

Facilitando a los alumnos la comprensión de los problemas matemáticos

Sergio Falcón Santana, (Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. España)
Pedro Medina Rodríguez, (Colegio San Ignacio de Loyola, Las Palmas de Gran Canaria. España)
Ángel Plaza de la Hoz, (Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. España)

Fecha de recepción: 12 de diciembre de 2016

Fecha de aceptación: 26 de diciembre de 2017

Resumen Un grave problema que se presenta a un alumno que intenta resolver un ejercicio de Matemáticas, es la comprensión del enunciado del mismo y, sobre todo, cuál es exactamente la cuestión planteada por el profesor. Esto da lugar a unos resultados que no siempre están de acuerdo con los conocimientos que el alumno posee sobre la materia en estudio. En este trabajo presentamos nuestras ideas sobre este tema y cuál podría ser una forma de abordar la solución del mismo.

Palabras clave Resolución de problemas, estrategias, competencia matemática, currículo, secundaria.

Title **Facilitating student understanding of the problems**

Abstract A serious problem presented to a student who tries to solve an exercise of Mathematics, is the understanding of the statement of the same and, above all, what exactly is the question posed by the teacher. This leads to results that not always agree with the knowledge that the student has on the matter in study. In this paper we present our ideas on this topic and what might be a way to address the solution of the same one.

Keywords Problem solving, strategies, Mathematical competence, curriculum, high school.

1. Introducción

La resolución de problemas es una de las habilidades a desarrollar durante la enseñanza obligatoria, junto con las habilidades metacognitivas, las habilidades de razonamiento y las estrategias de aprendizaje (Limón y Carretero, 1995). Además, resolver problemas tiene un papel fundamental en la adquisición y desarrollo de la competencia matemática.

En educación secundaria obligatoria el profesor de matemáticas suele partir de la base de que el alumno tiene desarrollada la habilidad de resolver problemas, puesto que sabemos que se han trabajado desde la educación primaria, por lo tanto, deben haber aprendido las estrategias necesarias para abordarlos. Pero por nuestra experiencia, y especialmente por los resultados que se obtienen en esta tarea, sabemos que esto no suele ocurrir así.

En un trabajo anterior (Falcón, S., Medina, P. y Plaza, A., 2017) estábamos interesados en estudiar aspectos relacionados con la resolución de problemas en alumnos de tercero de educación secundaria obligatoria y especialmente nos centramos en la fase de comprensión del problema, ya que



un elemento fundamental del proceso de resolución es la comprensión de la situación cualitativa descrita por el enunciado del problema (Vicente, Orrantía y Verschaffel, 2008). “Comprender el problema implica transformar la información recibida en una representación interna en la memoria del sujeto, e integrarla en un esquema cognitivo que permita darle significado” (Toboso, 2004, p. 128). Una vez conseguido el modelo mental nos podemos centrar en la comprensión matemática del problema (Beltrán y Repetto, 2006).

Hay que tener en cuenta que en esta fase los alumnos tienen dificultades respecto al conocimiento del vocabulario, la falta de familiaridad con la situación planteada, la relación entre los datos y la pregunta (Fernández, 2010), y si aparecen datos superfluos, especialmente si son números, les generan confusión al intentar averiguar dónde ubicarlos. Además, también encontramos problemas de verbalización, fundamentalmente lexicales y gramaticales (Chamorro, 2003). Un enunciado que no esté acorde a la capacidad de comprensión de los alumnos generará problemas no esperados a la hora de resolverlo por parte del profesor más preocupado de los aspectos matemáticos que de los lingüísticos.

Este interés por la resolución de problemas venía motivado por la importancia que tiene como contenido curricular del área de matemáticas (Decreto 83/2016), la evaluación de la competencia matemática como un elemento del currículo (Ley Orgánica 8/2013) y el marco de evaluación PISA (OCDE, 2006; MECD, 2013). El excesivo número de alumnos que no obtienen buenos resultados en resolución de problemas, incluso aquéllos con un mayor nivel académico en matemáticas, era un aspecto que también nos preocupaba y que contribuyó a iniciar el estudio.

