EL CONCEPTO DE NÚMERO NATURAL Y LAS CUATRO OPERACIONES BÁSICAS: MARCO TEÓRICO

Pilar Turégano
Juan Montañés
Marta Parra
Mª Trinidad Sánchez.

Pilar Turégano es Doctora en Matemáticas.
Juan Montañés es Doctor en Psicología.
Marta Parra es Licenciada en Psicología.
Mª Trinidad Sánchez es Licenciada en Psicología

El marco teórico presentado en este artículo es el marco en que nos hemos apoyado para el diseño de las actividades matemáticas incluidas en el Proyecto Feder de investigación (1FD97-1017): "Intervención en Educación Infantil y Primaria mediante el material lúdico didáctico PRISMAKER, para la optimización del desarrollo".

1. ACERCA DE LOS CAMBIOS CURRICULARES

El currículo de matemáticas ha sufrido cambios importantes desde finales de los años cincuenta, en que comenzó el movimiento de reforma curricular en los países occidentales. Estos cambios han obedecido a diversos factores, entre los que cabría destacar los sociológicos y los epistemológicos. Los primeros determinan la función social que se asigna en un momento dado a la educación matemática, y se basan en decisiones políticas, económicas, culturales, etc.; los segundos plantean la visión de las matemáticas como disciplina científica y de las matemáticas escolares, así como el modo de acceso a su conocimiento. Así se han ido configurando diversos currícula.

Con objeto de elaborar un marco teórico desde el cual analizar los cambios epistemológicos de los currícula de matemáticas desde el año 1970, se precisan algunas referencias acerca de las concepciones de la matemática y del proceso de enseñanza-aprendizaje que giran en torno a tres elementos: la matemática, el alumno y el contexto en que éste acede al conocimiento.

Dentro de las llamadas "epistemologías objetivistas", se presentan, por un lado, una visión de la matemática como un cuerpo estático de verdades eternas y universales que existen independientemente de los sujetos y que pueden ser descubiertas por estos, y, por otro lado, dos visiones de la enseñanza-aprendizaje: para la primera, aprender es recordar, mientras que, para la segunda, aprender es la capacidad de comportarse de una determinada manera.

En las "epistemologías centradas en el sujeto", se presentan, por una parte, la matemática, considerada aquí como una construcción de la razón, y, por otra parte, los modelos cognitivistas del aprendizaje, que colocan a los sujetos en el centro de la actividad mental constructiva.

En las llamadas "epistemologías centradas en la construcción social del conocimiento", se presentan, por un lado, el quehacer matemático, considerado aquí algo falible y con unas raíces no muy distintas del quehacer científico de la naturaleza, y, por otro, el papel de los conflictos sociocognitivos en el aprendizaje.

Es importante aclarar que, desde una determinada concepción de la matemática, es siempre posible extraer consecuencias tanto para el quehacer del matemático como para la iniciación en esta materia. En el segundo caso, una concepción filosófica puede relacionarse con distintos modelos de enseñanza-aprendizaje, los cuales pueden estar construidos sobre teorías psicológicas o sociales que difieran profundamente entre sí. Esta es la razón por la que dos currícula normativos pueden situarse bajo la misma perspectiva psicológica y, al mismo tiempo, basarse en distintos modelos de enseñanza-aprendizaje.

Callejo y Cañón (1996) realizan un estudio en profundidad de los distintos currícula normativos de nuestro país en los últimos 30 años y las consecuencias que esos cambios han tenido para la enseñanza-aprendizaje de la matemática en la enseñanza primaria. No vamos a entrar en detalles con respecto a este análisis, si bien son precisas algunas referencias:

- En la década de los setenta[1] se introdujo una visión formalista de las Matemáticas, priorizando los aspectos deductivos, adoptando la construcción de conceptos a partir de las nociones de la teoría de conjuntos, la precisión y la exactitud en el uso del lenguaje y presentando a los estudiantes una visión de las Matemáticas como ciencia hecha y acabada. Como consecuencia de ello, «aprender es adquirir la capacidad de comportarse de una determinada manera». (pág. 88)

- En 1980-81, el planteamiento anterior se modifica,[2] dando origen a una nueva ordenación de la Educación General Básica, con reco-

(1) Orientaciones Pedagógicas para la Educación General Básica.
(2) Programas Renovados en Educación General Básica.

mendaciones explícitas de suavizar las exigencias de rigor, e introduciendo planteamientos cognitivistas de aprendizaje tomados de Piaget, así como planteamientos de la enseñanza de Dienes y Mialaret, considerando al estudiante en el centro de la actividad mental de la construcción del conocimiento.

