

## Visualizaciones y notas históricas relacionadas con la curva $y = \frac{1}{x}$

Félix Martínez de la Rosa (Universidad de Cádiz. España)

*Fecha de recepción: 16 de octubre de 2017*

*Fecha de aceptación: 24 de mayo de 2018*

---

**Resumen** La visualización y la Historia de las Matemáticas son recursos didácticos que ayudan a los profesores a motivar a los estudiantes en sus clases. En este artículo se combinan ambos en relación con una curva de gran importancia histórica, y se enfatiza en los aspectos visuales de algunos resultados históricos y su relación con visualizaciones modernas.

**Palabras clave** Historia, Visualización, hipérbola, logaritmos, serie armónica

---

**Title** Visualizations and historical notes related to the curve  $y = \frac{1}{x}$

**Abstract** Visualization and History of the Mathematics are didactic resources that help the teachers to motivate the students in their classes. In this article both resources are combined in relation to a curve of great historical importance, and the visual aspects of some historical results and their relation with modern visualizations are emphasized.

**Keywords** Visualization, hyperbola, logarithms, harmonic series

---

### 1. Introducción

La visualización es uno de los mejores recursos didácticos del que disponemos los profesores para mejorar y hacer más atractiva la docencia en las asignaturas de matemáticas. En el libro (Guzmán, 1996), se da una acertada definición de lo que se entiende por visualización en matemáticas:

Las ideas, conceptos y métodos de la matemática presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geoméricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas. Esta forma de actuar, con atención explícita a las posibles representaciones concretas, en cuanto desvelan las relaciones abstractas que al matemático interesan constituye lo que denominamos visualización en matemáticas (p. 15).

Esta área suscita un interés creciente entre la comunidad educativa, como se deduce de los numerosos trabajos, artículos y libros que defienden la importancia de utilizar la visualización para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Para los estudiantes, un razonamiento visual puede ser



más motivador que una demostración analítica perfectamente construida y razonada, y les despierta un mayor interés y curiosidad por las Matemáticas.

En algunos trabajos se desarrollan y exponen ideas visuales para temas concretos que se imparten en cursos de la enseñanza media y universitaria. Por ejemplo, en (Martínez, 2014) o en (Apostol, T.M.; Mamikon, A. M. (2002, a y b) se ofrecen recursos visuales relacionados con el cálculo de integrales y de áreas. En (Martínez, 2016) se dan alternativas visuales para algunos resultados de geometría que se imparten en bachillerato y primer curso de cálculo en la Universidad. También en (Martínez y Vinuesa, 2002) se dan ideas para visualizar las propiedades de las funciones reales de dos variables que se explican en el primer curso de cálculo en la Universidad.

Otra forma de motivar e interesar a los alumnos es darles a conocer aspectos de la Historia de las Matemáticas que les permitan saber las cuestiones o ideas que dieron lugar a los conceptos matemáticos. En los libros de secundaria y bachillerato, cada tema suele ir acompañado de una introducción histórica, con nombres y fechas, y alguna referencia a los logros obtenidos por algún personaje destacado. Sin embargo, además de una guía para enmarcar temas, la Historia tiene también un importante papel como recurso didáctico. Por ejemplo en (González, 2004), se reclama una función didáctica para la Historia de las Matemáticas como instrumento de comprensión de sus fundamentos y de las dificultades de sus conceptos para así responder a los retos de su aprendizaje. Como ejemplo de utilización de la historia como recurso didáctico, para motivar y comprender el concepto de tangente, puede verse (Martínez, 2009)

En este artículo se proporcionan ideas que pueden permitir a los profesores utilizar la Historia como recurso didáctico y la visualización como recurso para el razonamiento y la comprensión. Esto se hace a través de un análisis histórico de propiedades relacionadas con la curva  $y = 1/x$ , incidiendo y destacando los aspectos visuales de las mismas. Se muestran visualizaciones históricas que se alternan con algunas modernas en las que podremos apreciar la clara influencia de las clásicas. El artículo se ha dividido en cuatro secciones. La primera incide en los aspectos visuales del teorema de Gregoire. La segunda muestra la relación de ese resultado con los logaritmos. Ambas secciones se refieren a temas que se explican a lo largo del bachillerato. La tercera ofrece visualizaciones relacionados con la serie armónica y la cuarta se centra en la cuadratura de la curva  $y = 1/x$ . Estos contenidos se refieren a temas del primer curso de cálculo universitario.

## 2. Áreas iguales bajo la hipérbola

El primer personaje histórico que destacamos es el jesuita y matemático belga Gregoire de Saint-Vincent ([1584](#) - [1667](#)), cuya figura y aportaciones constituye la base del artículo (Dhombres, 1993). Su obra principal fue el libro “*Opus Geometricum Quadrature Circuli et Sectionum Coni* (1647)”. Tiene más de 1200 páginas y cientos de figuras, y provocó bastante polémica en la época, porque afirmaba que era posible la cuadratura del círculo, lo que produjo el descrédito del autor. Sin embargo, su principal resultado, que probó en su libro por partida doble, fue la pieza clave que dio paso a importantes descubrimientos.