En dicho trabajo nos planteamos algunas preguntas: ¿qué nivel de comprensión manifiestan los alumnos cuándo se enfrentan a un problema?, ¿influye el género de los alumnos en sus resultados?, ¿qué tiempo dedican a la fase de comprensión de un problema?, ¿influye el tiempo que dedican a los problemas en los resultados?, ¿hay una relación positiva entre los resultados obtenidos y las calificaciones en el área de matemáticas? Para intentar dar respuestas a estas preguntas realizamos un cuestionario con una serie de problemas. Lo que le pedimos a los alumnos en el cuestionario era que seleccionaran en cada problema una respuesta de cuatro alternativas posibles. Anteriormente habíamos comprobado mejoras significativas en los resultados utilizando este método frente a la explicación por escrito del alumno. Es importante tener en cuenta que no tenían que resolver el problema para poder seleccionar la respuesta.

A continuación, resumimos las conclusiones a las que llegamos después de analizar los resultados obtenidos. El nivel de comprensión del grupo de alumnos de tercero de educación secundaria era bastante inferior al que necesitan para poder realizar los problemas que se proponen en la mayoría de los libros escolares. Los alumnos con un mayor rendimiento académico en matemáticas también tienen dificultades y este aspecto es una fuente de ansiedad para este alumnado.

Encontramos una relación estadísticamente significativa (prueba de U de Mann-Whitney, (p-valor igual a 0,036) entre la calificación obtenida y el género de los alumnos y ésta era una de las cuestiones en la que queríamos profundizar en este trabajo.

Otra conclusión fue que los alumnos no dedican el tiempo necesario a leer y comprender los enunciados de los problemas y abandonan con bastante facilidad. Además, el tiempo en realizarlo no correlaciona positivamente con la calificación obtenida en los cuestionarios.

A partir de los resultados de ese trabajo decidimos buscar alguna estrategia que pudiera facilitar a los alumnos mejorar su nivel de comprensión de los enunciados. Después de una revisión bibliográfica, entendimos que un guion, con preguntas, sugerencias o mensajes (Polya, 1989; Lozano

y Hernández, 2014; Sánchez y Vicente, 2015) que favoreciera la lectura guiada, facilitara la reflexión sobre el problema y por lo tanto la representación mental, ayudaría a los alumnos a comprender mejor los enunciados. De Corte (2015) a partir del análisis de numerosas investigaciones concluye que “los estudiantes más exitosos dominan de manera más efectiva y sofisticada las destrezas heurísticas y autorreguladoras y se demuestra también que dichas destrezas pueden ser aprendidas tempranamente” (p.7). El objetivo del guion es que sirva de guía a los alumnos en la fase de comprensión del problema, y que además les permita adquirir confianza en el proceso de resolución. Especialmente buscamos que la utilización del guion se convierta en un hábito por parte del alumno, ya que “si el alumno emplea la misma pregunta varias veces con un buen resultado, sin duda se fijará en ella y a ella recurrirá cuando se encuentre un caso similar” (Polya, 1989, p.26).

2. Presentación

En esta sección estudiamos el grado de comprensión que manifiestan los alumnos de tercero de educación secundaria de un centro privado - concertado a la hora de enfrentarse a los problemas que se les suelen proponer en clase. Introduciendo en el proceso de resolución de problemas un guion con sugerencias con el objetivo de comprobar si la utilización del mismo introducía alguna mejora en los resultados, por lo tanto, en el nivel de comprensión del problema.

2.1. Metodología

Este trabajo fue realizado durante el segundo trimestre del curso 2014-2015, participaron 64 alumnos y fue desarrollado en dos fases. En la primera, presentamos a los alumnos un guion para llevar a cabo la fase de comprensión del problema. Insistimos en que lo siguieran con detalle especialmente en aquellos aspectos que entendíamos que favorecerían la comprensión del enunciado, como por ejemplo la representación (Vicente et al., 2008), la organización de los datos, etc.

