NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 99, noviembre de 2018, páginas 7-26

Situación de aprendizaje sobre conceptos involucrados en el estudio de funciones

Betina Williner (Universidad Nacional de La Matanza. Argentina)

Fecha de recepción: 13 de marzo de 2018
Fecha de aceptación: 9 de julio de 2018

Resumen

En este artículo exponemos el diseño y los resultados de la implementación de una situación de aprendizaje sobre los conceptos involucrados en el estudio de funciones, es decir: intervalos de crecimiento, de decrecimiento y extremos relativos de una función. El objetivo principal de la misma es llevar al alumno a lograr descubrir en forma autónoma la relación entre dichos conceptos y el signo de la derivada. Para elaborarla tomamos como base la variación y la transición entre registros de representación. Mediante la lectura de gráficos los estudiantes pudieron identificar dichos conceptos, con el registro numérico lograron una aproximación a la relación mencionada y luego a través del registro analítico consiguieron formalizarla. Una de las dificultades radicó en expresar verbalmente todo lo que estaban obteniendo.

Palabras clave Situación de aprendizaje -variación – registros - Cálculo

Title **Learning situation about the concepts involved in functions study**

Abstract

In this article, we present the design and the results of an implementation of a learning situation about the concepts involved in the function studies: growth and decrease intervals, and relative edges of a function. The main objective of the learning situation is to lead the student to autonomously discover the relation between those concepts and the derivative sign. For this to happen, we consider the variation and transition between representation registers. By reading graphs, students could identify these concepts, with the numerical register they achieved an approximation to the mentioned relationship and then through the analytical register they were able to formalize it. One of the difficulties was in verbally expressing everything they were learning.

Keywords Learning situation – variation – registers - Calculus

1. Introducción

Es de dominio público en la comunidad de Educación Matemática los resultados de diversas investigaciones que dan cuenta que los alumnos, luego de un curso de Cálculo, no logran una comprensión satisfactoria de conceptos fundamentales como límite, derivada e integral (García y Dolores, 2016; Moreno, 2005; Salinas y Alanís, 2009).

La enseñanza tradicional universitaria se fundamenta en la transmisión de conocimientos basados en algoritmos y "recetas" y se deja en segundo plano la comprensión de ideas, nociones y conceptos. A esto se suma que se tiende a evaluar competencias algorítmicas y algebraicas, entrando así en un círculo vicioso: "para tener niveles aceptables de éxito, se evalúa aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, y esto es a su vez considerado por los estudiantes como lo esencial, ya que es lo que se evalúa" (Artigue, 1995, p. 97). Autores como Vrancken (2011), García (2011), Cuevas, Rodríguez y González (2014), reafirman esta situación señalando que se logra un dominio razonable de técnicas para calcular límites y derivadas, pero existen serias dificultades en comprender el significado de estos conceptos.

Como afirma Cantoral (2001, p.13) "la enseñanza tradicional de la matemática que en términos generales se realiza en el sistema educativo, permite satisfacer los reclamos del contrato didáctico, pero no parece lograr un verdadero aprendizaje entre los alumnos". Acordamos con el autor que el aprendizaje que nos ocupa es aquel que permite, a quien lo logra, transitar del conocimiento al saber. Es decir, del reconocimiento de un objeto matemático en situaciones didácticas simples a su evocación en situaciones no didácticas más complejas.

Nuestro contexto, la asignatura Análisis Matemático I de carreras de ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM), Argentina, no es ajeno a lo mencionado anteriormente. Tenemos evidencia de bajos índices de aprobación de la materia, altos niveles de abandono, dificultades para poder transferir lo aprendido a la resolución de problemas, etc.

Ante este problema concreto emprendimos una investigación con el objetivo de estudiar cómo mejorar la enseñanza y el aprendizaje de algunos conceptos matemáticos para lograr la comprensión de los mismos. Para llevarla a cabo elegimos los conceptos de intervalos de crecimiento de una función (IC), intervalos de decrecimiento de una función (ID) y extremos relativos de una función (ER) y su relación con el objeto matemático derivada. Esta elección estuvo basada en el hecho de que estos conceptos intervienen en la resolución de problemas de optimización. El planteo de este tipo de problemas es un primer paso al desarrollo de otros más complejos. Estos aportan una base teórica y metodológica que constituyen la antesala de plantear, analizar y desplegar diversas estrategias de solución en otro tipo de situaciones propias de la ingeniería. Pensamos que una base sólida sobre los conceptos mencionados favorece la resolución de estos problemas. Al respecto Baccelli, Anchorena, Moler y Aznar (2013) estudian las dificultades de los alumnos de ingeniería para resolver problemas de optimización. Los autores concluyen que es necesario impulsar estrategias de enseñanza que contribuyan a identificar y aprender los procedimientos involucrados en problemas de optimización tales como hallar extremos relativos de funciones. Otros autores como Cuesta, Jordi y Méndez (2010) utilizan actividades de enseñanza y aprendizaje que trabajan con ideas intuitivas de los estudiantes sobre situaciones de cambio a fin de que los mismos se familiaricen con la noción de puntos extremos de una función.

Con el fin de tomar distancia de la metodología expositiva tradicional optamos por el diseño e implementación de una situación de aprendizaje entendida, según García (2011), como un espacio de encuentro entre los alumnos y el profesor en el cual se coordinan acciones a través de un proceso de interpretación/comprensión logrando construir significados que comparten.

Por lo tanto, el objetivo de nuestra investigación es describir y analizar el aprendizaje sobre IC, ID y ER de una función mediante el estudio de las producciones realizadas por los estudiantes a partir de la implementación de una situación de aprendizaje basada en ideas variacionales y en el uso de diversos sistemas de representación.

El mismo se concreta en la siguiente pregunta de investigación: *¿Qué efectos tiene una situación de aprendizaje basada en ideas variacionales y diversos sistemas de representación en el aprendizaje de los conceptos de IC, ID y ER de una función?*

Tomando en cuenta lo descrito anteriormente mostramos en el presente trabajo parte de la situación de aprendizaje diseñada para llevar adelante la investigación y los resultados obtenidos en la implementación de la misma.

2. El Pensamiento y Lenguaje variacional

Nos encuadramos en la línea del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV), la cual estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los saberes matemáticos propios del cambio y la variación en el sistema educativo y en el medio social en el que se producen (Dolores, 2010).

Cantoral (2004) define al PyLV como una línea de investigación "que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida" (p. 1). Cantoral, Molina y Sánchez (2005) entienden por *cambio* "a la modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición que experimenta un cuerpo, un sistema o un objeto" (p. 464). A su vez la *variación* es la cuantificación del cambio, es comprender cómo y cuánto cambia el fenómeno estudiado.

La investigación desde este enfoque tiene una orientación múltiple: epistemológica debido a que se estudian procesos de cambio desde su construcción matemática y epistemológica; cognitiva porque analiza los procesos cognitivos que realizan los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones de variación. Tiene una faceta didáctica desde la cual los docentes diseñan situaciones de aprendizaje donde se usan procesos y actividades basadas en el cambio y una dimensión social, ya que estas situaciones se presentan en un contexto escolar determinado.

Además de un enfoque de investigación es una forma de pensamiento. Éste se identifica por el estudio de situaciones y fenómenos en donde está involucrado el cambio y donde la necesidad de predecir estados futuros motiva el estudio de la variación. El PyLV es parte del pensamiento matemático avanzado ya que combina la matemática de la variación con el pensamiento y a su vez, para su desarrollo, se deben dominar todos los conjuntos numéricos y los conceptos de variable, función, derivada e integral, usando varios registros de representación y un dominio elemental de la modelación (Cabrera, 2009; Dolores, Guerrero, Martínez y Medina, 2002).