*Teorema de Gregoire* (1647). Sea  $H$  una hipérbola con centro en  $O$  y asíntotas  $a$  y  $b$ . Sean  $A', B', C', D', \dots$ , puntos sobre  $a$  tales que  $OA', OB', OC', OD', \dots$  están en progresión geométrica. Sean  $A, B, C, D, \dots$ , puntos sobre  $H$  tales que  $AA', BB', CC', DD', \dots$ , son paralelos a  $b$ . Entonces las áreas  $A'ABB', BB'CC', C'CDD', \dots$ , son iguales (figura 1).

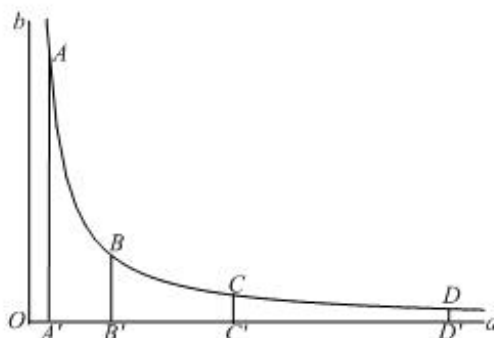


Figura 1

Las matemáticas disponibles de hace 400 años eran muy distintas a las de hoy día. Se empleaba una notación diferente a la actual y no incluían herramientas como el límite o la geometría analítica. Las pruebas se basaban en ingeniosos estudios geométricos de las figuras y en una imaginación prodigiosa. Para simplificar y poder seguir la demostración del teorema de Gregoire, se usa la hipérbola  $y=1/x$ , donde los ejes coordenados son las asíntotas. Los pasos de la demostración se recogen en los magníficos artículos (Dhombres, 1993) y (Burn, 2000).

La prueba que mostraremos está influenciada por el método de la cuadratura de la parábola de Arquímedes. Se basa en cuatro visualizaciones que damos a continuación.

### Propiedad 1: Recintos con igual área bajo la hipérbola

Las dos áreas coloreadas bajo la hipérbola (figura 2), son iguales.

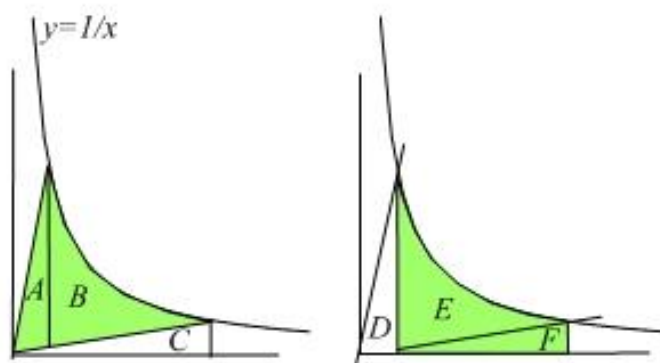


Figura 2

Hay que probar que  $A + B = E + F$ . Observando que  $A + B + C = D + E + F$ , y que las áreas  $C$  y  $D$  valen  $1/2$ , se tiene el resultado.



### Propiedad 2: Relación entre la media geométrica y la aritmética

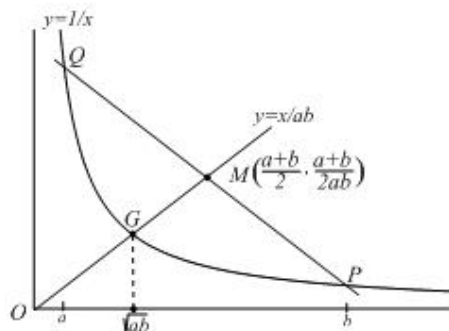


Figura 3

En la figura 3,  $M$  es el punto medio del segmento que une  $P$  y  $Q$ . Se observa que la intersección de la recta  $OM$  con la hipérbola es el punto  $G$  cuya coordenada  $x$  vale  $\sqrt{ab}$ .

### Propiedad 3: Triángulos con la misma área

En la figura 3, tomamos los puntos medios de los segmentos  $QM$  y  $MP$ . Las rectas que unen esos puntos con el origen cortan a la hipérbola en  $T$  y  $S$  (figura 4). Se verifica que las áreas de los triángulos  $\Delta QTG$  y  $\Delta GSP$  son iguales.

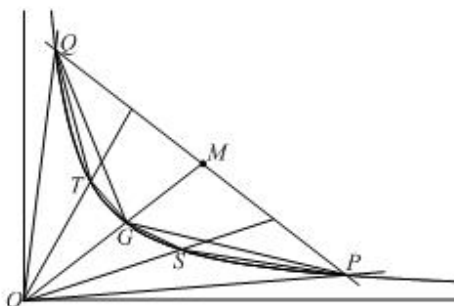


Figura 4

Como se vio en la propiedad 2, la coordenada  $x$  de  $T$  es la media geométrica de las coordenadas  $x$  de  $Q$  y de  $G$  ( $a$  y  $\sqrt{ab}$ ), y la coordenada  $x$  de  $S$  es la media geométrica de las coordenadas  $x$  de  $G$  y de  $P$  ( $\sqrt{ab}$  y  $b$ ), por tanto estos puntos son:

$$T\left(\sqrt[4]{a^3b}, 1/\sqrt[4]{a^3b}\right) \text{ y } S\left(\sqrt[4]{ab^3}, 1/\sqrt[4]{ab^3}\right)$$