En clase, durante dos sesiones, utilizamos el guion para analizar y poder comprender algunos problemas de un libro de texto del nivel. Estos problemas los resolvimos siguiendo el guion y con el grupo clase completo, aprovechando las reflexiones de los alumnos y los debates generados. Posteriormente, en otra sesión de clase, los alumnos resolvieron algunos problemas en grupos de 3 o 4 alumnos.

En una segunda fase propusimos a los alumnos un cuestionario para evaluar si la utilización del guion había mejorado el grado de comprensión de los enunciados de los problemas respecto a resultados obtenidos anteriormente. Dedicaron una sesión de clase, pudiendo utilizar el guion, a resolver el cuestionario.

El cuestionario estaba compuesto por cinco problemas como los que se suelen proponer en clase y que son similares a los que vienen propuestos en los libros de texto del nivel. En cada problema el alumno tiene que seleccionar una respuesta de cuatro alternativas posibles. Los procedimientos que los alumnos estaban trabajando en clase eran los relacionados con las expresiones algebraicas y la resolución de ecuaciones de primer grado. Son contenidos que los alumnos han trabajado en cursos anteriores y suelen manifestar dificultades con la traducción del sistema de representación verbal al simbólico (Rodríguez-Domingo y Molina, 2013). Nuestra experiencia muestra que muchas veces esta dificultad suele estar provocada por buscar de manera irreflexiva cuál es la incógnita, o como ellos dicen, a qué llamar “x”.

Cada problema se calificaba con un valor de uno, si la respuesta era correcta, y con un cero en caso de ser incorrecta. La calificación del cuestionario era la suma total de la calificación obtenida en



cada problema, y para valorar como apto el cuestionario consideramos una calificación de 3 puntos en el mismo, es decir, haber comprendido como mínimo tres problemas de los cinco que lo conformaban.

Un factor importante a tener en cuenta es que los cuestionarios no han sido anónimos, pues pretendíamos poder comparar los resultados de los alumnos en los cuestionarios con sus calificaciones en matemáticas y porque, además, creemos que influye en la actitud de los alumnos a la hora de realizar las actividades propuestas.

Con objeto de analizar la variable tiempo, medimos el tiempo que invirtió cada alumno en su realización.

2.2. Guion para la fase de comprensión

A continuación, presentamos el guion que se presentó a los alumnos:

- Lee el enunciado despacio y asimila la idea general.
- Vuelve a leerlo y si hay alguna palabra que no entiendes busca su significado o pregúntala.
- Ya sabes cuál es el objetivo del problema. Escríbelo. Si no lo sabes, vuelve a leerlo, detente en la pregunta que te hacen, e intenta identificarlo.
- Has encontrado los datos. Escríbelos. Fíjate con atención por si hay algún dato que necesites pero que no aparezca directamente. Busca la forma de averiguarlo.
- Trata de encontrar la relación entre los datos suministrados y la cuestión planteada.
- Organiza la información que tienes, realiza una tabla si crees que te ayuda a verlo mejor, intenta hacer un esquema o un dibujo de la situación que representa el problema.
- Intenta imaginarte la situación.

Al final, averigua en qué consiste el problema, es decir, lo que necesitas saber que te dará pie para establecer el plan que te permitirá resolverlo.

2.3. Cuestionario

Seguidamente presentamos el cuestionario tal y como lo realizaron los alumnos.

Cuestionario alumnos (Comprensión)

A continuación, encontrarás un conjunto de problemas. Queremos saber qué comprendes al leerlos por lo que te pedimos que selecciones la respuesta que consideres más adecuada. Con objeto de ayudarte a resolver la cuestión planteada te presentamos un ejemplo que te puede ayudar.

Ejemplo: Un padre tiene 46 años y su hija 8. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será exactamente el doble que la edad de su hija?

- a) Hallar los años del padre cuando la hija tenga 2 años más.
- b) Averiguar la diferencia de edad entre padre e hija dentro de 2 años.
- c) Calcular la edad del padre para que sea el doble que la de su hija.
- d) Hallar la edad que tendrán ambos dentro de 16 años

Este problema consiste en averiguar los años que tienen que pasar para que la edad del padre sea el doble que la edad de la hija. Por lo que contestaríamos la opción c).