- En el año 1989, con la presentación del Diseño Curricular Base por el Ministerio de Educación y Ciencia para su discusión, asistimos al nacimiento de una ruptura epistemológica muy significativa, presentando el currículo una visión de la Matemática cercana a las corrientes falibilistas y empiristas, considerando que el alumno construye sus conocimientos en interacción con otros sujetos y con el contexto social, cultural y escolar en que tiene acceso al mismo.

El Diseño Curricular Base es el documento que en el año 1989 hizo público el Ministerio de Educación para su estudio con vistas a la reforma educativa del año 1990. Dicha reforma, recogida en la Ley Orgánica General del Sistema Educativo (LOGSE), extendió la enseñanza obligatoria hasta los 16 años y creó nuevos tramos educativos: la Educación Infantil (no obligatoria, de 0 a 6 años), la Educación Primaria (obligatoria, entre 6 y 12 años) y la Educación Secundaria, con un nivel obligatorio (ESO, entre 12 y 16 años) y otro postobligatorio (entre 16 y 18 años). Con esta ley se recuperó la denominación de «maestros» para los profesores de Educación Infantil y Primaria.

Como era de esperar, estas modificaciones han producido cambios en las Matemáticas escolares, tal como queda reflejado en los currícula de Educación Infantil y Primaria.(3) A la hora de elegir para este DCB uno de entre los posibles enfoques de las matemáticas y uno de entre los posibles papeles que juegan éstas en el desarrollo global de los alumnos, se ha optado por una serie de consideraciones que giran, básicamente, en torno a los dos puntos siguientes: el proceso de construcción del conocimiento matemático y las aportaciones de las Matemáticas en el marco definido por la Educación Obligatoria.

El currículum oficial de Matemáticas de Infantil y Primaria actualmente vigente presenta una crítica explícita del formalismo, resaltando la raíz empírica del conocimiento matemático, y propugna la utilización de métodos inductivos, no sólo deductivos. Presenta, también, una visión dinámica de las Matemáticas y la necesidad de resolver problemas prácticos. Señala la relevancia del proceso de génesis del saber matemático para la enseñanza-aprendizaje y de cómo

> «los propios conceptos matemáticos han ido modificando su significado con el transcurso del tiempo, ampliándolo, precisándolo y revisándolo, adquiriendo relevancia o, por el contrario, siendo relegado a segundo plano». (DCB, pág. 378)

(3) BOE nº 220 de 1991, págs. 31-35.

Por lo que se refiere al lenguaje matemático, se señala el poder comunicativo del mismo, resaltando cómo el lenguaje simbólico permite explicitar relaciones no observables y predecir hechos.

Desde una perspectiva pedagógica, y también epistemológica, es importante diferenciar el proceso de construcción del conocimiento matemático de las características de dicho conocimiento en un estado avanzado de elaboración, y así

> «La formalización, la precisión y la ausencia de ambigüedad del conocimiento matemático no es el punto de partida, sino más bien el punto de llegada de un largo proceso de aproximación a la realidad, de construcción de instrumentos intelectuales eficaces para conocerla, analizarla y transformarla». (DCB, pág. 379)

En lo referente al aprendizaje, señala la importancia de tener en cuenta lo que el alumno sabe y de considerar los errores y las primeras intuiciones como «algo» que forma parte del proceso de aprendizaje