La prueba geométrica empleada por Gregoire para demostrar la igualdad de las áreas de los triángulos  $\Delta QTG$  y  $\Delta GSP$  se describe en (Dhombres, 1993) con la expresión “bastante dolorosa”. Debemos recurrir al cálculo para obtener estas áreas con las fórmulas:

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & 1/a & 1 \\ \sqrt[4]{a^3b} & 1/\sqrt[4]{a^3b} & 1 \\ \sqrt{ab} & 1/\sqrt{ab} & 1 \end{vmatrix} \text{ y } \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \sqrt{ab} & 1/\sqrt{ab} & 1 \\ \sqrt[4]{ab^3} & 1/\sqrt[4]{ab^3} & 1 \\ b & 1/b & 1 \end{vmatrix}$$

Ambas son iguales y valen  $\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}} \right) + \left( \sqrt[4]{\frac{a}{b}} - \sqrt[4]{\frac{b}{a}} \right)$ .

#### Propiedad 4: Triángulo inscrito con la mayor área

Ahora se trata de encontrar el triángulo de mayor área dentro de la región convexa  $GQP$  de la figura 5.

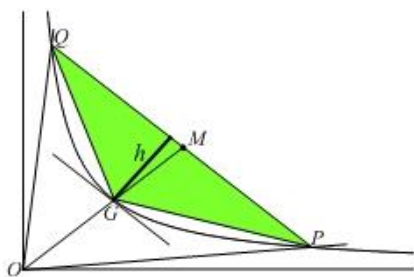


Figura 5

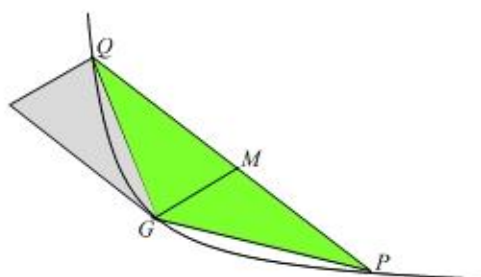


Figura 6

Debe tener base  $QP$  y altura la mayor posible. Visualmente se observa que la tangente a la hipérbola en  $G$  es paralela a  $QP$  (analíticamente es fácil comprobar que la pendiente de la recta  $QP$  y la de la tangente a la hipérbola en  $G$  son iguales). Por tanto el triángulo de mayor área es  $\Delta GQP$ , y además (figura 6) ocupa más de la mitad de la región  $GQP$ .

#### Demostración del teorema de Gregoire

Basta comprobar la igualdad de las áreas de dos regiones adyacentes,  $A'ABB'$  y  $BB'CC'$ , o lo que es lo mismo (propiedad 1) que son iguales las áreas de las regiones  $OAB$  y  $OBC$ . Tomemos las figuras 7 y 8.

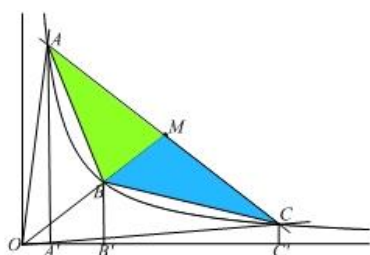


Figura 7

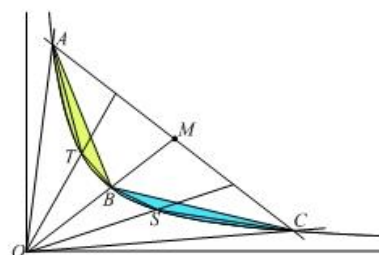


Figura 8



Por hipótesis  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  están en progresión geométrica, por tanto la coordenada  $x$  de  $B'$  es la media geométrica de las de  $A'$  y  $C'$ . Entonces la propiedad 2 nos dice que  $M$  es el punto medio entre  $A$  y  $C$ . Observando las figuras 7 y 8 vemos que:

$$\text{Área de } OAB = \text{Área de } \triangle OAM - \text{Área de } \triangle ABM - \text{Área de } \triangle ATB - \dots$$

$$\text{Área de } OBC = \text{Área de } \triangle OMC - \text{Área de } \triangle BMC - \text{Área de } \triangle BSC - \dots$$

Las áreas de  $\triangle OAM$  y de  $\triangle OMC$  son iguales ya que  $OM$  es una mediana del triángulo  $\triangle OAC$ . Las áreas de  $\triangle ABM$  y de  $\triangle BMC$  son iguales por ser  $BM$  una mediana del triángulo  $\triangle ABC$ . Y también son iguales las áreas de  $\triangle ATB$  y de  $\triangle BSC$ , por la propiedad 3.

Para acabar, faltan por comparar cuatro regiones: las que están por debajo de los segmentos  $AT$ ,  $TB$ ,  $BS$  y  $SC$ . Para ello se usan cuatro triángulos de igual área y que ocupan más de la mitad de cada región (propiedad 4). Después quedarán por comparar ocho regiones para lo cual se usan ocho triángulos de igual área y que ocupan más de la mitad de cada región, etc. Por tanto, el área de la región que queda fuera de los triángulos tiende a cero, por lo que se tiene el resultado. El proceso anterior se conoce como “método exhaustivo”, así denominado por Gregoire (Dhombres, 1993), aunque es una técnica conocida y empleada por los geómetras de la antigüedad.

