

Las funciones semióticas como herramienta de análisis en la comprensión de objetos matemáticos. Una situación de probabilidad simple

Gladys Mejía Osorio

(Docente de la Secretaría de Educación de Distrito. Colombia)

Fecha de recepción: 26 de junio de 2018

Fecha de aceptación: 22 de octubre de 2018

Resumen

Este artículo muestra cómo las funciones semióticas se convierten en una herramienta analítica que decanta los significados que otorgan los estudiantes a los objetos matemáticos. Para alcanzar este fin se analizan las relaciones que establecen los estudiantes entre expresiones y contenidos a una situación enmarcada en la probabilidad simple, para ello, se recurre al Enfoque Ontosemiótico y a la Teoría de Registros Semióticos. Se centra la atención en las producciones de 20 estudiantes, de grado decimo de un colegio de la ciudad de Bogotá, al dar solución a una situación de probabilidad simple y con ello mostrar cómo la función semiótica posibilita identificar los significados que asocian los estudiantes a este objeto matemático.

Palabras clave

Probabilidad simple, función semiótica, significado, comprensión.

Title

Semiotic functions as a tool of analysis in the understanding of mathematical objects: The case of the simple probability

Abstract

This article shows how semiotic functions become an analytical tool that decant the meanings that students give to mathematical objects. To achieve this end, the relationships established by students between expressions and contents to a situation framed in simple probability are analyzed, for which the Ontosemiotic Approach and the Theory of Semiotic Records are used. The focus is on the productions of 20 students, tenth grade of a school in the city of Bogotá, when solving a simple probability situation and thereby show how the semiotic function makes it possible to identify the meanings that students associate with this mathematical object.

Keywords

Simple probability, semiotic function, meaning, understanding.

1. Introducción

En los últimos años un desafío latente en educación matemática es poder entender las diferentes comprensiones que los sujetos construyen de los objetos matemáticos fruto de las prácticas matemáticas que realizan en el aula de clases. Se comparte con (Godino, 2003) que un fin específico de la didáctica de las matemáticas como campo de investigación es el estudio de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo de programas que mejoren dichos procesos. El presente escrito, pretende dar a conocer los diferentes sentidos que los estudiantes otorgan a la probabilidad simple, mediante el reconocimiento de las relaciones que ellos pueden establecer cuando se enfrentan a la solución de una situación enmarcada en este campo,



las cuales permiten identificar los significados que han desarrollado los estudiantes y, en esta dirección, aportar a los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Por otro lado, se centra la atención en el estudio de la probabilidad debido al fuerte interés que se plantea desde las políticas educativas en Colombia, tanto en los Lineamientos Curriculares en el área de Matemáticas (MEN, 1998) como en los Estándares básicos de competencia en matemáticas, (MEN, 2006), en cuanto se reconoce la necesidad de incluir el estudio de la probabilidad y la estadística en las instituciones educativas como una herramienta necesaria para la toma de decisiones y para la aplicación a otras ciencias. En particular, se plantea que la probabilidad y los fenómenos aleatorios han construido un andamiaje matemático que logra dominar y manejar adecuadamente la incertidumbre, así mismo, los dominios de la estadística no solo han aportado a otras disciplinas, sino que, han permitido desarrollos al interior de la misma matemática.

En los estándares curriculares de matemáticas se plantea la importancia de incluir el estudio de la probabilidad en los diferentes niveles de escolaridad. Por ejemplo, en los cursos iniciales de educación básica se espera que los estudiantes puedan explicar desde su propia experiencia la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos, así como predecir si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro. Posteriormente, en los últimos grados de educación básica (octavo/noveno), se espera que puedan calcular la probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo), además de conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.). Por otra parte, si se tiene en cuenta que muchos fenómenos de la vida son de carácter aleatorio y que diversas situaciones de la vida cotidiana pueden ser abordadas y analizadas usando conceptos de probabilidad y estadística (Batanero, 2006), el estudio de la probabilidad se hace necesario; lo cual plantea la necesidad de pensar y reflexionar posibles estrategias y recursos para su enseñanza y aprendizaje.

Por tanto, un proceso de enseñanza que pretenda generar cambios significativos en el aprendizaje de las matemáticas, requiere de procesos de reflexión sobre las construcciones conceptuales que los sujetos logran realizar sobre los objetos matemáticos producto de la implementación de las prácticas en el aula de clases. Con el propósito de aportar elementos que permitan orientar estos procesos de reflexión, en este escrito se muestran diferentes relaciones que establecen los estudiantes cuando se les pide abordar una situación de probabilidad. Se muestra cómo las funciones semióticas poseen un gran potencial como una herramienta metodológica para el estudio de los significados personales construidos por los estudiantes y por ende las comprensiones que logran construir de un objeto matemático. En esta dirección, Font plantea que:

El hecho de considerar que las funciones semióticas tienen un papel muy importante en el proceso relacional entre entidades (o grupos de ellas), activado en prácticas que se realizan dentro de un determinado juego de lenguaje, permite también entender la comprensión en términos de funciones semióticas. En efecto, podemos interpretar la comprensión de un objeto O por parte de un sujeto X (sea individuo o institución) en términos de funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego O como fectivo (expresión o contenido). (Font, 2002, p. 106)

En el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemática, las funciones semióticas tienen un papel importante en la comprensión de los objetos matemáticos (Godino, 2003), puesto que permiten a los sujetos tener diferentes “miradas” de un mismo objeto y con ello generar una mejor comprensión de tal objeto.

2. Antecedentes

Este trabajo se enmarca en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemática propuesto por (Godino y colaboradores 1994, 2008), que proporcionan un marco unificado que estudia las diversas formas de conocimiento matemático y sus respectivas interacciones. Específicamente hace uso de la función semiótica, que inicialmente fue introducida por Hjelmslev (1943, citado en Godino, 2003, pp. 40) con la denominación de “función de signo” que es considerada como aquella dependencia entre un texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí. Según Godino (2003) la correspondencia dentro de una función semiótica son las relaciones de dependencia o función entre el antecedente (expresión, significante, representante) y un consecuente (contenido o significado, representado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia las cuales, (Godino, 2003) considera que pueden ser hábitos o convenios que informan a los sujetos implicados sobre los términos que se deben poner en correspondencia a las circunstancias fijadas.

