez (Eds.), *Memorias del I Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*, 121-126. Maracaibo, Venezuela: A.C. Aprender en Red.

Bosch, M., Fonseca, C., y Gascón., J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24*(2-3), 205-250.

Bosch, M., (2003). Un punto de vista antropológico: la evolución de los "elementos de representación" en la actividad matemática. En N. En Climent; L.C, Contreras y J. Carrillo (Eds.) *Cuarto simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática*, 15-28. Huelva, España: Servicio de Publicaciones Universidad de Huelva.

Castela, C. (2009). La noción de praxeología: un instrumento de la teoría antropológica de lo didáctico posible útil para la socioepistemología. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Educación Matemática Vol. 22*, 1195-1205. México, D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Cervantes, A., Rubio, L., y Prieto, J.L. (2015). Una propuesta para el abordaje de la refracción y reflexión total interna utilizando el GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, *4*(1), 18-28.

Covian, O., y Romo, A. (2014). Modelo Praxeológico extendido una herramienta para analizar las matemáticas en la práctica: el caso de la vivienda Maya y levantamiento y trazo topográfico. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 128-148.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 1. Structures et functions. En J. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot et R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques*, 3-22. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997) *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori.

Clark, D., Nelson, B., Sengupta, P., & D'Angelo, C. (2009). Rethinking science learning through digital games and simulations: Genres, examples, and evidence. *Presentado en el Learning science: Computer games, simulations, and education workshop sponsored by the National Academy of Sciences*, septiembre, Washington, D.C.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *18*(1), 7-34.

González A., Molina, J. y Sánchez, M. (2014). La matemática nunca deja de ser un juego: investigaciones sobre los efectos del uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática*, *26*(3), 109-133.

Hilton, M. & Honey, M.A. (2011). *Learning science through computer games and simulations*. Washington, DC: The National Academies Press.

Laborde, C. (1997). Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig. (Ed.), *Investigar y Enseñar. Variedades de la Educación Matemática*, 33-48. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Montiel, Y. y Castillo, L.A. (2015). El motor de cuatro tiempos. En J.L. Prieto y R.E. Gutiérrez (Eds.), *Memorias del I Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*, 56-62. Maracaibo, Venezuela: A.C. Aprender en Red.

Prieto, J.L., y Gutiérrez, R.E., (Comps.). (2015). *Memorias del I Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. Maracaibo, Venezuela: A.C. Aprender en Red.

Prieto, J.L., y Gutiérrez, R.E., (Comps.). (2016). *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. Maracaibo, Venezuela: A.C. Aprender en Red.

Reyes, J., y Prieto, J.L. (2016). Interpretaciones de la fracción en una experiencia de simulación con GeoGebra. *Revista Educación y Humanismo*, 18(30), 42-56.

Rodríguez, L. y Roggero, P. (2014). La modelación y simulación computacional como metodología de investigación social. *POLIS. Revista Latinoamericana*, 39, 1-16.

Romo, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. *Educación Matemática*, 25(E), 314-338.

Rubio, L., Prieto, J. y Ortiz, J. (2016). La matemática en la simulación con GeoGebra. Una experiencia con el movimiento en caída libre. *IJERI: International Journal of Educational Research and Innovation*, (5), 90-111.

Irene V. Sánchez N. E. T. C. Hermágoras Chávez, Cabimas, Venezuela. Licenciada en Educación Mención Matemática y Física (LUZ, Venezuela). Magister en Matemática Mención Docencia (LUZ, Venezuela). Investigadora PEII Nivel A-1. Coordinadora de Investigación de la A. C. Aprender en Red y miembro del Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática. Facilitadora del P.N.F. de Profesores de Educación Media - Micromisión Simón Rodríguez. Delegada Región Zuliana de la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT). E-mail: irenorono@gmail.com

Juan Luis Prieto G. Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela. Licenciado en Educación Mención Matemáticas y Física (LUZ). Máster en Nuevas Tecnologías Aplicadas a la Educación (IUP, España). DEA en Didáctica de la Matemática (UA, España). Investigador PEII Nivel B. Coordinador General de la A. C. Aprender en Red y del Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática. Facilitador del P.N.F. de Profesores de Educación Media - Micromisión Simón Rodríguez. Tesorero de la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT). E-mail: juanl.prietog@gmail.com