**Observación.** Supongamos que queremos calcular el área de una región bajo la hipérbola, comprendida en un intervalo  $(a, b)$ . Denominamos  $A\left(a, \frac{1}{a}\right)$ ,  $C\left(b, \frac{1}{b}\right)$  a los puntos correspondientes sobre la hipérbola. El área buscada sería la misma que la de la región  $OAC$  de la figura 8. Las coordenadas de los otros puntos son:

$$B\left(\sqrt{ab}, \frac{1}{\sqrt{ab}}\right); T\left(\sqrt[4]{a^3b}, \frac{1}{\sqrt[4]{a^3b}}\right); S\left(\sqrt[4]{ab^3}, \frac{1}{\sqrt[4]{ab^3}}\right)$$

Entonces,

$$\text{Área de } OAC = \text{Área de } \triangle OAC - \text{Área de } \triangle ABC - \text{Área de } \triangle ATB - \text{Área de } \triangle BSC - \dots$$

En la propiedad 3 se comprobó que las áreas de  $\triangle ATB$  y de  $\triangle BSC$  son iguales. De la misma manera se obtiene las otras áreas:

$$\text{Área de } \triangle OAC = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right), \text{Área de } \triangle ABC = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right) + \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$$

Se observa que todas estas áreas van saliendo en función de  $\frac{b}{a}$ ,  $\sqrt{\frac{b}{a}}$ ,  $\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$ , etc. y por tanto al área buscada le sucede lo mismo. Por último, se llega a la conclusión de que el área bajo la hipérbola en un intervalo  $(a, b)$  es la misma que en el intervalo  $(ta, tb)$ , por ser  $\frac{b}{a} = \frac{tb}{ta}$ . Tomemos ahora  $1 < a < b$  y observemos la figura 9:

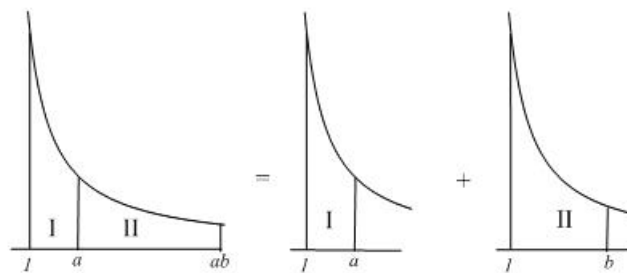


Figura 9

Visualmente obtenemos la propiedad que caracterizará a los logaritmos:

$$(\text{Área entre } 1 \text{ y } ab) = (\text{Área entre } 1 \text{ y } a) + (\text{Área entre } 1 \text{ y } b)$$

### 3. Logaritmos

El teorema de Gregoire fue el primer paso hacia el descubrimiento de la relación entre las áreas bajo la hipérbola y los logaritmos. Para comprenderla y apreciarla, es interesante ofrecer una breve historia de las tablas de logaritmos, cuyo uso forma ya parte del olvido.

#### Breve historia de las tablas de logaritmos

Arquímedes tuvo la idea de calcular productos a través de sumas, empleando progresiones aritméticas y geométricas. Tomemos la tabla 1:

<b>P. A.</b>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>P. G.</b>	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

Tabla 1

Para calcular el producto de dos elementos de la progresión geométrica, por ejemplo  $8 \times 64$ , se suman los correspondientes números de la progresión aritmética,  $3+6=9$ . Al 9 le corresponde 512 en la progresión geométrica, y este es el resultado buscado. Esta idea fue desarrollada en el siglo XVI por John Napier (1550-1617), JobstBürigi (1551-1632) y Henry Briggs (1561-1631). Fue Napier quien denominó *logaritmos* a los términos de la progresión aritmética, mezclando las palabras griegas *logos* (relación) y *arithmos* (números).

Para obtener sus tablas, Napier y Bürigi consideraron potencias de un número próximo a 1. Napier usó  $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right) = 0.9999999$ , y Bürigi usó  $\left(1 + \frac{1}{10^4}\right) = 1.0001$ . Ninguno de los dos empleó el concepto de base de un logaritmo (Burn, 2001).

Observando de nuevo la tabla 1, si denominamos  $x$  a los números de la progresión geométrica y  $\log x$  a los correspondientes de la aritmética, entonces para hallar  $8 \times 64$  se calcula  $\log 8 + \log 64 = 3 + 6 = 9 = \log 512$ . Aquí aparece la propiedad fundamental de los logaritmos (que no se cumple ni en las tablas de Napier ni en las de Bürigi):



$$\log(a \times b) = \log a + \log b$$

Observemos ahora la tabla 2:

$\log x$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x$	1	2	4	8	16	32	64	128	256

Tabla 2

Para calcular  $4 \times 8$ , se usó  $\log 4 + \log 8 = 5 + 6 = 11 = \log 256$ . Sin embargo  $4 \times 8 \neq 256$ . Esto sucede porque en la tabla 2 lo que se verifica es:  $\log(a \times b) = \log a + \log b - \log 1$ .