No obstante, como señala Cantoral (2013) la construcción del concepto de variación es un proceso difícil y lento, que requiere la integración de representaciones simbólicas, numéricas, algebraicas, analíticas, visuales y gráficas. Duval (1998) las denomina registros de representación. Para este autor un registro es un sistema de signos utilizado para representar una idea u objeto matemático. Como indican Sánchez, García y Llinares (2008) la importancia del papel que tienen las representaciones estriba en que se asume que los significados de los conceptos son construidos a través del uso de signos. Al respecto, Posada y Obando (2006) manifiestan:

> El estudio de los conceptos, procedimientos y métodos que involucran la variación están integrados a diferentes sistemas de representación gráficas, tabulares, expresiones verbales, diagramas, expresiones simbólicas, ejemplos

> particulares y generales para permitir, a través de ellos, la comprensión de los conceptos matemáticos (p. 16).

3. La situación de aprendizaje

Entendemos por situación de aprendizaje un conjunto de secuencias de clase diseñadas, organizadas y articuladas en el tiempo con el fin de realizar un proceso de aprendizaje para un grupo determinado de alumnos. En nuestro caso pensamos el proceso de aprendizaje como un proceso de construcción de significados de una noción o nociones el cual se encuentra dentro de una situación específica en un contexto determinado y en el que los participantes tienen la oportunidad de interactuar. Una situación de aprendizaje es un diseño didáctico que involucra las actividades que realizan los alumnos, su organización, su puesta en marcha y su finalización.

La actividad que forma parte de una situación de aprendizaje no es cualquier actividad dentro del aula. Ésta debe comprometer al alumno en un rol activo provocando en él un desafío que pueda resolver por sí mismo. El estudiante tiene que entender la actividad planteada, las variables que intervienen y sus relaciones para poder formular un camino de solución sobre la base de sus conocimientos previos. La situación de aprendizaje debe lograr que el alumno sea capaz de explicar los resultados obtenidos o justificar la solución encontrada. Se puede contemplar también una etapa donde los estudiantes y el docente realicen la institucionalización de las nociones construidas. Esto último depende de los objetivos que se deseen alcanzar con la situación diseñada.

La situación de aprendizaje fomenta el trabajo independiente en un ambiente colaborativo, el alumno debe estar predispuesto a intercambiar ideas con sus compañeros, fundamentar las propias y recibir o solicitar orientaciones de parte del profesor. El docente no solamente participa en el momento del diseño, sino también de su puesta en marcha, implementación y finalización.

3.1. Consideraciones de diseño

Con el propósito de llevar al alumno a poder relacionar el comportamiento variacional de funciones con el signo de la derivada preparamos actividades que comprendían los conceptos de IC, ID y ER. El objetivo general de las mismas fue que al resolverlas se pueda dar respuesta a preguntas como ¿qué relación existe entre el signo de la derivada de una función en un intervalo y su crecimiento o decrecimiento en el mismo? ¿qué comportamiento tiene la derivada de una función en un extremo relativo?

La secuencia elaborada fue el resultado de establecer una serie de actividades de aprendizaje con un orden interno entre sí. Partimos de recuperar nociones previas de los estudiantes y las vinculamos con situaciones en contextos reales con el fin de que la información a la que se va accediendo tenga sentido y pueda abrir un proceso de aprendizaje. Las tareas demandaban que el alumno realice acciones para relacionar sus conocimientos y experiencias previas con algún interrogante y con información sobre un objeto de conocimiento (Díaz, 2013). En este caso esos objetos fueron el signo de las razones de cambio media en un intervalo, la derivada en un punto y la variación de funciones (IC, ID y ER). Tuvimos en cuenta también que la comprensión del alumno se facilita si se combinan en la enseñanza las aproximaciones del concepto de derivada como límite del cociente incremental, pendiente de la recta tangente y el uso de tablas (Sánchez, García y Llinares, 2008).

Las tareas contemplaban distintas formas de brindar la información (verbal, tabular, algebraica y gráfica), el armado de tablas, la confección de gráficos, la expresión verbal de lo que se iba obteniendo y la manipulación algebraica con el fin de contribuir al entendimiento de las situaciones de variación planteadas. Como señala Vrancken (2011) "las tablas, gráficas, expresiones en lenguaje coloquial y representaciones algebraicas, que contienen la misma información ponen en juego diferentes procesos cognitivos, relacionados entre sí" (p. 106). Las representaciones gráficas potencian la visualización y se relacionan con la geometría. Las tablas hacen visible los aspectos numéricos y cuantitativos, en tanto que las expresiones analíticas o algebraicas conectan con la capacidad simbólica y se vincula con el álgebra. La representación verbal se entrelaza con la capacidad lingüística y es básica para interpretar y relacionar las anteriores (Carabus, 2002).

También consideramos diversos contextos de variación inspirados en otras secuencias didácticas como la que presentan Vrancken, Engler, Giampieri y Müller (2015), García y Dolores (2016), Cantoral (2013), Vrancken (2011), Engler, Müller, Vrancken y Hecklein, (2007) y libros como Thomas (2006) y Stewart (1999).

Dado que toda situación de aprendizaje parte de los saberes previos que tienen los alumnos y tienen como objetivo construir conocimiento a través de las actividades involucradas en la misma, diseñamos dos tipos de actividades a las que llamamos: de exploración y de descubrimiento. Consideramos:

Actividades de exploración: son aquellas cuyo objetivo es familiarizar a los alumnos con situaciones y procesos básicos de la variación. A través de las mismas indagamos las ideas de los estudiantes sobre los conceptos de función, cambios y razones de cambio, ya sea desde sus ideas intuitivas como desde sus conocimientos previos. Nos dan una visión general, el punto de partida del proceso de aprendizaje para luego, mediante las actividades de descubrimiento, trabajar sobre los conceptos involucrados y sus relaciones.

Actividades de descubrimiento: son aquellas que organizamos pensando en el proceso de aprendizaje como proceso de construcción de conocimiento. Buscan que el alumno sea capaz de establecer relaciones para ir formándose la idea de los nuevos conceptos, propiedades y correspondencias que dan solución a la situación planteada. Las producciones de los alumnos constituyen la base para formalizar contenidos y propiedades. Pretendemos que a partir de situaciones de cambio en diversos contextos el alumno pueda relacionar la derivada positiva con el crecimiento, la derivada negativa con el decrecimiento. Las tareas conducen a analizar que en todos los valores de la variable independiente donde la recta tangente a la gráfica es horizontal o no existe, tal vez exista un ER de la función.

Por razones de espacio mostramos los dos grupos de actividades de exploración y el primer grupo de actividades de descubrimiento.

Grupo 1 actividades de exploración

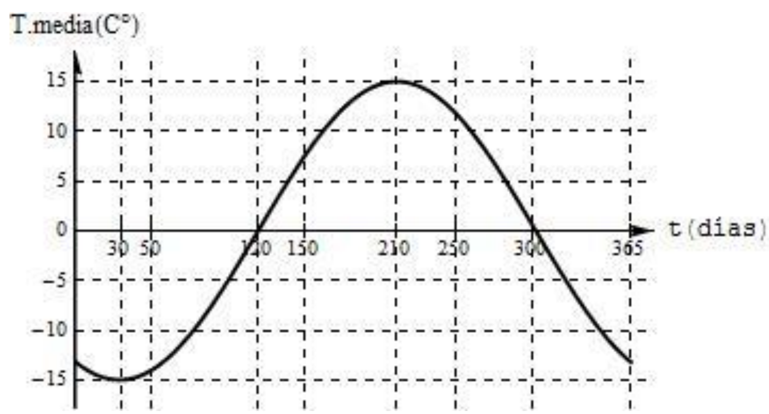
Este grupo estuvo formado por dos actividades que tuvieron como fin conocer las concepciones de los alumnos sobre: variables independiente y dependiente bajo contexto de problema, intervalos de positividad y negatividad de una función y cambios de variable dependiente. Estos conceptos eran de total importancia en las actividades de descubrimiento. Si detectábamos alguna dificultad era el momento de poder aclarar dudas o desplegar estrategias para superarla. También quisimos explorar las ideas intuitivas sobre los conceptos de IC, ID; máximos y mínimos de una función. Sobre esas ideas íbamos a trabajar luego.