El significado permite identificar las comprensiones de los estudiantes sobre un objeto matemático. Sierpinska (1990 citado en Godino 2003, pp. 28), considera que la idea de significado está íntimamente ligada a la comprensión, para esta autora "Comprender el concepto será entonces concebido como el acto de captar su significado". En esta dirección el significado que un sujeto otorga al objeto matemático es una evidencia de la comprensión que este ha logrado construir del objeto matemático. Dummett (1991, citado en Godino 2003, pp. 29), relaciona, el significado y la comprensión desde una perspectiva más general: "una teoría del significado es una teoría de la comprensión; esto es, aquello de lo que una teoría del significado tiene que dar cuenta, es lo que alguien conoce cuando conoce el lenguaje, es decir, cuando conoce los significados de las expresiones y oraciones del lenguaje". Por otro lado, (Godino, 2003) afirma que en la actividad matemática los símbolos (significantes) remiten o están en lugar de las entidades conceptuales (significados). En este sentido la comprensión de la semántica y la naturaleza de los objetos matemáticos, así como las proposiciones matemáticas que dependen de los contextos y situaciones en el cual emergen dichos objetos matemáticos, son importantes para entender sus aspectos sintácticos y pragmáticos.

El interés por el estudio del significado de los términos y conceptos matemáticos conlleva a reflexionar sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, así como, la reflexión ontológica y epistemológica sobre la génesis personal y cultural del conocimiento. Es decir, a esa forma en que se constituye y se dan a conocer los objetos matemáticos. Según (Godino, 2003) los objetos matemáticos pueden ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo. En esta dirección, uno de los objetivos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es que los estudiantes logren reconocer el significado de los términos, expresiones y representaciones semióticas; es decir, como lo plantea (Duval, 1993), que se apropien del lenguaje matemático en sus diferentes registros semióticos, puesto que es la única manera en que los sujetos pueden acceder al conocimiento matemático.

Desde los planteamientos de (Duval, 1993), el aprendizaje de los objetos matemáticos sólo puede ser un aprendizaje conceptual y, de otra parte, es sólo a través de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Lo anteriormente señalado, pone de manifiesto que todo conocimiento matemático acude a las diferentes representaciones para que los sujetos puedan acceder a los objetos matemáticos, así como, moviliza una variedad de sistemas semióticos de representación de los objetos matemáticos, en esta dirección Duval explicita la dupla (signo, objeto), o (representación semiótica, objeto). Igualmente, las diferentes representaciones de un objeto, hace que se distingan más elementos de su conformación, en esta perspectiva entre más



representaciones semióticas movilice una persona, permite que este se acerque aún más al objeto matemático o en otras palabras tenga una idea más global del objeto matemático.

Teniendo presente la importancia del significado en la comprensión de objetos matemáticos y las representaciones semióticas que permiten a los sujetos acceder a dichos objetos, este trabajo centra la atención por un lado en las comprensiones de los estudiantes por medio de las diferentes relaciones que establecen y por otro al sentido¹ que le otorgan a dichas representaciones; en este caso, a las expresiones que les permite calcular la medida de la probabilidad pedida. Pero cómo mirar las comprensiones de los estudiantes sobre un objeto matemático y cómo hacer uso del EOS para alcanzar dicho fin. A continuación se presenta algunas investigaciones que han optado por el uso del EOS como metodología de investigación apropiada para el análisis de las relaciones que emergen en el aula de clases y las comprensiones de los estudiantes sobre un objeto matemático, específicamente muestran como han hecho uso de la función semiótica para identificar las comprensiones de los objetos matemáticos por parte de los sujetos a partir de las relaciones que los estudiantes establecen en las producciones escritas y orales. Un ejemplo de ello, es el estudio realizado por (Montiel y Wilhelmi, 2017), quienes hacen uso de las funciones semióticas con la finalidad de usar categorías para identificar tanto el aprendizaje matemático como los conflictos de significado sobre el contenido matemático. En este trabajo se muestra cómo en el contexto de dos cursos universitarios que integran matemáticas y música se utiliza el EOS y exponen la efectividad de este enfoque en lo que se refiere al componente de las funciones semióticas como marco para entender el alcance de cursos integrados de matemáticas y música.

Por su parte, (Contreras, Molina, Godino, Rodríguez y Arteaga 2017), dentro del marco del EOS, muestran la importancia de tener un conocimiento profundo en la interpretación de gráficos estadísticos, ya que son un elemento importante en la cultura o alfabetización estadística y como un tipo de resumen que permite interpretar y evaluar críticamente la información estadística de forma visual. Estos autores plantean que se requiere un conocimiento profundo de su problemática educativa ya que un gráfico sesgado o mal construido provocará que la información no llegue de forma correcta al ciudadano que debe interpretar los datos estadísticos.

Por otro lado, (Distéfano, Aznar y Pochulu, 2016), en una investigación desarrollada con estudiantes universitarios de primer año de diversos programas o carreras, se aportan evidencia sobre funciones semióticas ligadas a la construcción de significado de algunos símbolos matemáticos. En relación a las respuestas dadas por los estudiantes al instrumento aplicado, y como una herramienta para su análisis, definieron una serie de funciones semióticas que hacen referencia a los aspectos nominal, sintáctico y semántico de los símbolos matemáticos. Estas funciones derivan de las prácticas involucradas en la construcción de significado y permiten describir y caracterizar el proceso de construcción de significado de los símbolos algebraicos, evidenciando la red de relaciones que pone en juego un estudiante cuando lleva a cabo procesos cognitivos involucrados en la significación de expresiones simbólicas.