En su obra “*Arithmetica logarithmica* (1624)”, Briggs vio la conveniencia de exigir que  $\log 1 = 0$  y de que  $\log 10 = 1$ . Tomemos la tabla 3:

$\log x$	0	1
$x$	1	10

Tabla 3

Si entre 1 y 10 interpolamos un número en progresión geométrica:  $10^{1/2} \cong 3.16228$ , entonces se deberá interpolar entre 0 y 1 un número en progresión aritmética que será su logaritmo:  $1/2$ , y se obtiene la tabla 4:

$\log x$	0	$\frac{1}{2}$	1
$x$	1	3.16228	10

Tabla 4

Aumentando y refinando las interpolaciones, y empleando muchísimo tiempo y paciencia, Briggs y otros obtuvieron las denominadas tablas de logaritmos decimales cuya base es 10 (Perkins, 2012).

## Relación entre la hipérbola y los logaritmos

En este punto, destaca la aparición del jesuita Alfonso Antonio de Sarasa (1618-1667), pupilo y posteriormente colega de Gregoire de Saint Vincent. Aunque su contribución al desarrollo de los logaritmos es considerada por algunos (Burn, 2001) como una simple puntualización del trabajo de Gregoire, en ese último artículo se cuenta que poco después de la publicación del libro de Gregoire, Descartes escribió a Mersenne haciéndole notar errores en la cuadratura del círculo (hoy en día se sabe que no es posible) y este escribió, en 1648, un panfleto criticando el libro y lanzando un reto a Gregoire: “*Dadas tres magnitudes arbitrarias, racionales o irracionales, y dados los logaritmos de dos, encontrar geoméricamente el logaritmo de la tercera*”.



Sarasa respondió que el problema estaba mal formulado pero que él encontraría la manera de hacerlo bien y lo reduciría a una construcción geométrica. En 1649 Sarasa escribió “*Solutio problematis a R. P. Marino Maersenne*” donde, inspirándose en el teorema de Gregoire, resolvió el reto de Mersenne para tres números en progresión geométrica, y relacionó las áreas que se hallaban bajo la hipérbola con los logaritmos. Utilizando una notación moderna, veamos la figura 10:

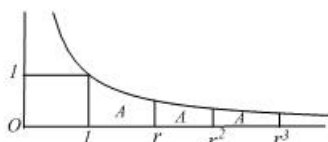


Figura 10

En el eje  $x$  tenemos una progresión geométrica. A esta le corresponde la progresión aritmética que forman las áreas bajo la hipérbola, entre 1 y cada valor de la progresión geométrica (tabla 5).

Progresión aritmética (Logaritmos)	0	A	2A	3A	...
Progresión geométrica	1	r	r <sup>2</sup>	r <sup>3</sup>	...

Tabla 5

Se verifica que  $\log r^n = nA$ . Como  $r$  puede ser cualquier razón, se concluye que:

Para  $a > 1$ ,  $\log a$  es igual al área bajo la hipérbola  $y=1/x$  entre 1 y  $a$ .

El problema es que si se emplean los logaritmos decimales de Briggs, entonces la expresión  $\log_{10} 10 = 1$  querría decir, según la idea de Sarasa, que el área bajo la hipérbola  $y=1/x$  entre 1 y 10 vale 1. Sin embargo, la figura 11 ilustra que esto no es así.

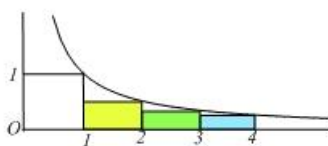


Figura 11

Se observa que las áreas marcadas suman  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$ . Por tanto es obvio que la conexión entre las áreas y los logaritmos todavía no estaba cerrada. La persona que aclaró esta cuestión nació cincuenta años después. En (Debnath, 2015), se cuenta que fue Euler (1707-1783), en una carta a Goldbach en 1731, el primero que mencionó a una constante  $e$  de manera que el área bajo la hipérbola  $y=1/x$  entre 1 y  $e$ , es exactamente igual a 1, Y lo expresó en la forma:

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = \log_e e = 1$$



Hoy en día, la función logaritmo neperiano se define como  $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ , para  $x > 0$ .

Una forma visual de aproximar el valor del número  $e$ , basada únicamente en la definición de Euler, se describe en (Ghatage, 2003). Tomemos la figura 12:

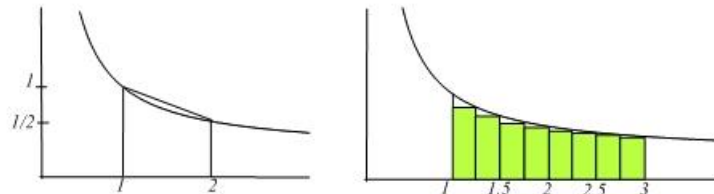


Figura 12

En la figura 12 (izquierda) se observa que el área bajo la hipérbola, entre 1 y 2 es menor que el área del trapecio dibujado, cuyo valor es:

$$\frac{(1 + 1/2)}{2} = \frac{3}{4} < 1$$

Por tanto  $e > 2$ .