Actividad 1. En la tabla siguiente se muestra la velocidad (en km/h) de un automóvil que viaja sobre una ruta. Los resultados se registraron cada media hora desde un instante inicial $t = 0$ (en el que el auto ya estaba en movimiento) y durante 3 horas de viaje.

t (horas)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$v(t)$ (km/h)	80	85	70	90	90	100	110

a) ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?
b) ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad aumentó?
c) ¿En cuáles disminuyó?
d) ¿En qué intervalos la velocidad no cambió?
e) Calcular los cambios de la velocidad en intervalos de media hora.
f) ¿Qué se puede observar en el signo de la cantidad que representa el cambio para cada una de las situaciones anteriores?

Actividad 2. Los constructores de un oleoducto en Alaska necesitaron construir una cubierta aislante para la tubería para evitar que el calor derritiera el suelo congelado. Para diseñar esa cubierta fue necesario tomar en cuenta la variación de la temperatura del aire durante el año. De acuerdo a los datos experimentales se pudo hacer un ajuste con la siguiente curva que expresa la temperatura media del aire en cada día del año (en grados centígrados):



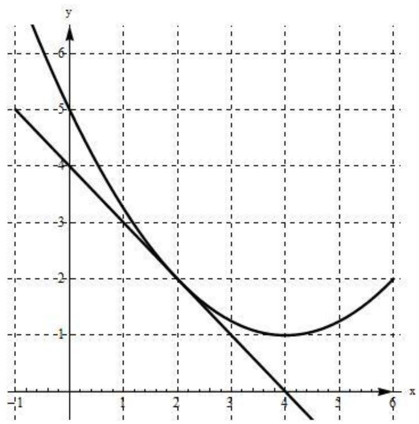
a) ¿En qué momento del año la temperatura es positiva? ¿Y negativa?
b) Determinar los intervalos de tiempo donde la temperatura crece
c) Determinar los intervalos de tiempo donde la temperatura decrece.
d) ¿Existe algún día del año donde la temperatura no varía?
e) ¿En qué momento del año la temperatura fue máxima? ¿Y mínima?

Figura 1. Grupo 1 actividades de exploración

Grupo 2 de actividades de exploración

Las dos actividades son extraídas de Dolores (2000) a las cuales les agregamos en la consigna justificar la respuesta elegida. Establecimos dos objetivos con este grupo de actividades. El primero fue conocer si los alumnos habían logrado identificar el valor numérico de la derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto. La interpretación geométrica era de suma importancia en las actividades de descubrimiento, en las cuales el alumno debía relacionar el signo de la derivada primera (pendiente de la recta tangente) con el crecimiento o decrecimiento de la función. Por otro lado, era necesario reconocer puntos de derivada cero ya que son posibles ER de la función estudiada.

Actividad 1. El siguiente es el gráfico de cierta función f y su recta tangente en el punto de abscisa $x=2$. Contestar indicando la opción correcta. Justificar la respuesta:



A) ¿Cuál es el valor de $f(2)$?
a) 4 b) 3 c) -1 d) 2

B) ¿Cuál es el valor de la derivada en $x=2$?
a) 4 b) 3 c) -1 d) 2

C) ¿Cuál es el valor de la derivada en $x=4$?
a) 1 b) -1 c) 0 d) 2

Figura 2. Actividad 1 del Grupo 2 de exploración

El segundo propósito fue evaluar si el alumno identificaba en el contexto de la función posición de un cuerpo el cambio de la variable dependiente en un determinado intervalo, la velocidad media y la velocidad instantánea (derivada) desde el registro analítico. Estos cuatro conceptos son fundamentales a la hora de trabajar con funciones como modelos matemáticos de variación.

Actividad 2: la distancia que recorren los cuerpos en caída libre está dada aproximadamente por la función $s(t)=5t^2$, donde s está en metros y t en segundos. Marcar la opción correcta en cada ítem y justificar la respuesta:

A) ¿Cuál es la distancia que recorre un cuerpo en el primer segundo?
a) 1 m b) 5 m c) 4,9 m d) 10 m

B) ¿Cuánto cambia la distancia que recorre un cuerpo entre el 1º y 2º segundo?
a) 1 m b) 5 m c) 15 m d) 10 m

C) ¿Cuál es la velocidad media del cuerpo entre el 1º y 2º segundo?
a) 5m/s b) 20 m/s c) 15 m/s d) 10,2m/s

D) ¿Cuál es la velocidad del cuerpo exactamente en el primer segundo?
a) 5m/s b) 10 m/s c) 15 m/s d) 4 m/s

Figura 3. Actividad 2 del Grupo 2 de exploración

Grupo 1 de actividades de descubrimiento

La actividad 1 dada en registro numérico (Figura 4) tuvo como objetivo introducir la relación entre el crecimiento de una función en un intervalo (o decrecimiento) con el signo de la razón de cambio media. Este es un primer acercamiento para ir construyendo la relación entre signo de la primera derivada y el crecimiento de una función. Consideramos que trabajar con razones de cambio es más sencillo que con el concepto de derivada. La otra tabla tuvo como propósito resumir la información de la primera.

Actividad 1 Las ganancias de una empresa en sus seis primeros años están dadas por la siguiente tabla:

Tiempo t (en años)	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Ganancia (en millones de pesos)	0	50	70	80	90	90	70

a) Uniendo los puntos anteriores trazar en forma aproximada la curva que muestra las ganancias de la empresa en función del tiempo, considerando t como el número de años desde el inicio de la empresa (al año 2007 le corresponde $t=0$).

b) Teniendo en cuenta los datos anteriores, completar la siguiente tabla:

Intervalo	Ganancia (aumenta, disminuye, queda igual)	Razón de cambio media	Signo de la razón de cambio media
$0 \le t \le 1$			
$1 \le t \le 2$			
$2 \le t \le 3$			
$3 \le t \le 4$			
$4 \le t \le 5$			
$5 \le t \le 6$			

c) Realizar un resumen de lo obtenido en la siguiente tabla:

Ganancia	Gráfica	Signo de la razón de cambio
Sube	creciente	
Queda igual		
Baja		

Figura 4. Actividad 1 Grupo 1 de descubrimiento

La actividad siguiente tuvo como fin que el alumno comience a relacionar el signo de la derivada de la función (velocidad en este caso) con el crecimiento o decrecimiento de la misma. La complejidad de la tarea es mayor que la de la anterior ya que demanda el trabajo en diversos registros: analítico, numérico, gráfico y verbal y el manejo de la función derivada y la original en forma conjunta.

Actividad 2 La posición de una partícula (en metros) que se mueve en línea recta en un intervalo de $0 \leq t \leq 3$ minutos respecto a un punto inicial está dada por $s(t) = -4t^3 + 4t^2 + 15t$. Se considera la posición hacia la derecha del punto como positiva y a la izquierda de dicho punto como negativa.

a) Calcular la velocidad de la partícula en cualquier instante t.
b) Completar la siguiente tabla (indicar unidades):

Tiempo t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Posición $s(t)$							
Velocidad $v(t)$							

c) Representar ambas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos y comparar la función posición con la función velocidad observando las gráficas (ayudarse con los valores de la tabla).
d) Completar la siguiente tabla para analizar el comportamiento de la función según el signo de su derivada:

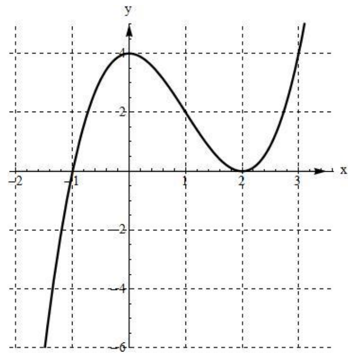
<table>
<tr><th rowspan="2">Intervalos</th><th rowspan="2">Signo de $s(t)$</th><th rowspan="2">Signo de $v(t)$</th><th colspan="3">Comportamiento de la función $s(t)$ (marcar con una cruz la opción que corresponde)</th></tr>
<tr><th>Crece</th><th>Decrece</th><th>No cambia</th></tr>
<tr><td>$0 < t < 1{,}5$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$t = 1{,}5$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$1{,}5 < t < 2{,}5$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$2{,}5 < t < 3$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

e) Señalar el intervalo de tiempo en que $s(t)$ aumenta. En ese intervalo: ¿qué signo tiene la velocidad?
f) Señalar el intervalo de tiempo en el que $s(t)$ disminuye. En ese intervalo: ¿qué signo tiene la velocidad de la partícula?
g) ¿Qué sucede a los 1,5 minutos de iniciado el movimiento?