> «tanto en la génesis histórica como en su apropiación individual por los alumnos la construcción del conocimiento matemático es inseparable de la actividad concreta sobre los objetos, de la intuición y de las aproximaciones inductivas impuestas por la realización de tareas y la resolución de problemas particulares. La experiencia y comprensión de las nociones, propiedades y relaciones matemáticas a partir de la actividad real es, al mismo tiempo, un paso previo a la formalización y una condición necesaria para interpretar y utilizar correctamente todas las posibilidades que encierra dicha formalización». (DCB, pág. 379)
>
> «La naturaleza del conocimiento matemático, su carácter constructivo y su vinculación con la capacidad de abstraer relaciones a partir de la propia actividad y de reflexionar sobre ellas obliga a tener especialmente en cuenta, en la planificación de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, el nivel de competencia cognitiva de los alumnos». (DCB, pág. 380)

Se resalta, también, el uso de los nuevos medios tecnológicos y las repercusiones que éstos han de tener en la manera de enseñar las Matemáticas y en la selección de sus contenidos.

Con respecto a la enseñanza, el nuevo currículum señala un cambio en contenidos y procedimientos, bien distintos de los tradicionales. Se distinguen tres tipos de contenidos: relativos al saber (hechos y conceptos), al saber hacer (procedimientos) y a los hábitos y predisposiciones que favorecen la actividad matemática (actitudes). Estos contenidos se seleccionan en función del doble carácter formativo e instrumental de las Matemáticas y se estructuran en torno a las ramas clásica de esta disciplina (Camino y Cañón, 1996, pág. 87).

En resumen, el enfoque adoptado en el DCB plasma una visión de la Matemática centrada fundamentalmente en la construcción social del conocimiento y una concepción de su enseñanza-aprendizaje centrada en el sujeto.

En cualquier caso, el hecho de tomar como punto de partida para la construcción del conocimiento matemático la propia experiencia y la reflexión sobre la misma con el fin de ir avanzando progresivamente hacia niveles más elevados de abstracción y de formalización lleva consigo importantes implicaciones para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Infantil y Primaria. El planteamiento expuesto en el DCB aconseja

«– conceder prioridad al trabajo práctico y oral, introduciendo únicamente las actividades descontextualizadas y el trabajo escrito (utilización de nociones simbólicas) cuando los alumnos muestren una comprensión de los conceptos matemáticos y un interés por los mismos;
– conceder prioridad al trabajo mental (y, en especial, al cálculo mental) con el fin de profundizar los conocimientos matemáticos intuitivos antes de pasar a su formalización;
– utilizar ampliamente actividades grupales de aprendizaje que favorezcan los intercambios, la discusión y la reflexión sobre las experiencias matemáticas;
– prestar especial atención al desarrollo de estrategias personales de resolución de problemas, potenciado la inclusión en las mismas de los conocimientos matemáticos que se vayan adquiriendo (representaciones gráficas y numéricas, registro de las alternativas exploradas, simplificación del problema,...);
– utilizar los distintos ámbitos de experiencia de los alumnos, escolares (otras áreas del currículo: conocimiento del medio, actividades físicas y deportivas, actividades artísticas, etc.) y extraescolares, como fuente de experiencias matemáticas». (DCB, pág. 387)

Brown y Borko (1992) señalan los criterios siguientes como necesarios para llevar a cabo una buena enseñanza de las matemáticas:

– Crear un **ambiente** de clase que sirva de apoyo a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
– Fijar objetivos y seleccionar y crear **tareas** matemáticas que ayuden a los estudiantes a conseguir estos objetivos.
– Estimular y dirigir el **discurso** del aula para que estudiantes y profesores tengan claro lo que hay que aprender.
– **Analizar** el aprendizaje de los estudiantes, las tareas matemáticas y el ambiente con vistas a tomar decisiones didácticas continuadas.

Según estos criterios, los algoritmos de cálculo, las manipulaciones de símbolos y la memorización de reglas no deben ya predominar en las matemáticas escolares; lo que debe predominar es el razonamiento matemático, la resolución de problemas, la comunicación y las conexiones.