En la figura 12 (derecha) se ha dividido el intervalo (1,3) en ocho partes iguales. Se observa que el área bajo la hipérbola, entre 1 y 3 es mayor que la suma de las áreas de los rectángulos cuyo valor es

$$\frac{1}{4} \left( \frac{4}{5} + \frac{4}{6} + \dots + \frac{4}{12} \right) \approx 1.0199 > 1$$

Por tanto  $e < 3$ .

Para aproximar más el valor de  $e$ , tomemos la figura 13.

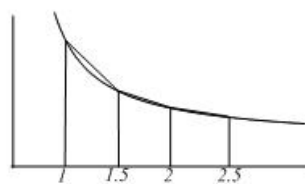


Figura 13

Se observa que el área bajo la hipérbola entre 1 y 2.5 es menor que la suma de las áreas de los tres trapecios dibujados, cuyo valor es:

$$\frac{(1 + 2/3)}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{(2/3 + 1/2)}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{(1/2 + 2/5)}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{112}{30} < 1.$$

Por tanto  $e > 2.5$ .

En (Young, 1992), se describe la manera empleada por Euler para obtener un valor de  $e$ . Tomemos la figura 14, donde  $w$  es un número “infinitamente pequeño”.

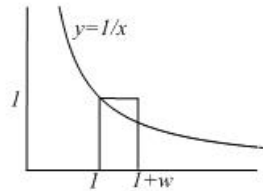


Figura 14

El área bajo la hipérbola entre  $1$  y  $1+w$ , es el logaritmo de  $1+w$ . Esta área, debido al carácter infinitesimal de  $w$ , coincidiría con la del rectángulo de la figura 14. Empleando como base del logaritmo el número  $e$ , y la relación entre los logaritmos y los exponentes se tiene que:

$$\log_e(1+w) = w, \text{ por tanto } e^w = 1+w$$

Si se toma el valor  $w = \frac{1}{n}$ , se obtiene la expresión:

$$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \text{ donde } n \text{ es “infinitamente grande”}.$$

Hoy en día, usando el concepto de límite, sabemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ . En (Nelsen, 2000, p. 57), se ofrece una sencilla visualización de esta fórmula, inspirada en la figura 14. Tomemos la figura 15:

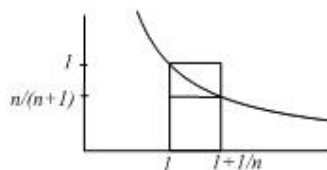


Figura 15

El área bajo la hipérbola entre  $1$  y  $1 + 1/n$ , se encuentra comprendido entre el área del rectángulo pequeño y el del grande, por tanto  $\frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ , de donde se deduce que:

$$\frac{n}{n+1} < n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1$$

Con el paso al límite obtenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1$  y por tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ .

#### 4. La serie armónica

Otro elemento básico en la historia del desarrollo de los logaritmos es la serie armónica. La demostración más conocida sobre la divergencia de la serie:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

se debe a Nicole Oresme (1323- 1382), y consiste en agrupar sus términos en la forma:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

El primer paréntesis es mayor que  $2 \cdot \frac{1}{4}$ , el segundo es mayor que  $4 \cdot \frac{1}{8}$ , el tercero es mayor que  $8 \cdot \frac{1}{16}$ , etc. Por tanto, la serie es mayor que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

que puede hacerse tan grande como se quiera, por lo que la serie armónica diverge.

Otra demostración clásica de esta divergencia se debe a Pietro Mengoli (1626- 1686), que sugirió hacer el agrupamiento siguiente:

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \dots$$

Con el argumento de que la suma de cada paréntesis es mayor que el triple del término central se obtiene que la suma total es mayor que

$$1 + \frac{3}{3} + \frac{3}{6} + \frac{3}{9} + \dots$$

Por tanto si la serie armónica convergiera a  $H$ , se tendría que  $H > 1 + H$ , llegando a una contradicción. En (Nelsen, 2015, p. 109), se da una visualización del argumento empleado por Mengoli, a través de la figura 16:

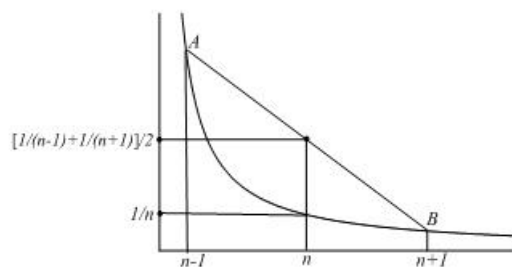


Figura 16

Visualmente se aprecia que:  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} \right) > \frac{1}{n}$ , y por tanto  $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} > \frac{3}{n}$ , que es lo que Mengoli utilizó para su prueba.

Otra forma visual de apreciar la divergencia de la serie armónica se basa en la figura 17:

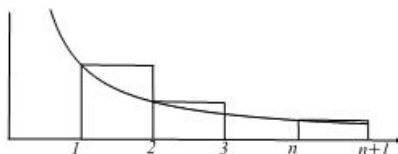


Figura 17

La suma de las áreas de los rectángulos es mayor que  $\ln(n+1)$ , que es el área bajo la hipérbola entre 1 y  $n+1$ . Por tanto, con el paso al límite obtenemos la divergencia de la serie armónica.