Figura 5. Actividad 2 del Grupo 2 de descubrimiento

El objetivo de la última tarea de este grupo fue afianzar lo obtenido en la anterior en cuanto a relacionar el signo de la derivada primera de la función con el crecimiento o decrecimiento de la función y observar valores del dominio con derivada cero y su comportamiento desde el registro gráfico.

Actividad 3



Dada la función f :

a) Graficar aproximadamente la recta tangente en los puntos de abscisa: $x=-1$, $x=0$, $x=1$ y $x=2$.
b) Determinar el signo de la derivada en dichos puntos.
c) En esos valores ¿la función crece o decrece? Justificar la respuesta relacionando con lo respondido en b).

Figura 6. Actividad 3 del Grupo 2 de descubrimiento

3.2. Consideraciones de implementación

En cuanto al trabajo en el aula establecimos que los estudiantes formen equipos de dos personas. Al respecto Artigue (1999) señala que la discusión grupal es útil y que el juego colectivo propicia encontrar soluciones en un tiempo razonable. El trabajo en conjunto promueve regularidades que quizás no aparezcan en el trabajo individual.

Debido al carácter social de la construcción del conocimiento las actividades propuestas a los alumnos incluyeron momentos diferenciados. En una primera instancia los alumnos se enfrentaron a un problema propuesto, se familiarizaron con la tarea, consensuaron y formularon una estrategia de trabajo para llegar a una solución. En esta situación actuamos como orientadores y como observadores de la actividad de los equipos. La estrategia de observación fue participativa, permitiendo poder intervenir con los alumnos atendiendo a sus preguntas previo consenso sobre en qué aspectos se debía orientar y en cuáles no.

Luego del tiempo establecido para la resolución de las actividades destinamos un momento en el que socializamos los resultados obtenidos buscando lograr consenso. Es la puesta en común de todo lo trabajado previamente y estuvo a cargo de la docente autora de este artículo, quien solicitó las diferentes estrategias utilizadas, las cuales fueron discutidas por el grupo en general. Como última instancia en cada una de las sesiones formalizamos los conceptos matemáticos que surgieron durante la misma, sus propiedades y/o relaciones. Enfatizamos el hecho que la construcción del conocimiento se planificó como trabajo conjunto entre alumnos y docentes. Es decir, no sólo las tareas fueron importantes en la situación de aprendizaje sino también el debate grupal y la formalización o síntesis por parte nuestra de todo lo trabajado en cada sesión.

Nuestro contexto es el Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas de la UNLaM, y la cátedra de Análisis Matemático I, la cual cuenta con 10 comisiones por cuatrimestre. En cada uno de los cursos trabajan dos profesores, uno de ellos a cargo del mismo y el otro auxiliar. Por razones de organización determinamos incorporar la propuesta en la comisión a cargo de quien suscribe, la cual estuvo formada por 66 alumnos.

La experiencia aconteció en el segundo cuatrimestre del año 2016, en el horario habitual de clase. De esta manera garantizamos que la componente social se manifieste en todo este estudio debido a que consideramos las cualidades de la institución donde se generó el problema y se llevó adelante la propuesta. Los contenidos que desarrollamos en la asignatura previos a la experiencia fueron funciones, límite, continuidad antes de la primera sesión de trabajo. Luego dimos los contenidos referidos al concepto de derivada y proseguimos con las demás sesiones. Las actividades se elaboraron a carpeta cerrada, los alumnos no pudieron consultar apuntes de clase o bibliografía ya que queríamos que el único material de trabajo sea las tareas propuestas. Permitimos el uso de calculadora, celular o Tablet como herramienta para realizar cálculos o gráficos.

Todas las sesiones mantuvieron la misma modalidad. Los alumnos se agruparon en equipos de dos personas y realizaron dos producciones iguales. Al finalizar el tiempo destinado a la resolución retiramos una producción y la otra quedó en poder de los alumnos para la discusión grupal.

Por ejemplo, una vez concluido el período establecido para la resolución de las actividades dadas en la Figura 1, organizamos la puesta en común que consistió en compartir las respuestas obtenidas y definir los conceptos de función creciente y decreciente en un intervalo abierto, extremos relativos y absolutos de una función.

En otra oportunidad, después de las actividades del Grupo 1 de descubrimiento (Figuras 4, 5 y 6) presentamos las siguientes preguntas, las cuales pusimos en discusión en la etapa de formalización de los conceptos y propiedades. En todos los casos discutimos la validez de los condicionales y sus recíprocos. Las dos últimas proposiciones se demostraron en el pizarrón.

- ¿Qué relación existe entre el crecimiento de una función y el signo de la razón de cambio promedio en un intervalo?
- ¿Qué relación existe entre el decrecimiento de una función y el signo de la razón de cambio promedio en un intervalo?
- ¿Qué relación existe entre el signo de la derivada y el crecimiento de una función en un intervalo?
- ¿Qué relación existe entre el signo de la derivada y el decrecimiento de una función en un intervalo?

Dada una función continua en [a, b] y derivable en (a, b), completar:

- Si $f'(x)$____ $0\ \forall x \in (a,b)$ entonces f es creciente en (a,b)
- Si $f'(x)$____ $0\ \forall x \in (a,b)$ entonces f es decreciente en (a,b)

4. Resultados

A continuación, brindamos por actividad los resultados generales encontrados en las producciones de los 27 equipos que participaron en la experiencia. Mostramos también la producción de uno de los equipos en particular (al que llamamos equipo A) con el objetivo de observar la evolución de su aprendizaje.

Grupo 1 actividades de exploración (Figura 1)

Respecto a los conocimientos previos si bien la mayoría de los equipos reconoció en forma correcta la variable dependiente y la independiente, algunos confundieron la simbología de la variable con la variable en sí misma. Por ejemplo, encontramos expresiones como “t es la variable independiente”, en vez de contestar “la variable independiente es el tiempo, simbolizado con t y medido en horas”.

Aproximadamente el 80% de los equipos indicó bien los intervalos de positividad y negatividad de la función de la actividad 2 y un 63% calculó bien los cambios de la variable dependiente de la actividad 1.

La mayoría de los alumnos evidenció tener una idea intuitiva de crecimiento o decrecimiento, máximos y mínimos de una función. En esta oportunidad sólo debían dar (en la actividad 2) el instante de temperatura máxima y mínima.

Los alumnos pudieron relacionar los intervalos indicados (IC, ID e intervalo donde la función permanece constante) y el signo de los cambios en la actividad 1. Recordamos que esta es una primera aproximación a la relación entre ambos. El registro numérico no brinda información suficiente para poder afirmar la monotonía de la función en el intervalo dado, pero consideramos que es el más simple de trabajar como primer acercamiento a la relación que queríamos que los alumnos descubran.