Estas investigaciones muestran cómo la función semiótica ha sido utilizada para el análisis de los significados y comprensiones por parte de los estudiantes como producto de las prácticas educativas realizadas. En este sentido, la función semiótica permite comprender las relaciones que los sujetos establecen de la probabilidad por medio de las producciones de los estudiantes y la práctica

¹ El sentido depende de cada sujeto, por ejemplo, el *sentido* que otorgan los estudiantes a una representación semiótica que podrá ser evidenciado en el criterio o regla de correspondencia que se establece en una función semiótica.

matemática que realizan y con ello establecer los significados que le otorgan a este objeto matemático. Por lo tanto, cuantas más relaciones establezcan o mayor sea el número de relaciones o funciones semióticas establecidas por los estudiantes, mayor será la comprensión del objeto matemático.

3. Problema y marco teórico

Según (Godino 2003), la función semiótica se puede entender como una interpretación del signo Peirceano, el cual está formado por la triada: *Representamen*, o signo en sí mismo, *Objeto* e *Interpretante*. Tal y como es definido por Peirce:²

(... cualquier cosa que por una parte está determinada por un Objeto y por otra parte determina una idea en la mente de una persona; estas determinaciones son tales que la última, a la que denomino el Interpretante del Signo, se ve determinada de manera mediata por el Objeto del Signo. Un Signo, por consiguiente, tiene una relación triádica con su Objeto y con su Interpretante). (Peirce, 1960, p. 276)

Teniendo como base esta relación triádica del signo, cobra sentido preguntarse sobre cuál es el signo, el objeto y el interpretante en una función semiótica. Según (Godino, 2003) en una función semiótica intervienen tres elementos, el primero de ellos es la *Expresión* (objeto inicial, considerado frecuentemente como el signo), el segundo es el *Contenido* (objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor) y un tercer elemento hace referencia al *Criterio o regla de correspondencia*, esto es, un código interpretativo que regula la correlación entre los planos de expresión y contenido, estableciendo el aspecto o carácter del contenido referido por la expresión. Teniendo en cuenta estos aspectos, la función semiótica es entendida como una correspondencia entre un objeto antecedente (expresión - significante) y un consecuente (contenido - significado) establecida por un sujeto (persona o institución) según un criterio o regla de correspondencia. Desde esta perspectiva, el interpretante sería la regla de correspondencia entre el *representamen* y el *objeto*, establecida por una persona, o en el seno de una institución, en el correspondiente acto interpretativo (significados personales o institucionales).

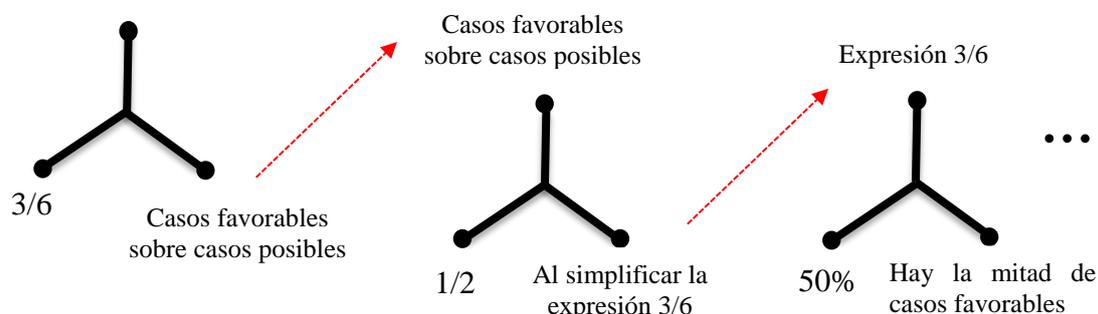
Según (Godino, 2003) toda entidad o cosa a la cual nos referimos, participa de un proceso de semiosis, interpretación, o juego de lenguaje, y a su vez, esta interpretación o juego de lenguaje desempeña el papel de significante, significado o interpretante. Por otro lado, dicho autor manifiesta que los propios sistemas de prácticas operativas y discursivas son objetos y pueden ser componentes de la función semiótica. De este modo se modeliza cualquier uso que se pueda dar a la palabra significado.

Cada función semiótica lleva consigo un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento (Godino, Batanero y Font 2008). En el siguiente esquema se presenta cómo sería un posible acto en el proceso de semiosis, del objeto matemático Probabilidad simple.

² La cita original fue publicada en: Peirce, C.S. (1906). Pragmatism in retrospect: A last formulation. En J. Buchler (ed.), *Philosophical writings of Peirce* (1955) (pp. 269-289). Nueva York: Dover Publications. (Cita traducida por Sáenz-Ludlow, .2016)



Probabilidad “Lanzar un dado y obtener un número par”



Esquema N°1. Proceso de semiosis del signo según Peirce. Situación de probabilidad simple

Como se había mencionado anteriormente, hablar de conocimiento equivale a hablar del contenido de una o de varias funciones semióticas que se forman en ese proceso de semiosis y como resultado de ello, se encuentra una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre los diversos tipos de objetos introducidos en el marco del EOS. Las prácticas en juego en una situación de probabilidad en la cual se analicen las funciones semióticas establecidas y los distintos tipos de objetos primarios y secundarios introducidos en el EOS, pueden ser muy interesantes para identificar el conocimiento y los significados otorgados por los estudiantes al enfrentarse a una tarea matemática.