Los trabajos de Euler sobre la serie armónica lo llevaron al descubrimiento, en 1734, de una nueva constante  $\gamma$ : el límite de la diferencia entre la serie armónica y el logaritmo natural. En (Debnath, 2015), se proporciona una visualización de esta constante. Tomemos la figura 18:

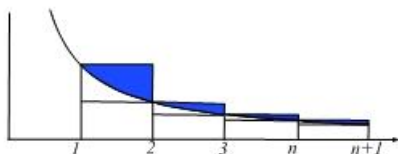


Figura 18

Se observa que el área bajo la hipérbola, entre 1 y  $n+1$ , está comprendida entre la suma de las áreas de los rectángulos pequeños y grandes, es decir:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Denominando:



$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

a la  $n$ -ésima suma parcial de la serie armónica, se tiene que

$$H_n - 1 + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < H_n.$$

Multiplicando por  $-1$ , y sumando  $H_n$  a cada término de la desigualdad se obtiene  $0 < H_n - \ln(n+1) < 1 - \frac{1}{n+1}$ , y por tanto:

$$0 < \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) \right) < 1$$

Este límite se conoce también como constante de Euler- Mascheroni, después de que ambos matemáticos calcularan sus veinte primeras cifras decimales.

## 5. Cuadratura de la hipérbola

Desde la época griega, los matemáticos han buscado procedimientos geométricos para obtener la cuadratura de distintas superficies. Una superficie es cuadrable cuando, a partir de ella, es posible obtener geoméricamente (empleando solo una regla no graduada y un compás, según lo establecido en los “*Elementos de Euclides*”) un cuadrado que tenga la misma área que aquella. El término cuadratura también se utiliza para referirse al cálculo del área limitada por una curva. En 1685, William Brouncker (1620- 1685) publicó el libro “*The squaring of the hyperbola by an infinite series of rational numbers, together with its demonstration*”, donde expone su técnica para cuadrar la hipérbola (Stedal, 2003). Tomemos la figura 19:

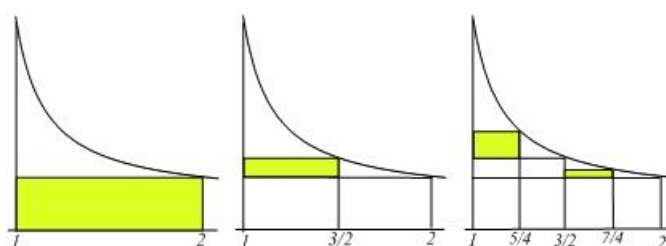


Figura 19

El área bajo la hipérbola, entre los puntos 1 y 2, se obtiene por el “método exhaustivo”. El área del primer rectángulo es  $1/2$ . Tomando el punto medio  $3/2$ , el área del segundo rectángulo es

$$\frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{12}$$

Volviendo a tomar los puntos medios se obtienen dos rectángulos cuyas áreas son:

$$\frac{1}{4} \cdot \left( \frac{4}{5} - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{30}, \text{ y } \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{4}{7} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{56}.$$

Repetiendo el proceso y sumando las áreas de todos los rectángulos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{56} + \dots &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots \\ &= \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \left( \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right) + \dots \end{aligned}$$

Por tanto, el área buscada, y que corresponde al valor  $\ln 2$ , es:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Esta técnica es la misma que se utiliza en (Finkelstein, 1987), y también es muy similar a la que se expone a continuación. Utilizando rectángulos cuyas áreas son superiores a la limitada por la hipérbola, entre 1 y 2, se construye la figura 20 (Hudelson, 2010):

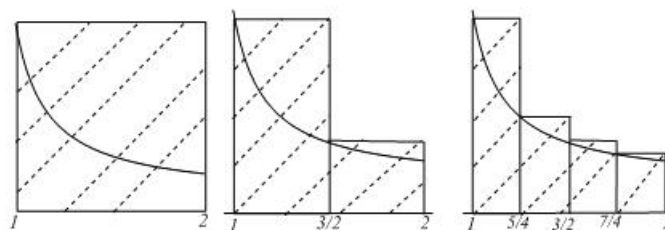


Figura 20

El área bajo la hipérbola entre 1 y 2, se aproxima con la del rectángulo grande (figura 20, izquierda) y se inicia el método exhaustivo, quitándole la mitad y añadiéndole a cambio uno más pequeño cuya base es la mitad y cuya altura viene dada por la hipérbola. El área rayada (figura 20, centro) es:

$$1 + \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)$$

Se repite el proceso, quitando la mitad de cada rectángulo y añadiendo uno más pequeño construido como se ha descrito antes. El área rayada (figura 20, derecha) es:

$$1 + \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right)$$

Repetiendo el proceso indefinidamente se llega al área buscada.

Una última visualización que se basa de nuevo en la curva  $y = 1/x$ , ilustra la convergencia de la serie telescópica:



$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = 1$$

Notemos que para  $n > 1$ , se verifica que  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ . Estos valores corresponden a las áreas de los rectángulos coloreados de la figura 21.