Tomamos como respuestas válidas tanto aquellas que indicaban que si el cambio es positivo la velocidad crece (similar para cambio negativo o cero) o la que afirmaba que si la velocidad crece el signo del cambio es positivo (ídem para las demás opciones). Si bien la implicación no es verdadera en los dos sentidos, en este momento los alumnos no podían evidenciar la diferencia entre ambas. Esto lo trabajamos luego en la puesta en común, dando la implicación correcta y diversos ejemplos que mostraban que el recíproco es falso.

a) ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?
"T" es la variable independiente, "V" es la variable dependiente

b) ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad aumentó?
Aumentó en: [0;0,5], [1;1,5], [2;2,5], [2,5;3]

c) ¿En cuáles disminuyó?
Disminuyó en: [0,5;1]

d) ¿En qué intervalos la velocidad no cambió?
se mantuvo en: [1,5;2]

e) Calcular los cambios de la velocidad en intervalos de media hora.
[0;0,5] → 85km-80km/h = 5 km/h (aumento)
[0,5;1] → 70km/h - 85km/h = - 15 km/h (disminuyó)
[1;1,5] → 90 km/h - 70 km/h = 20 km/h (aumento)
[1,5;2] → 90km/h - 90km/h = 0 km/h (no varía)
[2;2,5] → 100 km/h - 90 km/h = 10 km/h (aumento)
[2,5;3] → 110 km/h - 100 km/h = 10 km/h (aumento)

f) ¿Qué se puede observar en el signo de la cantidad que representa el cambio para cada una de las situaciones anteriores?
Cuando el signo de la velocidad es positivo, la velo-cidad y la función están en crecimiento. Caso contrario, cuando esta es negativa, se encuentra la función en situación de decrecimiento. En el caso que dé cero, la función no varía (es constante)

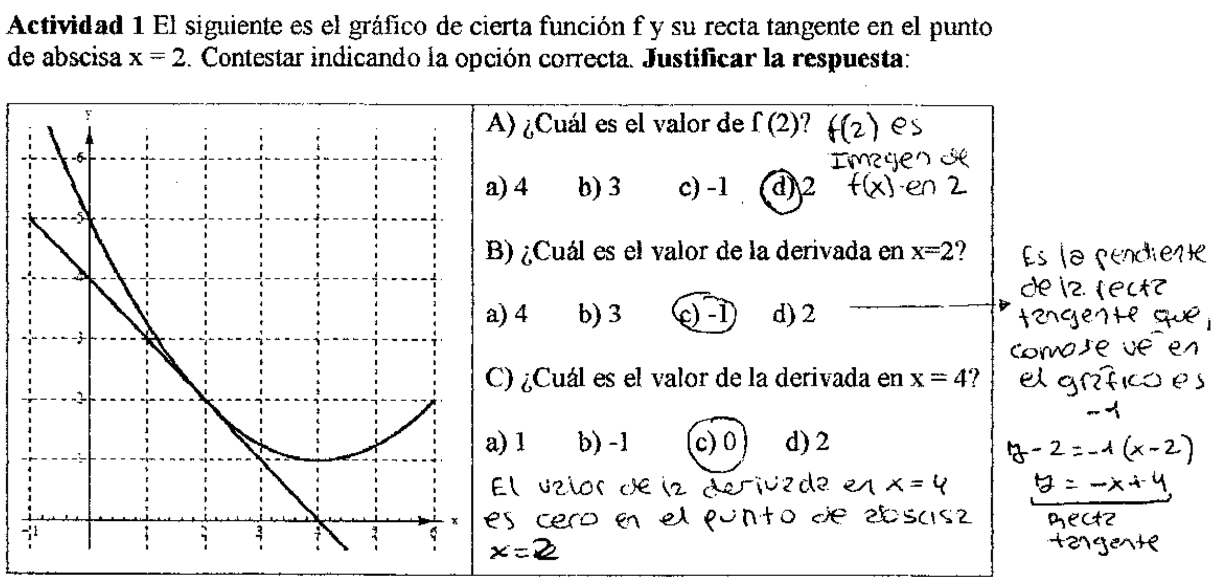
Figura 7. Actividad 1 del Grupo 1 de exploración del equipo A

En la Figura 7 mostramos la producción del equipo A. Observamos que si bien los alumnos en la pregunta e) calcularon bien los cambios de la variable dependiente a intervalos de media hora y entre paréntesis pusieron si la función aumentaba, disminuía o permanecía constante en el mismo, luego confundieron esta situación en la respuesta de la pregunta f). En este último caso consideraron como distintas la velocidad y la función de la tarea.

Grupo 2 actividad de exploración (Figuras 2 y 3)

Todos los equipos respondieron bien al indicar el valor de la imagen de la función en x = 2. Los alumnos tuvieron serias dificultades para reconocer el valor de la derivada en ese punto. La mayoría respondió con el valor de la ordenada de la recta tangente. Situación similar aconteció con la derivada en el punto de abscisa x = 4. La mayoría de los alumnos reemplazó dicho valor en la ecuación de la recta tangente a la curva en (2, f (2)). Es decir, confundieron la recta tangente a la curva en ese punto con la función derivada de la función dada.

En la Figura 8 mostramos el desarrollo del equipo A. Los alumnos respondieron bien el valor de la derivada en el punto (2, f (2)) y justificaron que "ven" en el gráfico que la pendiente de la recta tangente es -1. Ahora al momento de tener que calcular la pendiente de la recta tangente en (4, f (4)), hallaron la ecuación de la recta dada y reemplazaron x por el valor 4, es decir confundieron función derivada con la recta tangente en un punto de la curva.



Actividad 1 El siguiente es el gráfico de cierta función f y su recta tangente en el punto de abscisa x = 2. Contestar indicando la opción correcta. **Justificar la respuesta**:

A) ¿Cuál es el valor de f (2)? f(2) es Imagen de f(x) en 2

a) 4 b) 3 c) -1 d) 2

B) ¿Cuál es el valor de la derivada en x=2?

a) 4 b) 3 c) -1 d) 2

Es la pendiente de la recta tangente que, como se ve en el gráfico es -1

y - 2 = -1 (x - 2)

y = -x + 4

recta tangente

C) ¿Cuál es el valor de la derivada en x = 4?