Por otro lado, (Godino y Batanero, 1994) reconocen que los significados otorgados por una persona posibilitan una serie de funciones semióticas, mediante un criterio o regla de correspondencia. En una función semiótica, el contenido de esta puede ser un objeto primario, es decir, un término, expresión, gráfico, entre otros elementos lingüísticos, una situación problema, un concepto o definición, una acción u operación, un algoritmo o procedimiento, una argumentación, etc., elementos que son considerados en el enfoque ontosemiótico como el contenido de la función semiótica. Según Godino (2003), en la función semiótica se puede identificar diversos tipos de significados elementales, teniendo en cuenta la naturaleza diversa del contenido de la función; estos tipos van a depender del criterio o regla de correspondencia que se establezca; dichos criterios posibilita hacer la siguiente clasificación: 1) Se habla de un *significado lingüístico*, cuando el objeto final, o contenido de la función semiótica, es un término, expresión, gráfico u otro elemento lingüístico; 2) Se habla de un *significado situacional*, cuando el objeto final es una situación problema; 3) Se dice que una correspondencia semiótica es de *tipo conceptual* cuando su contenido es un concepto-definición; 4) Se habla de un *significado proposicional*, cuando el contenido es una propiedad o atributo de un objeto; 5) Diremos que una función semiótica es de *tipo actuativo* cuando su contenido es una acción u operación, tal como un algoritmo o procedimiento; y 6) Se habla de un *significado argumentativo*, cuando el contenido de la función semiótica es una argumentación.

Estos tipos de funciones semióticas serán la base para analizar las relaciones que establezcan los estudiantes por medio de los criterios o reglas de correspondencia que los sujetos usan para establecer las diferentes relaciones, que será un código interpretativo que regula la correlación entre los planos de expresión y contenido. Por otro lado, el uso de la función semiótica no solo permite analizar las relaciones que establece el estudiante por medio de las producciones que estos realizan, sino también, mostrar que los estudiantes establecen relaciones que antes no establecían.

En relación con la situación, relacionada con encontrar la probabilidad de que “al lanzar un dado se obtenga un número par”, trabajada con 20 estudiantes de grado décimo, la mayoría de ellos reconocen que $\frac{3}{6}$ representa dicha probabilidad, al menos quienes reconocen que la probabilidad de un evento se puede obtener haciendo uso de la definición de probabilidad como la relación casos posibles sobre casos probables, y varios de ellos aceptan también como respuesta la expresión $\frac{1}{2}$; sin embargo, no todos reconocen que la fracción $\frac{4}{8}$ también puede representar la probabilidad pedida, incluso por parte de quienes reconocen que $\frac{4}{8}$ se puede obtener de la fracción $\frac{1}{2}$ mediante un tratamiento de dicha expresión.

Ahora bien, haciendo uso de conceptos propuestos desde la Teoría de Registros de Representación Semiótica (Duval, 2004), particularmente las transformaciones semióticas de *tratamiento*, mediante las cuales una representación se transforma en otra en el mismo registro de representación y las de *conversión*, mediante las cuales se produce otra representación en un registro distinto al de la representación inicial, el análisis propuesto en este trabajo, haciendo uso de las funciones semióticas, permite mostrar que no sólo las transformaciones semióticas de conversión generan dificultades en la comprensión de conceptos matemáticos, sino que las de tratamiento también pueden generar dificultades en dicha comprensión, como se evidencia en el análisis de este trabajo, en el cual los estudiantes no logran ver que los $\frac{4}{8}$ es una expresión que puede representar la probabilidad de que al lanzar un dado se obtenga un número par. Es importante reiterar que los tratamientos pueden generar dificultades en la comprensión del objeto matemático y no sólo la conversión, como lo reconoce (Duval, 1996), quien plantea que una de las operaciones cognitivas que presenta mayor dificultad para que un sujeto acceda a una verdadera comprensión es la conversión. De hecho, este autor centra la atención en la conversión como aquella operación mental que genera mayor dificultad en el aprendizaje de las matemáticas. Este fenómeno en torno a los tratamientos es descrito por (D’Amore 2006):

El mismo estudiante que realiza correctamente transformaciones semióticas de tratamiento pasando de una representación semiótica R_{mq} a la representación R_{nq} (con $m \neq n$)³ de un objeto matemático O , por tanto conservando el registro semiótico r_q , atribuye significados diversos a las dos escrituras, hecho que evidencia que el significado asignado intuitivamente al objeto O cambia, en la mente de un estudiante, por tratamiento semiótico. Se necesita, claramente, una puesta en juego de investigaciones que profundicen y clarifiquen el fenómeno, en una óptica antropológica o, mejor aún, pragmática.

La documentación de este fenómeno, se inicia mediante la realización de dos trabajos significativos, el primero de ellos, desarrollado por (Santi, 2011), quien realiza un estudio de la tangente y de secuencias figúrales y con ello muestra las dificultades de los estudiantes de secundaria en atribuir sentido a las diferentes representaciones de un objeto matemático. El segundo trabajo es realizado por (Rojas, 2012), quien trabaja con tres contextos claramente diferenciados, relacionados con probabilidad, aritmética generalizada y cónica. Estas investigaciones, reportan que una de las complejidades se relaciona con la transformación semiótica de tratamiento, que puede generar el cambio de sentido asignado a un mismo objeto matemático o, como lo denomina (Rojas, 2014), la no articulación de sentidos asignados a representaciones semióticas de un mismo objeto matemático.

³ D’Amore propone la siguiente notación: r^m =df registro semiótico ($m = 1, 2, 3, \dots$); $R_{mi}(A)$ =df representación semiótica i -ésima ($i = 1, 2, 3, \dots$) de un contenido A en el registro semiótico r^m . Tomado de la línea de investigación Influencia de las Transformaciones Semióticas en las Construcciones del Cognitivo. http://die.udistrital.edu.co/lineas/influencia_transformaciones_semioticas_en_construcciones_del_cognitivo



En relación con el ejemplo presentado anteriormente, en el que se les preguntaba a los estudiantes cuál era la probabilidad de que al lanzar un dado se obtuviera un número par, los cambios de sentidos o la no articulación de sentidos hacen referencia a que muchos estudiantes, a la expresión “probabilidad de que al lanzar un dado se obtenga un número par” le asignan como contenido $1/2$ (sentido 2), obtenido mediante una simplificación (tratamiento) del contenido inicial $3/6$ (sentido 1); al preguntarles si la expresión $4/8$ también representa la probabilidad pedida, aunque varios de ellos reconocían la equivalencia entre $4/8$ y $1/2$, decían que la fracción $4/8$ no representaba la probabilidad pedida, es decir, no articulaban los sentidos asignados. Los resultados obtenidos en estas investigaciones dejan en evidencia que no sólo la conversión se vincula con los problemas en el aprendizaje de los objetos matemáticos, sino que las transformaciones de tratamiento generan dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En efecto, algunos estudiantes ven como objetos distintos dos representaciones de un mismo objeto matemático obtenidas por transformaciones semióticas de tratamiento.