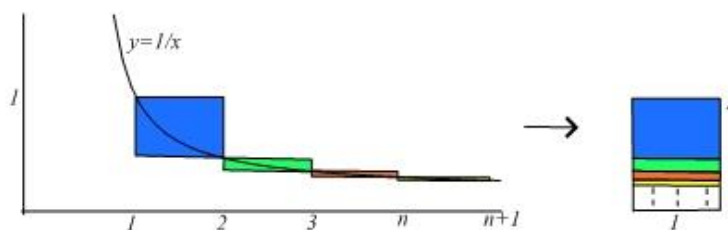


Figura 21

Acumulando las áreas de estos rectángulos se llega a la conclusión de que la suma total es 1 (Nelsen, 2015, p. 102).

Más ejemplos donde se emplea esta técnica para visualizar sumas infinitas, pueden verse en (Nelsen, 1991) y (Plaza, 2010), y otras visualizaciones sobre las propiedades de los logaritmos se dan en (Ely, 1996), (Akman, 2002) y (Stein y McGavran, 1998).

En este artículo se han proporcionado ideas que pueden permitir a los profesores utilizar la Historia como recurso didáctico y la visualización como recurso para el razonamiento y la comprensión. Se ha elegido como tema central la curva  $y = 1/x$  ya que, relacionados con ella, se hicieron descubrimientos históricos muy importantes. Se ha destacado el teorema de Gregoire, que es un dechado de ideas visuales brillantes que permitieron relacionar las áreas bajo la hipérbola con los logaritmos. También se han resaltado otros resultados y visualizaciones que mejoran la comprensión del número  $e$ , de la divergencia de la serie armónica y de la constante de Euler. Y finalmente la cuadratura de la hipérbola propuesta en el siglo XVII, que es fuente de inspiración de algunas visualizaciones actuales.

## Bibliografía

- Akman, F. (2002). Proofs without words under the magic curve. *The College Mathematics Journal*, 33(1), pp. 42-46.
- Apostol, T.M. ;Mamikon, A. M. (2002-a). Subtangents. An aidto visual calculus. *The American Math.Monthly*, 109(6), pp. 525-533.
- Apostol, T.M. ;Mamikon, A. M. (2002-b). Tangents and subtangentsused to calculate areas. *The American Math.Monthly*, 109(10), pp. 900-907.
- Burn, B. (2000). Gregory of St Vincent and the Rectangular Hyperbola. *The mathematical gazette*, 84(501), pp. 480-485.
- Burn, R.P. (2001). Alphonse Antonio de Sarasa and Logarithms. *HistoriaMathematica*, 28, pp. 1-17.
- Debnath, L. (2015). A brief history of the most remarkable numbers  $e$ ,  $I$  and  $\gamma$  in mathematical sciences with applications. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 46(6), pp. 853-878.



- Dhombres, J. (1993). Is one proof enough? Travels with a Mathematician of the Baroque Period. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), pp. 401-419.
- Ely, J. (1996). A visual proof that  $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ . *The College Mathematics Journal*, 27(4), p. 304.
- Finkelstein, M. (1987).  $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  (proof by exhaustion). *American Mathematical Monthly*, 94(6), pp. 541-542.
- Ghatage, P. (2003). A simple introduction to  $e$ . *The College Mathematics Journal*, 34(4), pp. 323-324.
- González, P. M. (2004) La historia de las matemáticas como recursodidáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suman*° 45, pp. 17-28.
- Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra: ensayos de visualización en análisis matemático*. Madrid: Pirámide.
- Hudelson, M. (2010). Proof Without Words: The Alternating Harmonic Series Sums to  $\ln 2$ . *Mathematics Magazine*, 83(4), p. 294.
- Martínez, F. (2009). La recta tangente: notas históricas y actividades en el aula. *Suma*, n° 61, pp. 7-15.
- Martínez, F. (2014). Recursos para el cálculo visual de integrales. *Educación Matemática*, 26(1), pp. 153-169.
- Martínez, F. (2016). Visualizaciones geométricas. *Suma*, n° 83, pp. 65-71.
- Martínez, F.; Vinuesa, C. (2002) A graphic study of the properties of real-valued functions of two variables. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 33(5), 733-739.
- Nelsen, R.B. (1991). Proof Without Words: Sums of reciprocals of triangular numbers. *Mathematics Magazine*, 64(3), p. 167.
- Nelsen, R.B. (2000). *Proofs without words II*. MAA press, USA
- Nelsen, R.B. (2015). *Cameos for Calculus. Visualization in the first-year Calculus*. MAA press, USA.
- Perkins, D. (2012). *Calculus and its origins*. MAA, USA.
- Plaza, A. (2010). Proof Without Words: Mengoli's Series. *Mathematics Magazine*, 83(2), p. 140.
- Stedal, J. (2003). *A discourse concerning Algebra*. Oxford University Press.
- Stein, A. and Mcgavran, D. (1998). Proof of a common limit. *The College Mathematics Journal*, 29(2), p. 147.
- Young, R. (1992). *Excursions in Calculus: An Interplay of the Continuous and the Discrete*. MAA, USA.

**Félix Martínez de la Rosa**. Doctor en Matemáticas y Catedrático de Escuela Universitaria de Matemática aplicada en la Universidad de Cádiz. Investigaciones en educación matemática acerca de la diferenciación de funciones reales de una y dos variables, el uso de la visualización en la docencia de las matemáticas y la detección de errores de concepto.  
Email: [felix.martinez@uca.es](mailto:felix.martinez@uca.es)