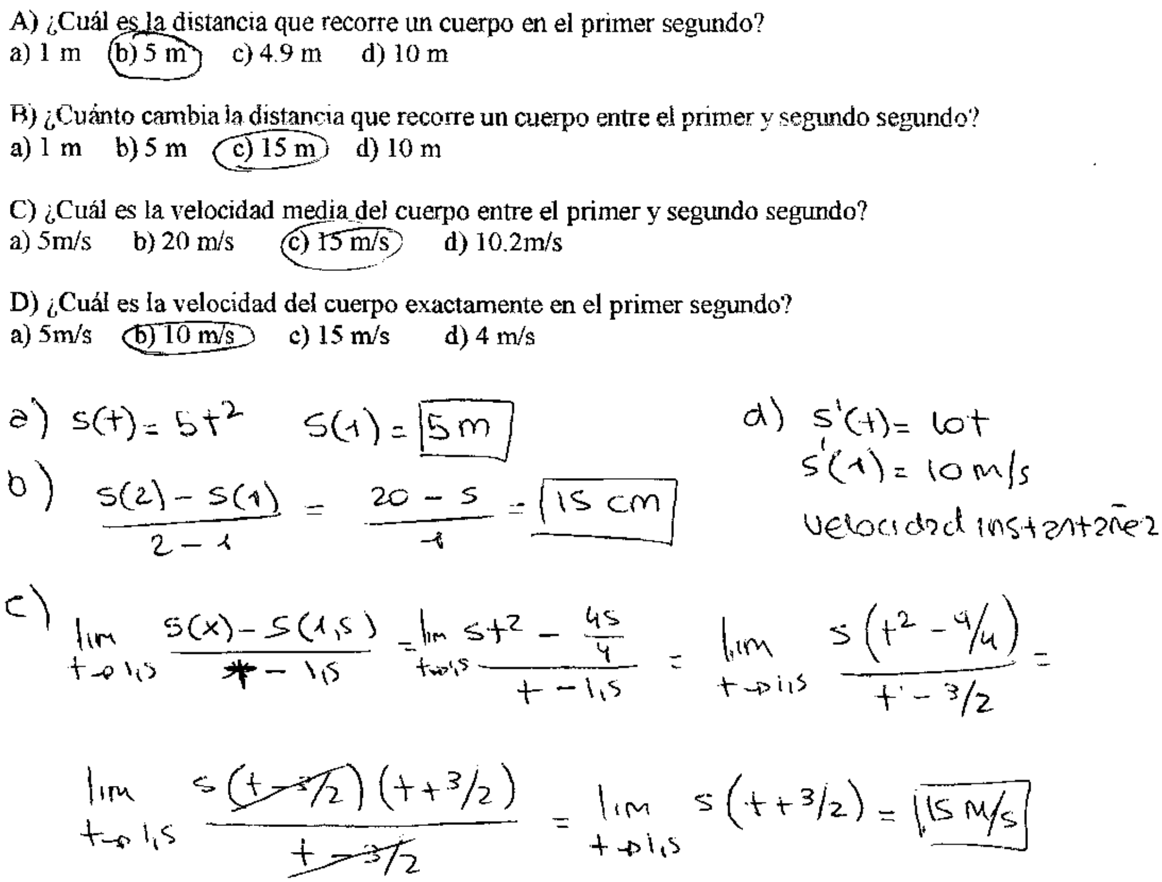
a) 1 b) -1 c) 0 d) 2

El valor de la derivada en x = 4 es cero en el punto de abscisa x=2

Figura 8. Actividad 1 del Grupo 2 de exploración del equipo A

En la actividad 2, un 67% de los equipos contestó en forma correcta el valor de la velocidad media del cuerpo en el intervalo [1, 2] realizando el cálculo correspondiente con sus unidades. El 85% de los equipos indicó el valor de la velocidad instantánea en t = 1 y justificaron bien su respuesta por medio de la derivada de la función en el punto en cuestión.

El equipo A realizó todos los cálculos y justificaciones bien salvo la de la velocidad media en [1, 2]. Los estudiantes calcularon la velocidad instantánea en el punto medio del intervalo (Figura 9):



A) ¿Cuál es la distancia que recorre un cuerpo en el primer segundo?
a) 1 m b) 5 m c) 4.9 m d) 10 m

B) ¿Cuánto cambia la distancia que recorre un cuerpo entre el primer y segundo segundo?
a) 1 m b) 5 m c) 15 m d) 10 m

C) ¿Cuál es la velocidad media del cuerpo entre el primer y segundo segundo?
a) 5m/s b) 20 m/s c) 15 m/s d) 10.2m/s

D) ¿Cuál es la velocidad del cuerpo exactamente en el primer segundo?
a) 5m/s b) 10 m/s c) 15 m/s d) 4 m/s

a) $s(t) = 5t^2$ $\quad S(1) = \boxed{5m}$

b) $\dfrac{s(2) - s(1)}{2-1} = \dfrac{20-5}{1} = \boxed{15\ cm}$

d) $s'(t) = 10t$
$s'(1) = 10\ m/s$
velocidad instantánea

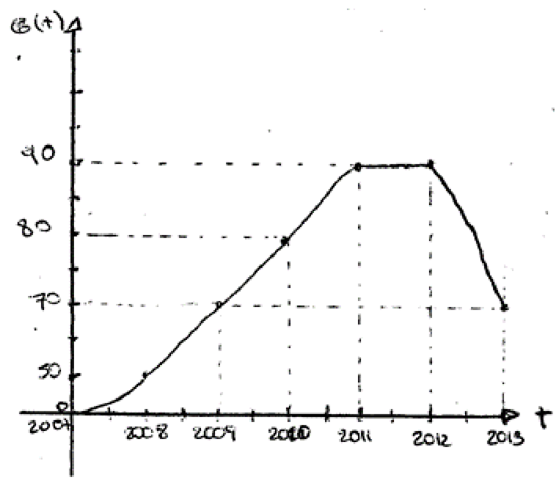
c) $\lim\limits_{t \to 1{,}5} \dfrac{s(x) - s(1{,}5)}{x - 1{,}5} = \lim\limits_{t \to 1{,}5} \dfrac{5t^2 - \frac{45}{4}}{t - 1{,}5} = \lim\limits_{t \to 1{,}5} \dfrac{5\left(t^2 - \frac{9}{4}\right)}{t - \frac{3}{2}} =$

$\lim\limits_{t \to 1{,}5} \dfrac{5\cancel{(t - 3/2)}(t + 3/2)}{\cancel{t - 3/2}} = \lim\limits_{t \to 1{,}5} 5(t + 3/2) = \boxed{15\ m/s}$

Figura 9. Actividad 2 del Grupo 2 de exploración del equipo A

Grupo 1 actividad de descubrimiento (Figuras 4, 5 y 6)

El 74% de los equipos completó bien la tabla de la actividad 1 con los IC, ID y cuando la ganancia no posee cambios, con las razones de cambio media y su signo. Observemos la Figura 10 de la producción del equipo A. En esta oportunidad calcularon bien la razón de cambio media.



b) Teniendo en cuenta los datos anteriores, completar la siguiente tabla (escribir unidades):

Intervalo	Ganancia (aumenta, disminuye, queda igual)	Razón de cambio promedio $\frac{\Delta G}{\Delta t}$	Signo de la razón de cambio promedio
$0 \le t \le 1$	Aumenta	50 gan/tiempo	+
$1 \le t \le 2$	Aumenta	20 gan/tiempo	+
$2 \le t \le 3$	Aumenta	10 gan/tiempo	+
$3 \le t \le 4$	Aumenta	10 gan/tiempo	+
$4 \le t \le 5$	Queda igual	0 gan/tiempo	0
$5 \le t \le 6$	Disminuye	−20 gan/tiempo	−

Figura 10. Actividad 1 del Grupo 1 de descubrimiento del equipo A.

En la actividad 2, aproximadamente un 60% de los equipos completó bien todos los valores de la tabla del ítem b), indicando las unidades correspondientes. Respecto a los gráficos de las dos funciones en el mismo par de ejes el 93% de los equipos lo realizó en forma correcta, indicando en el eje horizontal la variable tiempo, con escalas en los dos ejes y señalando cada una de las funciones con distinto color o con su denominación respectiva. Sólo un equipo realizó la comparación solicitada en forma verbal. Pretendíamos que comparen el signo de la función y el de su derivada desde el gráfico, que saquen conclusiones al respecto y las vuelquen en forma verbal en la hoja de trabajo. En clase estuvimos aclarando este punto, pero evidentemente no fue suficiente.

En relación con la tabla que resume la información, un 85% de los equipos la completó totalmente bien. En las dos preguntas siguientes, todos los equipos señalaron correctamente el intervalo de tiempo en que $s(t)$ aumenta e indicaron bien el signo de la velocidad en ese intervalo. La mitad de los equipos respondió la última pregunta haciendo mención que la partícula alcanzaba un máximo relativo y que la derivada en ese punto era cero. Los demás se centraron sólo en un aspecto: o que el punto era máximo o que la derivada valía cero.

En la actividad 3, el 74% de los equipos relacionó en forma correcta el signo de la derivada con el crecimiento o decrecimiento de la función en el punto. Respecto a los puntos de derivada cero, encontramos diversas respuestas. Entre ellas: “la función queda igual”, “la función no crece ni decrece”, “la función no cambia”, “hay un máximo en x = 0 y un mínimo e x = 2”. Pensamos que las tres primeras respuestas obedecen a cómo presentamos los extremos en las diversas tareas: en el grupo de exploración como instante que la temperatura “no varía”, en el grupo de descubrimiento como instante donde la función “no cambia”.

Brindamos la producción del equipo A en la Figura 11. Los alumnos expresaron tres ideas sobre los extremos relativos:

- La función es constante en esos puntos.
- El signo de la derivada es “neutro” porque la pendiente de la recta tangente es cero.
- El teorema de Rolle justifica que el extremo relativo tenga derivada cero.

Esto nos muestra cómo “van surgiendo” en los estudiantes nociones como ER, derivada cero, pendiente de la recta tangente cero, teoremas estudiados, en principio desorganizadas y expresadas en forma no totalmente adecuada. Es aquí donde la orientación del docente, el debate grupal y la puesta en común son fundamentales para que los conocimientos se formalicen.