En la investigación realizado por (Rojas, 2012), se hizo uso de instrumentos de indagación para reconocer las diferentes relaciones que establecen estudiantes de grados 9° y 11° (14-17 años) al abordar situaciones asociadas con diversos objetos matemáticos, entre ellos la de probabilidad, dificultad que fue inicialmente reportada por (D’Amore, 2006), en una exploración realizada con estudiantes de quinto de primaria y profesores en ejercicios en Italia. Uno de los instrumentos diseñados por (Rojas, 2012) es el siguiente:

Situación:

1. *¿Cuál será la probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un número par?*
2. *¿Existe(n) otra(s) manera(s) de expresar la probabilidad obtenida en el punto anterior?*
 - (a) *Marque con una X su respuesta Sí () No ()*
 - (b) *En caso afirmativo muestre cuál(es) sería(n) esa(s) manera(s). En caso negativo explique por qué no existiría otra manera de expresar dicha probabilidad.*
3. *¿Puede afirmarse que la fracción $4/8$ es la probabilidad de que lanzado un dado se obtenga un número par?*
 - (a) *Marque con una X su respuesta Sí () No ()*
 - (b) *Justifica tu respuesta.*

En busca de complementar la documentación sobre este fenómeno, en este trabajo se hace uso de la función semiótica, asumiéndola como lo plantea (Godino, Batanero y Font, 2008) que hablar de conocimiento equivale a hablar del contenido de una función semiótica (o varias), resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre los diversos tipos de objetos introducidos en el marco del EOS (Godino, Batanero y Font, 2008). Estos objetos hacen referencia a un término, expresión, gráfico, una situación problema, un concepto o definición, una acción u operación, un algoritmo o procedimiento, una argumentación, etc.

La función semiótica se convierte en herramienta potente para analizar las relaciones que se pueden establecer de un objeto matemático, puesto que permite identificar y explicar los procesos de comunicación y significación implicados; por tal razón, la función semiótica, junto a la clasificación que se hace dentro del EOS, resulta fundamental en el análisis que se ha realizado, el cual se presenta en la siguiente sección.

4. Metodología

Este trabajo fue realizado durante el segundo semestre del año 2016, participaron 20 estudiantes de grado noveno de bachillerato en una institución educativa, de carácter oficial, en Bogotá.⁴ Quienes oscilaban entre 15 y 16 años. Se eligió trabajar con este grado debido a que tienen un dominio más avanzado de los objetos matemáticos ya que en cursos anteriores habían trabajado la probabilidad. El desarrollo del trabajo cuenta con dos fases: En la primera, se presentó a los estudiantes una situación de probabilidad simple, dónde se pide hallar la probabilidad de que al lanzar un dado se obtenga un número par. El objetivo de aplicar el instrumento era evidenciar las diferentes relaciones que establecen los estudiantes (expresión, contenido, criterio de correspondencia).

Uno de los objetivos que se buscaban en el diseño del instrumento era evidenciar si los estudiantes reconocían la fracción $1/2$ como la probabilidad pedida y el hecho de que por medio de la simplificación de la fracción $3/6$ se obtiene la fracción $1/2$, puede ser interpretado como las dos opciones posibles (par o impar, según el criterio de correspondencia). Otro objetivo era comprobar si los estudiantes reconocen la fracción $4/8$, como una expresión que puede representar la probabilidad pedida, lo que requiere que el estudiante se desligue de un contexto práctico de lanzar físicamente el dado. Para alcanzar dicho objetivo el instrumento estaba compuesto por una situación, en la cual se pedía calcular y justificar la probabilidad de que lanzar un dado se obtuviera un número par; así mismo, se indagaba si la expresión $1/2$ podía representar dicha probabilidad o si la expresión $4/8$, también, podría representar dicha probabilidad y en ambos casos se pedía justificar la respuesta.

Las categorías de análisis se componen de dos aspectos, de un lado, las funciones semióticas definidas a partir de la teoría que hacen referencia a una relación de tipo lingüística, situacional, conceptual, proposicional, actuativa y argumentativa que se definen en el marco teórico de este documento. Por otro lado, las funciones semióticas emergentes que corresponden a las relaciones que establecen los estudiantes entre un antecedente (llamado también la expresión o signifiante) y un consecuente (llamado también contenido o significado).

En la segunda fase, se realizaron cuatro entrevistas semi estructuradas de manera individual, basadas en la tarea propuesta en el instrumento, con antelación se pensó en algunas preguntas relacionadas con la manera o forma en que los estudiantes calcularon la probabilidad y en cómo calcularían la probabilidad si el dado tuviera más caras, así mismo, contrastar aquello que habían escrito inicialmente en el instrumento. Para la elección de los estudiantes se tuvo en cuenta aquellos que calcularon la probabilidad de manera correcta, pero que no aceptaban que la probabilidad de lanzar un dado y obtener un número par, podría ser representada por medio de la expresión de $4/8$

5. Resultados

Inicialmente se presenta un fragmento de una entrevista de cuatro que se realizaron con el propósito de indagar, con cierto detalle, el razonamiento de los estudiantes. En el siguiente fragmento se evidencia el tipo de relación que establecen los estudiantes (*Lingüística, Situacional, Conceptual, Proposicional, Actuativa, Argumentativa*). Una función semiótica puede ser de tipo situacional, conceptual y proposicional, puesto que la clasificación va a depender del criterio de correspondencia. Por ejemplo, se puede dar el caso que algunos estudiantes lleguen a la fracción $1/2$, pero dicha fracción puede significar cosas diferentes para los estudiantes, por un lado, puede ser interpretada como la

⁴ La institución educativa se encuentra ubicada en la localidad de Usme, al sur de la ciudad de Bogotá-Colombia.