1. La suma de tres números naturales consecutivos es igual al cuádruple del menor. ¿De qué números se trata?
 - a) Hallar tres números naturales consecutivos que sumados sean igual al menor más cuatro.
 - b) Calcular qué tres números naturales consecutivos sumados dan cuatro veces el menor.
 - c) Averiguar qué tres números naturales consecutivos sumen cuatro.
 - d) Averiguar el menor de tres números naturales que es igual al doble de los otros dos.

2. Ayer Paco cogió un libro de la biblioteca y leyó una quinta parte de sus páginas. Hoy ha leído 42 páginas más y sólo le faltan 3 páginas para llegar a la mitad del libro. ¿Cuántas páginas tiene el libro?
 - a) Calcular el número de páginas que tiene la mitad del libro.
 - b) Averiguar el número de páginas que lee cada día y sumarlo.
 - c) Calcular la diferencia entre las páginas que leyó los primeros dos días.
 - d) Averiguar cuántas páginas lee cada día, tener en cuenta lo que le queda por leer, y además, que sólo lee la mitad del libro.

3. Una bodega exportó en enero la mitad de sus barriles, y a los dos meses, un tercio de los que le quedaban. ¿Cuántos barriles tenía al comienzo si ahora hay 40.000 barriles?
 - a) Averiguar cuántos barriles exportó en total.
 - b) Calcular un tercio de los barriles.
 - c) Calcular la diferencia entre los que exportó y los 40.000 barriles.
 - d) Calcular un tercio de los 40.000 barriles.

4. Luis quiere repartir 300 cromos entre tres amigos, de modo que Pedro reciba el doble que Teresa y ésta 40 cromos más que Álvaro. ¿Cuántos cromos recibirá cada amigo?
 - a) Calcular el número de cromos que tiene en total y hallar la diferencia entre los que tiene Pedro y Teresa.
 - b) Calcular el número de amigos entre los que hay que repartir.
 - c) Averiguar el número de cromos que tiene Álvaro y Teresa.
 - d) Averiguar cómo están relacionados los amigos respecto al número de cromos.

5. Un ciclista ha recorrido $\frac{2}{5}$ del trayecto y aún le falta por recorrer 1 km para llegar a la mitad del camino. ¿Qué longitud tiene el trayecto completo?
 - a) Calcular los dos quintos de un kilómetro.
 - b) Consiste en averiguar el trayecto que ha recorrido.
 - c) Consiste en averiguar qué longitud tiene el doble del trayecto.
 - d) Consiste en calcular el porcentaje recorrido respecto al porcentaje total.

3. Resultados

Los datos han sido procesados con el programa SPSSStatistics en su versión 22.

Este cuestionario ha sido realizado por 64 alumnos, repartidos en dos secciones, de los que se contabilizaron 30 hombres (46,9%) y 35 mujeres (53,1%).

Respecto al índice de dificultad (ID) de los problemas del cuestionario, se ha calculado con la expresión: $ID = A/n$, siendo A el número de sujetos que aciertan el ítem y n el número de sujetos que



lo intentan. La tabla siguiente (Tabla 1) nos permite interpretar los resultados del índice (Pérez, R., García, J.L., Gil, J.A. y Galán, A., 2009, p.173) según cinco categorías:

| Dificultad | Rango |
|---------------|--------------------|
| Muy fáciles | $ID > 0,75$ |
| Fáciles | $0,55 < ID < 0,75$ |
| Normales | $0,45 < ID < 0,54$ |
| Difíciles | $0,25 < ID < 0,44$ |
| Muy difíciles | $0,25 < ID < 0,44$ |

Tabla 1. Interpretación de los índices de dificultad

| Problema nº | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------------|-------|-------|---------|-------------|---------|
| ID | 0,73 | 0,64 | 0,36 | 0,14 | 0,33 |
| Dificultad | Fácil | Fácil | Difícil | Muy difícil | Difícil |

Tabla 2. Índices de dificultad de los problemas

Respecto a la dificultad de los problemas, el 20% de los mismos son considerados muy difíciles, el 40% son difíciles y otro 40% son catalogados como fáciles.