En esta producción también notamos la expresión “cuando el signo de la razón de cambio es positivo la función es creciente”. En el debate grupal del grupo 1 de actividades de exploración habíamos estudiado este condicional y su contrarrecíproco. Evidentemente los alumnos todavía no pudieron comprender las dos implicaciones o la diferencia entre las mismas o no habían repasado lo visto en clase.

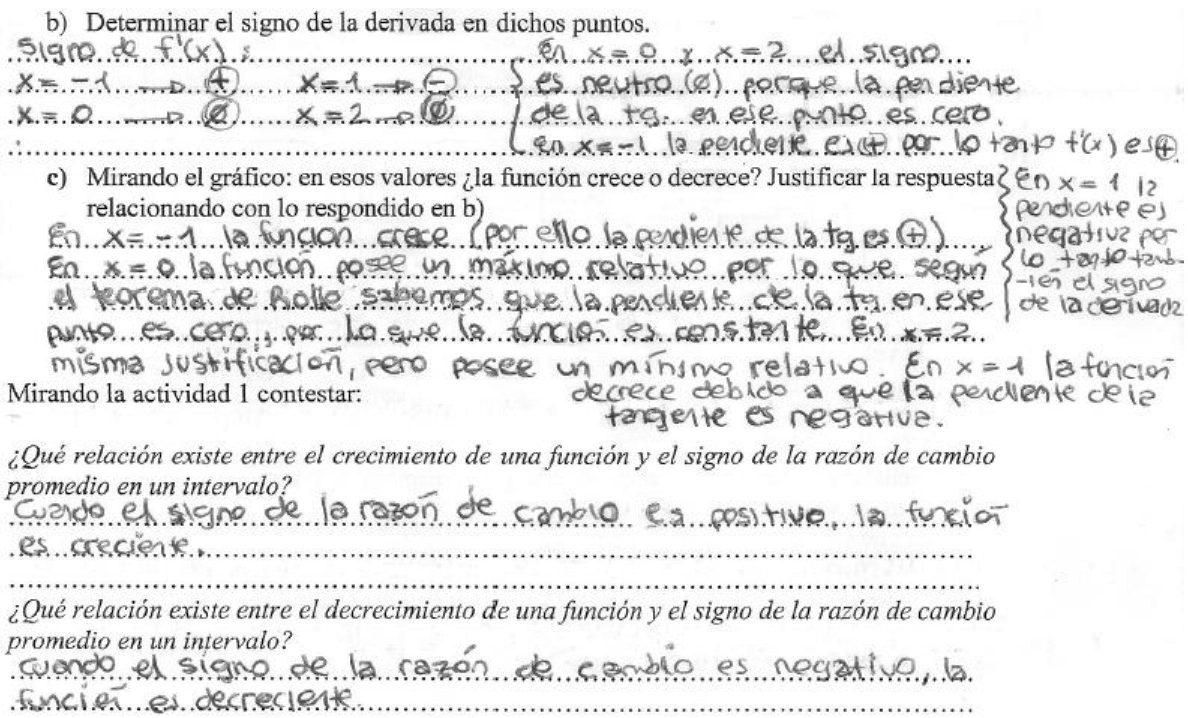

b) Determinar el signo de la derivada en dichos puntos.
Signo de f'(x):
x = −1 → + x = 1 → −
x = 0 → ∅ x = 2 → ∅
En x = 0 y x = 2 el signo es neutro (∅) porque la pendiente de la tg. en ese punto es cero.
En x = −1 la pendiente es + por lo tanto f'(x) es +
c) Mirando el gráfico: en esos valores ¿la función crece o decrece? Justificar la respuesta relacionando con lo respondido en b)
En x = −1 la función crece (por ello la pendiente de la tg es +)
En x = 0 la función posee un máximo relativo por lo que según el teorema de Rolle sabemos que la pendiente de la tg en ese punto es cero, por lo que la función es constante. En x = 2 misma justificación, pero posee un mínimo relativo. En x = 1 la función decrece debido a que la pendiente de la tangente es negativa.
En x = 1 la pendiente es negativa por lo tanto también el signo de la derivada
Mirando la actividad 1 contestar:
¿Qué relación existe entre el crecimiento de una función y el signo de la razón de cambio promedio en un intervalo?
Cuando el signo de la razón de cambio es positivo la función es creciente.
¿Qué relación existe entre el decrecimiento de una función y el signo de la razón de cambio promedio en un intervalo?
Cuando el signo de la razón de cambio es negativo, la función es decreciente.

Figura 11. Actividad 3 del Grupo 1 de descubrimiento del equipo A.

En las preguntas de síntesis finales a este grupo de actividades, el 74% de los equipos respondió relacionando bien el crecimiento con la razón de cambio positiva y el decrecimiento con la razón de cambio negativa. Respecto a las dos últimas preguntas la mayoría de los equipos vincularon correctamente el signo de la derivada positivo con el crecimiento de la función.

Luego en el debate grupal y tal como lo teníamos planificado, discutimos el orden de los condicionales, dimos ejemplos y demostramos la relación entre el signo de la derivada de una función en un intervalo abierto y el crecimiento de la misma en dicho intervalo.

5. Reflexiones

5.1. Sobre los resultados generales obtenidos

Basados en los datos recogidos en las producciones de los alumnos en estas actividades podemos afirmar que la situación diseñada permitió que la mayoría lograra una primera aproximación para encontrar la relación entre el signo de la derivada primera de una función y su variación (IC, ID y ER). Las instancias de debate grupal y la formalización de conceptos y propiedades fueron fundamentales para aclarar ideas y evitar fijación de errores. No obstante, como señala Cantoral (2013) la construcción del concepto de variación es un proceso difícil y lento. Se necesita tiempo para lograr la comprensión de procesos complejos como la relación entre la razón de cambio media, la derivada, el crecimiento o decrecimiento de la función y sus puntos críticos.

Tratamos de dar las tareas en diferentes registros de representación para propiciar la comprensión de conceptos y teniendo en cuenta que cada uno nos brinda una característica particular del objeto matemático en estudio (Posada y Obando, 2006). Pensamos que el registro gráfico ayudó a reconocer IC, ID y ER. En particular éste último identificado con la idea de altura, es decir, con el “valor más alto o más bajo” de la función (Cuesta, Jordi y Méndez, 2010). El registro numérico fue adecuado para iniciar la relación entre el signo de los cambios, razones de cambio y luego el de la derivada con el crecimiento y decrecimiento de la función. Posteriormente el registro analítico propició un trabajo más formal y acorde a lo que se esperaba como fruto final de la situación de aprendizaje. En cuanto al registro verbal los alumnos evidenciaron dificultades a la hora de expresar en lenguaje natural la lectura de los gráficos de la función y su derivada primera. Si bien pudieron volcar dicha lectura en una tabla no lo lograron hacer de una manera fluida expresándose ellos mismos.

El grupo 2 de actividades de exploración fue de total importancia como tarea previa a la de descubrimiento. A pesar de dar el concepto de derivada en clases anteriores y realizar la interpretación geométrica, fue recién en la puesta en común donde la mayoría de los alumnos lo pudo comprender. Esto produjo un efecto positivo en la resolución del grupo de actividades de descubrimiento.

Del análisis de la faceta cognitiva de la investigación tuvimos coincidencias y también discrepancias con otros estudios. Por ejemplo, la mayoría de los alumnos no pudo reconocer el valor de la derivada en el punto pedido en la actividad de la Figura 2, resultados coincidentes con los indicados en Dolores (2000) y en Sánchez, García y Llinares (2008). Un alto porcentaje de los alumnos no confundió los intervalos de positividad con los IC (y los de negatividad con los ID). Este resultado discrepa del obtenido en Cardona (2009) y Dolores y Guerrero (2004).