Las funciones semióticas como herramienta de análisis en la comprensión de objetos matemáticos. Una situación de probabilidad simple

G. Mejía Osorio

mitad de casos favorables o puede ser interpretada como la simplificación de la fracción $3/6$, en este caso, se tiene una misma expresión, pero diferente criterio de correspondencia que hace que su clasificación cambie. En el primer caso correspondería a una función de tipo conceptual (Se evidencia que los estudiantes se desligan del comportamiento del dado y se fijan en las opciones posibles), mientras que en el segundo caso se tendría una función semiótica de tipo actuativa puesto que los estudiantes recurren a un algoritmo o al procedimiento de simplificación de fracciones.

En el siguiente ejemplo, se evidencia que el estudiante establece tres funciones semióticas; en un inicio establece una relación de *tipo conceptual*, en el caso particular del contenido de la función semiótica hace referencia a la definición clásica de probabilidad “Casos favorables sobre casos posibles” tal y como se evidencia en la explicación 1; al indagar qué sí la fracción $4/8$ puede representar la probabilidad de que al lanzar un dado se obtenga un número par se puede establecer una relación de *tipo situacional*, puesto que prima el comportamiento del dado (ver explicación 3), se evidencia que $4/8$ no se interpreta como medida de la probabilidad de obtener par al lanzar un dado en el contexto práctico (lanzar un dado de seis caras), porque la regla de correspondencia que se aplica está ligada a la estructura de un dado habitual (ver explicación 4).

TIEMPO	ENTREVISTA
00.01-00.09	Entrevistadora: Buenos días. Brayán me gustaría que me dijera por ejemplo cómo calculó la probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un número par.
00.10-00.31	Brayan: Profe, pues básicamente deduje que un dado tiene seis caras, <i>tres de ellas van a ser números pares y tres de ellas van a ser números impares</i> , entonces la probabilidad es de tres sobre seis, es decir, <i>tres sextos</i> . [Explicación 1]
00.32-00.46	Entrevistadora: Bueno, muy bien, tres sextos. Ahora me gustaría que me explicara por ejemplo en este segundo punto si hay otras maneras de expresar la probabilidad. Usted escribió un medio, cómo obtuvo esta expresión.
00.47-01.08	Brayan: <i>El un medio lo saque de simplificar la fracción anteriormente nombrada, le saque tercera a tres que es uno y tercera de seis es dos</i> . [Explicación 2]
01:09-01:26	Entrevistadora: OK, y aquí en este tercer punto (señala el instrumento). Usted me escribió que cuatro octavos no representan la probabilidad de que al lanzar un dado se obtenga un número par, porque la probabilidad es de un medio; quisiera que me explicara por qué cuatro octavos no representan esa probabilidad.
01:27-01:50	Brayan: Porque mmm [...]. Profe volvemos a grabar la entrevista.
01.51-01:52	Entrevistadora: No, sigamos no importa que se demore pensando.
01.53-02:41	Brayan: Pues como le decía antes profe, <i>un medio se obtiene de tres sextos y cuatro octavos no va a dar, porque al momento de hacerlo no va dar, porque seis indica las seis caras del dado</i> . [Explicación 3]
02:42-02:45	Entrevistadora: ¿Y si yo tengo un dado de ocho caras?
02:46-02:55	Brayan: <i>Ahí sí, porque el dado tendría ocho caras</i> . [Explicación 4]
02:56-03.07	Entrevistadora: Y si yo tengo un dado de doce caras... Miremos este dado [l muestra un dado de 12 caras]. ¿Cuál sería la probabilidad que al lanzar el dado se obtenga un número par?
03.08-03.20	Brayan: Ahí, eh... <i>seis de doce</i> .
03:21-03:27	Entrevistadora: OK, usted me decía que si yo simplifico tres sextos obtengo un medio, ahora ¿si yo simplifico seis doceavos?
03:28-03:54	Brayan: Tercera de seis es dos y tercera de doce es cuatro.
03:55-03:56	Entrevistadora: ¿No se puede simplificar más?
03:57-04:07	Brayan: Sí, segunda de dos 1 y segunda de cuatro 2. Mmm. Me da un medio.

04:08-04:10	Entrevistadora: Ahora. ¿Si simplifico cuatro octavos?
04:11-04:24	Brayan: Pues segunda de cuatro 2 y segunda de ocho 4. Ahora segunda de dos 1 y segunda de cuatro 2. ¡También me da un medio!
04:25-04:30	Entrevistadora: Ahh... ¿Entonces podría representar la probabilidad que al lanzar un dado de seis caras se obtenga un número par?
04:31-04:36	Brayan: Sí también, pues todas dan un medio, entonces sí se puede.
04:47-04:49	Entrevistadora: OK. Muchas gracias Brayan.

En la explicación 2, se evidencia que en este caso el estudiante simplifica la fracción $3/6$ y llega a la fracción $1/2$, este procedimiento permite inferir que el estudiante aplicó un algoritmo o procedimiento, siendo el criterio de correspondencia el que permite clasificarla en tipo de **función activa**. Por otro lado, en el anterior fragmento se evidencia que se acepta la fracción $1/2$, como medida de la probabilidad pedida (un dado seis, de ocho o doce caras) y por medio de la simplificación de estas fracciones el estudiante prueba la equivalencia de las expresiones, argumentando que se requiere cambiar de un contexto práctico de lanzar físicamente el dado a uno más formal que permitiría cambiar el criterio o regla de correspondencia que cambia en un contexto práctico (ver explicaciones 3 y 4). En el caso de este estudiante se evidencia que establece dos funciones semióticas; inicialmente una de **tipo situacional**, en la que asume como criterio de correspondencia el comportamiento del dado y posteriormente otra, de **tipo activa**, en la cual el criterio de correspondencia es un procedimiento, mediante el cual la fracción $1/2$ es obtenida haciendo uso de la simplificación de fracciones.