En la siguiente tabla podemos observar las calificaciones obtenidas por los alumnos con sus frecuencias y porcentajes:

| Calificación | Frecuencia | Porcentaje |
|--------------|------------|------------|
| 0 | 2 | 3,1 |
| 1 | 13 | 20,3 |
| 2 | 24 | 37,5 |
| 3 | 20 | 31,3 |
| 4 | 5 | 7,8 |
| 5 | 0 | 0 |

Tabla 3. Calificaciones

Solamente 2 alumnos (3,1%) han obtenido una calificación de cero puntos y por el contrario ningún alumno obtuvo la calificación máxima del cuestionario. Por otro lado, 25 alumnos (39,1%) han obtenido una calificación igual o superior a tres puntos, que era el valor mínimo para considerar la prueba como superada.

La prueba de U de Mann-Whitney muestra que no existe una relación estadísticamente significativa ($p = .672$) entre la calificación obtenida y el género del alumnado. El tiempo medio que tardaron los alumnos en realizar la prueba fue de 11,38 minutos ($\pm 0,492$), bastante inferior al que habíamos programado al preparar la actividad. Además, el tiempo empleado en realizar la prueba no correlaciona con la calificación obtenida ($r = 0,11$). Además, tampoco se observa una correlación estadísticamente significativa entre la calificación en el cuestionario y la calificación académica del área de matemáticas ($r = 0,05$).

4. Conclusiones

Los alumnos han aceptado con interés el guion, lo han utilizado y valorado positivamente. Además, ha permitido la reflexión y el debate tal y como pretendíamos con su propuesta. También ha favorecido la comunicación de las ideas y la participación de alumnos que habitualmente no lo hacían.

Después del análisis de los resultados creemos que el nivel de comprensión de los enunciados que manifiestan los alumnos no es el adecuado para el nivel en el que se encuentran, ya que los problemas planteados se han trabajado en cursos anteriores y no debían tener las dificultades que hemos encontrado.

El objetivo de este trabajo era comprobar si el guion propuesto a los alumnos para utilizar en la fase de comprensión añadía alguna mejora a dicha fase. En un trabajo anterior (Falcón, S., Medina, P. y Plaza, A., 2017), el mejor resultado que se obtuvo con un cuestionario similar fue del 22,4% del total con una calificación igual o superior a tres puntos, frente al 39,1% obtenido en el cuestionario que utilizamos en este trabajo. Además, como en los dos trabajos se había utilizado la misma muestra de alumnos, podemos afirmar que aproximadamente un 51% de los mismos obtuvieron mejores resultados cuando utilizaron el guion. Además, existe una diferencia estadísticamente significativa ($p = .012$) entre los resultados de las dos investigaciones.

Aunque en el trabajo anterior encontramos una relación estadísticamente significativa entre la calificación y el género de los alumnos, en este trabajo, utilizando el guion, no hemos encontrado esta relación, por lo que queremos seguir estudiando este aspecto.

El análisis del tiempo que los alumnos dedican a la fase de comprensión del problema nos permite concluir que los alumnos no le dedican el tiempo necesario a leer y comprender los enunciados de los problemas y que abandonan con bastante facilidad, o bien dan por concluida la tarea.

En ninguno de los dos trabajos que hemos realizado encontramos una correlación positiva entre la calificación académica y los resultados obtenidos en la fase de comprensión. Este es un aspecto importante ya que muchos alumnos con un mayor rendimiento académico en el área de matemáticas no obtienen los resultados que esperan en los procesos de resolución de problemas, pues entendemos que también tienen dificultades en la fase de comprensión, siendo una fuente de ansiedad para estos alumnos.