Quedaron puntos para reforzar con otras actividades o con trabajo en clase. Entre ellos el estudio del condicional “ $f'(x) > 0$ en (a, b) implica f creciente en (a, b)” y su recíproco. De la misma manera: “Si f crece en (a, b) entonces la razón de cambio media es positiva en dicho intervalo”. Ningún equipo tuvo la inquietud sobre el valor de verdad de estos condicionales y sus recíprocos. Es decir, los estudiantes no se preguntaron sobre cuestiones que iban “más allá” de las planteadas en las tareas.

5.2. Sobre las producciones del equipo A

Respecto a las producciones del equipo A evidenciamos cierta inestabilidad y confusión en algunas de las respuestas. En dos oportunidades realizaron una acción correcta y en el ítem siguiente efectuaron lo contrario. Esto pudo ser fruto de que, como manifiestan Cuesta, Jordi y Méndez (2010), algunas dificultades tienen estrecha relación con la propia experiencia basada únicamente en lo estudiado en clase.

En la tarea que debían calcular la velocidad media en un intervalo realizaron el cálculo de la velocidad instantánea en el punto medio del mismo. Quizás interpretaron mal la oración que contenía el concepto de velocidad media. Como indica Cuesta (2007), la falta de comprensión de un término del lenguaje corriente crea un conflicto en la resolución de la tarea.

5.3. Sobre la situación de aprendizaje

Desde la dimensión didáctica de la investigación pudimos a través de las actividades mostrar el Cálculo como la matemática de la variación y el cambio. Como expresan Vrancken (2011), García (2011), Cantoral (2013) es primordial lograr la comprensión de los conceptos fundamentales del Cálculo y entender la problemática que le dio origen: la recta tangente a una curva, la velocidad de un cuerpo y la obtención de máximos y mínimos. En las tareas reflejamos éstas y otras situaciones de variación.

Luego de esta primera implementación de la situación de aprendizaje pudimos vislumbrar aspectos a ser mejorados. Uno de ellos está ligado a la expresión “indicar el instante o el punto donde la función no cambia” (Figura 1 y 5). Con este enunciado quisimos hacer referencia al instante de derivada cero, pero esto produjo confusión en los alumnos. Muchos pensaron que la función era constante en un intervalo.

Reconocemos que el registro numérico o tabular tiene sus limitaciones. Por ejemplo: el unir los puntos de una tabla para realizar un gráfico puede dar lugar a muchas interpretaciones. Este es un punto débil de la situación de aprendizaje que deberíamos rediseñar para futuras implementaciones.

Pudimos analizar también la dimensión social del estudio, entendida como la puesta en escena de la situación de aprendizaje en un tiempo y lugar determinado, con sus características específicas. El tiempo empleado en los temas y la cantidad de alumnos son serias limitaciones para llevar al aula este tipo de metodología. También estamos de acuerdo con García y Dolores (2016) en cuanto a que se necesita que el estudiante se involucre en su propia construcción del conocimiento y que sea responsable del mismo. La situación de aprendizaje en sí misma y el trabajo del profesor no son suficientes para lograrlo.

A pesar de las dificultades consideramos que pudimos crear un ambiente rico de aprendizaje diferente al de la clase expositiva tradicional en el sentido que los alumnos pudieron discutir entre ellos, reflexionar sobre sus producciones y tomar participación el debate grupal. Pensamos que esto los anima a trabajar por sí solos y a tener herramientas para lograr un aprendizaje significativo.

Bibliografía

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1999). The Teaching and Learning of Mathematics at the University Level. Crucial Questions for Contemporary Research in Education, *Notices of the AMS 46* (3), 1377-1385.

Baccelli, S., Anchorena, S., Moler, E. y Aznar, M. (2013). Análisis exploratorio de las dificultades del alumnado de Ingeniería en la resolución de problemas de optimización. *Números 84,* 99-113.

Cabrera, L. (2009). *El pensamiento y el lenguaje variacional y el desarrollo de competencias. Un estudio en el marco de la reforma integral de Bachillerato*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Cantoral, R. (2001). Sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos didácticos. En G. Beitía, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14*, 70-81. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17,* 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.* México: Subsecretaría de Educación Media Superior, Secretaría de Educación Pública.

Cantoral, R., Molina, J. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 463-468. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Carabus, O. (2002). *El aprendizaje del Cálculo en la Universidad. La Conceptualización de la Derivada de una función y sus niveles de Comprensión*. Producciones científicas NOA. Sección: Educación y Sociedad. Catamarca. Recuperado de http://www.editorial.unca.edu.ar/Publicacione%20on%20line/CD%20INTERACTIVOS/NOA2002/Aprendizaje%20Calculo%20Universidad.pdf el 29 agosto de 2010.

Cardona, R. (2009). *Comprobación experimental de un diseño didáctico para la estabilización de la noción de derivada.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México.

Cuevas, A., Rodríguez, A y González, O. (2014). Introducción al concepto de derivada de una función real con apoyo de las tecnologías digitales. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27,* 2335-2345. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cuesta, A. (2007). *El concepto de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Cuesta, A., Jordi, P. y Méndez, M. (2010). Análisis de los procesos de aprendizaje de los conceptos de función y extremos de una función en estudiantes de economía. *Educación Matemática 22* (3), 5-21.

Díaz, A. (2013). Secuencias de aprendizaje. ¿Un problema del enfoque de competencias o un reencuentro con perspectivas didácticas? *Profesorado 17* (3), 11-33.

Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En R. Cantoral (Ed), *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME 8,* 155-181. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (2010). El lenguaje variacional en el discurso de la información. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 13* (4-II), 241-254.

Dolores, C. y Guerrero, L. (2004). Concepciones alternativas que, referente al comportamiento variacional de funciones, manifiestan profesores y estudiantes de bachillerato. *Acta Latinoamericana de matemática educativa 17,* 101-107. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Dolores, C., Guerrero, L., Martínez, M. y Medina, M. (2002). Un estudio acerca de las concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de funciones elementales. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 15* (1), 73–84. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica. Traducción de: Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Vol. 5 (1993).

Engler, A., Müller, D., Vrancken, S. y Hecklein, M. (2007). *Cálculo Diferencial.* Santa Fe: Ediciones UNL.

García, M. (2011). *Una situación de aprendizaje para contribuir a la mejora de la comprensión del concepto de derivada*. Tesis de maestría no publicada, Universidad autónoma de Guerrero, Unidad Académica de Matemáticas, Centro de Investigación en Matemática Educativa, México.

García, M. y Dolores, G. (2016). Diseño de una situación de aprendizaje para la comprensión de la derivada. *UNION. Revista Iberoamericana de Educación Matemática 46,* 49-70.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática: Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 81-96). España: SEIEM y Servicio de publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Posada, F. y Obando, G. (2006). *Módulo 2. Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico*. Medellín: Editorial Artes.

Salinas, P. y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12* (3), 355-382.

Sánchez, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11* (2), 267-296.

Stewart, J. (1999). *Cálculo: conceptos y contextos.* México: International Thomson Editores.

Thomas, G. (2006). *Cálculo una variable* (11ma. ed). México: Pearson Educación.

Vrancken, S. (2011). *La construcción de la derivada desde la variación y el cambio articulando distintos sistemas*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina.

Vrancken, S., Engler, A., Giampieri, M. y Müller, D. (2015). Estudio de las funciones en situaciones variacionales. Resultados de implementación de una secuencia de actividades. *Matemática, Educación e Internet 15* (1).

Betina Williner. Universidad Nacional de La Matanza, Provincia de Buenos Aires, Argentina. Magister en Educación en Ciencias (Orientación Matemática) y Licenciada en Matemática Aplicada. Doctorando en el Doctorado en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales (UNCo). Profesora asociada, investigadora y Jefa de Cátedra de Análisis Matemático I de la Universidad Nacional de La Matanza, profesora adjunta de la Universidad Tecnológica Nacional (Argentina), profesora titular de la Universidad de Morón (Argentina). Líneas de investigación: habilidades matemáticas, pensamiento y lenguaje variacional, uso de software en la enseñanza y aprendizaje de la matemática.
Email: bwilliner@unlam.edu.ar