A continuación, se presenta las diferentes relaciones que establecen los estudiantes en la resolución de esta situación de probabilidad simple, mediante el análisis de las funciones semióticas implicadas e identifican los significados personales asignados a la probabilidad, que corresponden a las funciones emergentes que surgieron al pedir el cálculo de la probabilidad de que al lanzar un dado se obtenga un número par.

FUNCIÓN SEMIÓTICA EMERGENTE	TIPO DE FUNCIÓN SEMIÓTICA
FS1: La expresión $3/6$ y el contenido de la función semiótica “ <i>existe tres números impares y tres números pares de las seis caras del dado</i> ”	Este tipo de relación se clasifica en un tipo de función situacional , puesto que para algunos estudiantes el criterio de correspondencia estaba ligado al contexto práctico de la situación o al comportamiento del dado.
FS2: La expresión $3/6$ y el contenido de la función semiótica “ <i>Casos favorables sobre casos posibles</i> ”	Los estudiantes establecen un criterio de correspondencia hace referencia a la definición clásica de probabilidad “ <i>Casos favorables sobre casos posibles</i> ”, lo cual permite clasificarla en un tipo conceptual .
FS3: La expresión el “ <i>El dado tiene tres números impares y tres números pares</i> ” y el contenido de la función semiótica “ <i>Casos favorables sobre casos posibles</i> ”	Esta función semiótica se clasifica se clasifica en un tipo lingüística , puesto que los estudiantes hacen uso del lenguaje natural para calcular la probabilidad pedida, siendo este criterio de correspondencia predominantes en el cálculo de la probabilidad.
FS4: La expresión 50% y el contenido de la función semiótica “ <i>La mitad de números impares y la mitad de números pares</i> ”	Dado que la expresión 50% corresponde a la mitad de casos favorables este criterio de correspondencia permite clasificar la función en un tipo situacional . Dentro de las justificaciones, dos de los estudiantes argumenta que el dado tiene los números 1, 2, 3, 4, 5, y 6; donde tres son pares y tres impares y el otro estudiante manifiesta que es la mitad de las posibilidades.



Las funciones semióticas como herramienta de análisis en la comprensión de objetos matemáticos. Una situación de probabilidad simple

G. Mejía Osorio

FS5: La expresión $1/2$ y el contenido de la función semiótica “La mitad de casos favorables”	En el caso de $1/2$ se les pregunta a los estudiantes si estas expresiones podrían representar la probabilidad de lanzar un dado y obtener un número par. Caso en el cual se ubican las funciones semióticas como conceptual , porque en las respuestas de los estudiantes se refiere a las dos opciones que tienen luego de ser lanzado el dado. (Par o impar).
FS6: La expresión $1/2$ y el contenido de la función semiótica “Simplificación de la fracción $3/6$ ”	Algunos estudiantes manifiestan que al simplificar la expresión $3/6$ se obtiene $1/2$, lo cual nos permite también ubicar esta función semiótica de tipo activo , debido a que los estudiantes se están refiriendo al algoritmo de simplificar una expresión.
FS 7: La expresión $4/8$ y el contenido de la función “Equivalencia a la fracción $1/2$ ”	Esta función semiótica se ubica de tipo activa por tratarse de una expresión que se obtiene por medio de un algoritmo, los estudiantes que establecen esta función semiótica simplifica la fracción $4/8$ y llegan a la fracción $1/2$ lo cual les permite reconocer la equivalencia de las fracciones. La mayoría de los estudiantes manifiestan que la expresión $4/8$ no podría representar la probabilidad pedida, puesto que el dado solo tiene seis caras y no ocho. Así mismo, esta relación se clasifica en una función conceptual puesto que, los estudiantes en el contenido hacen uso de la definición clásica de la probabilidad.

Lo anteriormente planteado, deja en evidencia que si bien algunos estudiantes representan la probabilidad pedida por medio de un porcentaje en relación a los casos favorables, también la expresan por medio del lenguaje natural en relación a los casos favorables sobre los casos posibles, e incluso reconocen la equivalencia entre diferentes fracciones, aplicando un algoritmo conocido, no reconocen que dichas expresiones se constituyen en distintas maneras de representar un mismo objeto matemático, o encuentran dificultades para hacerlo.

6. Consideraciones finales

Los datos presentados y los resultados obtenidos dan cuenta que las funciones semióticas se constituyen en una herramienta teórica y metodológica adecuada para analizar los significados y comprensiones logradas por los estudiantes con respecto a los objetos matemáticos trabajados, en tanto que ponen en evidencia las relaciones que éstos establecen, o pueden establecer, entre un antecedente (expresión) y un consecuente (contenido) asociados a dichos objetos por medio de un criterio de correspondencia.

Las respuestas presentadas por los estudiantes en las entrevistas realizadas permiten describir y caracterizar, de manera detallada, la red de relaciones que se ponen en juego en un proceso de significación de una situación de probabilidad simple. A partir del trabajo realizado en la entrevista, se evidenció el establecimiento de nuevas relaciones por parte del estudiante, es decir, el análisis mediante las funciones semióticas permitió reconocer que los estudiantes establecieron relaciones que antes no reconocían, por ejemplo, permitió que dedujeran relaciones entre las expresiones $1/2$ y $4/8$, reconociendo que son sintácticamente equivalentes en tanto una de ellas se obtiene mediante simplificación de la otra, además de reconocer que la probabilidad pedida se puede expresar por medio de cualquiera de ellas.