Bibliografía

- Beltrán, S. y Repetto, E. (2006). El entrenamiento en estrategias sobre la comprensión lectora del enunciado del problema aritmético: Un estudio empírico con estudiantes de educación primaria. *REOP*, 17(1), 33-48.
- Chamorro, M. (2003). Las dificultades de lectura y comprensión de los problemas matemáticos escolares. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (33), 99-119.
- De Corte, E. (2015). Aprendizaje constructivo, autorregulado, situado y colaborativo: un acercamiento a la adquisición de la competencia adaptativa (matemática). *Páginas de Educación*, 8(2), 1-35.
- Decreto 83/2016, de 4 de julio, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Canarias. *Boletín Oficial de Canarias*, 15 de julio de 2016, núm. 136, pp. 136-2395.
- Falcón, S., Medina, P. y Plaza, A. (2017). ¿Comprenden los alumnos los enunciados de los problemas? *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, 103, 72-89.



- Fernández, J. A. (2010). *La resolución de problemas matemáticos. Creatividad y razonamiento en la mente de los niños*. Madrid: Grupo Mayeútica-Educación.
- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE). *Boletín Oficial del Estado*. Madrid, 10 de diciembre de 2013, núm. 295, pp. 97858-97921.
- Limón, M. y Carretero, M. (1995). Razonamiento y solución de problemas con contenido histórico, en Carretero, M.: *Construir y enseñar: la Historia y las Ciencias Sociales*. Madrid: Visor
- Lozano, P. y Hernández, M. A. (2014). ¿Pueden nuestros estudiantes construir conocimientos matemáticos? *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 85, 49-73.
- MECD. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- OCDE (2006). *Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura*. París: OCDE.
- Pérez Juste R., Galán González A. y Quintanal Díaz J. (2012). *Métodos y diseños de investigación en educación*. Ed. UNED.
- Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas* (15a ed.). México: Trillas.
- Rodríguez-Domingo, S. y Molina, M. (2013). De lo verbal a lo simbólico: un paso clave en el uso del álgebra como herramienta para la resolución de problemas y la modelización matemática. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina y I. Segovia (eds.). *Investigación en didáctica de la matemática: homenaje a Encarnación Castro*, pp.111-118. Granada: Comares. Recuperado de <http://hdl.handle.net/10481/33497>
- Sánchez, M. R. y Vicente, S. (2015). Modelos y procesos de resolución de problemas aritméticos verbales propuestos por los libros de texto de matemáticas españoles. *Cultura y Educación: Revista de teoría, investigación y práctica*, 27(4), 710-725.
- Toboso, J. (2004). *Evaluación de habilidades cognitivas en la resolución de problemas matemáticos* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia. Recuperado de <http://www.tesisenxarxa.net/TDX-0519105-125833/>
- Vicente S., Orrantía J. y Verschaffel L. (2008). Influencia del conocimiento matemático y situacional en la resolución de problemas aritméticos verbales: ayudas textuales y gráficas. *Infancia y Aprendizaje*, 31(4), 463-483. Recuperado de <http://hdl.handle.net/10366/22527>

Sergio Falcón Santana. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Campus de Tafira, s/n. 35017 Las Palmas. Nacido en Arucas (Las Palmas), el 25.05.1945. Doctor en Matemáticas por la ULPGC. Autor de varios libros de texto y artículos de investigación, divulgación y didáctica de las Matemáticas, muchos de ellos en revistas de impacto. Email: sergio.falcon@ulpgc.es

Pedro Medina Rodríguez. Profesor de Secundaria en el Colegio San Ignacio de Loyola (Jesuitas) de Las Palmas de Gran Canaria. Nacido en Las Palmas de G.C., el 10.04.1968. Máster Universitario en Procesos Educativos por la ULPGC. Doctor por la ULPGC. Ldo. en Ciencias. Email: pmedinarodriguez@gmail.com

Ángel Plaza de la Hoz. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Campus de Tafira, s/n. 35017 Las Palmas. Doctor en Matemáticas por la ULPGC. Autor de libros de texto y artículos de investigación, divulgación y didáctica de las Matemáticas, muchos de ellos en revistas de impacto. Email: angel.plaza@ulpgc.es