Las funciones semióticas emergentes (Se relacionan en la página 12 de este documento) ponen en evidencia que desde la enseñanza de la probabilidad falta trabajar un contexto más formal que les posibilite asumir que existen otras expresiones que le permite representar la probabilidad pedida, por

ejemplo las expresiones $1/2$, o $4/8$, o 50% requieren cambiar de contexto a uno más formal, desligado del contexto práctico de lanzar físicamente el dado u otro evento; así mismo, el desligamiento del contexto físico en el que se enmarca una situación, permite que los estudiantes tengan otra mirada del objeto matemático. También en los resultados encontrados se logró evidenciar que los estudiantes que llegaron a la fracción $1/2$, fueron aquellos estudiantes que se desligaron del comportamiento del dado.

Se confirma así el hallazgo reportado inicialmente por (D'Amore, 2006), con respecto a que no sólo la conversión es una operación cognitivamente compleja que genera dificultades, sino que la transformación de tratamiento también puede resultar compleja y ser fuente de dificultades para la comprensión de objetos matemáticos. Esta complejidad nos lleva a reflexionar sobre el siguiente hecho de tipo cognitivo: El reconocer la equivalencia de dos expresiones, desde lo sintáctico, no posibilita necesariamente la articulación de los sentidos asignados a tales expresiones y, por tanto, no garantiza el reconocimiento de su equivalencia desde lo semántico. En el ejemplo planteado anteriormente, varios estudiantes dieron cuenta de la dificultad para identificar dos fracciones equivalentes como representaciones de la probabilidad pedida.

En la investigación realiza por (Rojas, 2012, 2014), también se plantea como una dificultad asociada al hallazgo antes reportado el “*anclaje*” a la situación dada en la tarea, en este caso del lanzamiento del dado, en donde los estudiantes no aceptan la equivalencia de las expresiones, la equivalencia de las fracciones, puesto que, el contexto que enmarca la situación, juega un papel importante a la hora de establecer un criterio de correspondencia entre una expresión y un contenido, dejando abierto un interrogante con respecto a las causas de dicha dificultad. En el caso de calcular la probabilidad al lanzar el dado, tanto el hecho que el dado tenga seis caras, como la interpretación de la probabilidad generada por la definición “casos favorables sobre casos posibles”, hacen que la fracción obtenida ($3/6$) difícilmente se independice de la situación concreta (el dado tiene 6 caras y 3 de estas tienen números pares), y aunque conduce a reconocer la fracción $3/6$ como la probabilidad pedida, no por ello reconoce en fracciones equivalentes representaciones del mismo objeto matemático, aunque logre realizar adecuadamente simplificaciones de estas.

Bibliografía

- Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: Un desafío educativo. En P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar*. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales.
- Contreras, J., Molina-Portillo, E. Godino, J. D., Rodríguez-Pérez, C. y Arteaga, P. (2017). Funciones semióticas críticas en el uso de diagramas de barras por los medios de comunicación. En J. Contreras, P. Arteaga, G. Cañadas, M. Gea, B. Giacomone y M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>
- D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Relime*, 9(4), 177-196.
- Distéfano, M.; Aznar, M, A; Pochulu, M. (2016). Prácticas Matemáticas y Funciones Semióticas en la Significación de Representaciones Simbólicas. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 11(2), 1-16
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, 5(1), 37–65.
- Duval R. (1996). Quel Cognitif Reenir en Didactiques des Mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 349-382. Recuperado de <http://rdm.penseesauvage.com/Quel-cognitif-retenir-en.html>



- Duval, R. (2004). *Semiósis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle.
- Duval, R y Sáenz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. Bogotá: Editorial. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Revista EMA*, 7(2), 127-170.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355. Recuperado de <http://rdm.penseesauvage.com/RDM-Vol-14-3.html>
- Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. (Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra) Granada: Universidad de Granada. Recuperado de <https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf>
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática*. (Trabajo síntesis de publicaciones). Granada: Universidad de Granada. Recuperado el 12 de agosto de 2011 de: https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf
- Ministerio de Educación Nacional, (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas*. Bogotá. Colombia: MEN.
- Ministerio de Educación Nacional, (2006). *Estándares Básicos de calidad. Área de Matemáticas*. Bogotá, Colombia: MEN.
- Montiel, M. y Wilhelmi, M. R. (2017). Funciones semióticas para el análisis de procesos de estudio integrados de matemáticas y música en la universidad. En J. Contreras, P. Arteaga, G. Cañadas, M. Gea, B. Giacomone y M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/montiel_wilhelmi.pdf
- Peirce, C. (1960). *Collected papers of Charles Sanders Peirce, Vol. 2*. Cambridge (Mass.): Harvard University Press. Recuperado de <https://colorysemiotica.files.wordpress.com/2014/08/peirce-collectedpapers.pdf>
- Rojas, P. (2012). *Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos*. Tesis doctoral, Facultad de Ciencias y Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Recuperado de <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/Phd/Rojas%20Garzon/Tesis%20Pedro%20Rojas.pdf>.
- Rojas, P. (2014). *Articulación de saberes matemáticos: representaciones semióticas y sentidos*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Recuperado de <http://die.udistrital.edu.co/>
- Santi, G. (2011). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: a comparison between semiotic perspective* (tesis de doctorado). Università Di Palermo. Italia

Gladys Mejía Osorio. Licenciada en E.B.E. Matemáticas (Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia), Magíster en Docencia de las Matemáticas (Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia). Estudiante del Doctorado Interinstitucional en Educación, énfasis Educación Matemática, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá. Este escrito es producto del trabajo de investigación cuyo objetivo radica en documentar las causas de la no articulación de sentidos asignados a objetos matemáticos, dirigido por el Dr. Pedro Javier Rojas Garzón. Nacida en Palmira Valle. Residente en Bogotá. gladys6m@hotmail.com