2. CURRÍCULUM OFICIAL DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA

El currículum de la **Educación Infantil** se estructura en torno a las siguientes áreas o ámbitos de experiencia (artículo 6º):

a) Identidad y autonomía personal
b) Medio físico y social
c) Comunicación y representación

Dentro del área de Comunicación y Representación figuran las Matemáticas. El sentido fundamental del área es el de contribuir a mejorar las relaciones entre el individuo y el medio. Las distintas formas de comunicación y representación sirven de nexo entre el mundo interior y exterior al ser instrumentos que posibilitan la interacción, la representación y la expresión de pensamientos, sentimientos, vivencias, etc. (DCB, pág. 364)

La integración en una única área de las diversas formas de representación y comunicación no impide, en ningún caso, que cada una de ellas tenga un tratamiento específico. Las diferentes formas de representación no se limitan a ser vehículos de expresión, sino que pueden tener también efectos sobre el contenido que tratan de representar.

Estas formas incluyen la expresión gestual y corporal, el lenguaje verbal, la expresión plástica en sus diversas formas, la expresión musical, el lenguaje escrito y la forma de representación matemática.

La aproximación a los contenidos de la forma de representación matemática debe basarse, en esta etapa, en un enfoque que conceda prioridad a la actividad práctica, al descubrimiento de las propiedades y relaciones que el niño establece entre los objetos a través de su experimentación activa. Los contenidos matemáticos, al igual que todos los demás de esta área, serán tanto más significativos para el niño cuanto más posible le sea incardinarlos en los otros ámbitos de experiencia de la etapa (pág. 366). Los bloques de contenidos que hacen referencia al lenguaje matemático resaltan el carácter procedimental adecuado a la etapa, dejando la adquisición de sus códigos concretos para la etapa posterior. El bloque de matemáticas se recoge bajo el epígrafe *Relaciones, Medida y Representación en el espacio* (véase MEC, 1992a, págs. 46-49).

En el currículum de la **Educación Primaria**, los criterios elegidos para la selección y organización de los bloques de contenidos tiene su origen, por una parte, en el análisis efectuado sobre la naturaleza del conocimiento matemático, y, por otro, en el papel atribuido a su enseñanza y aprendizaje en el desarrollo global de los alumnos durante la Educación Primaria. Cuatro puntos merecen ser recordados a este respecto:

En primer lugar, el hecho de que las matemáticas son, ante todo, un poderoso instrumento de comunicación mediante el cual es posible representar, explicar y predecir la realidad de forma rigurosa, precisa y sin ambigüedades. De aquí la necesidad de que los alumnos adquieran, ya en el transcurso de la Educación Primaria, el dominio de algunas herramientas básicas para descifrar, interpretar y producir mensajes matemáticos, así como la capacidad para pasar de unos lenguajes de tipo verbal, gráfico y simbólico) a otros.

En segundo lugar, el reconocimiento de que las matemáticas poseen una estructura interna particularmente rica y coherente, de modo que todos sus elementos (conceptos, procedimientos, notaciones gráficas y simbólicas) están interconectados y resultan difíciles de entender por separado. En consecuencia, la construcción del conocimiento matemático en el transcurso de la Educación Primaria debe centrarse tanto en los conceptos y procedimientos básicos como en las relaciones existentes entre ellos.

En tercer lugar, la existencia en el edificio matemático de estrategias o procedimientos generales (por ejemplo, numerar, contar, ordenar, seriar, clasificar, representar, etc.) que permiten abordar una misma situación desde ópticas específicas diferentes y diferentes situaciones desde una misma óptica. La asunción de esta característica conduce a atribuir una importancia considerable al enfoque de resolución de problemas, desde el inicio mismo de la Educación Primaria, como una vía privilegiada para la adquisición y el dominio funcional de estas estrategias y procedimientos generales.

Por último, la necesidad de establecer una diferencia clara entre, por una parte, las características del conocimiento matemático ya elaborado (abstracción, formalización, simbolización) y, por otra, el proceso de adquisición de dicho conocimiento. Eso se concreta, en el caso de la Educación Primaria, en la exigencia de presentar los contenidos matemáticos a partir de la propia experiencia práctica de los alumnos para ir avanzando, progresivamente, hacia formas más abstractas y simbólicas.

Habida cuenta de las capacidades de los alumnos que se aspira a promover mediante la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Primaria, la consideración simultánea de estos puntos conduce a una propuesta de grandes bloques de contenido con múltiples interrelaciones entre sí y susceptibles, por lo tanto, de concretarse en agrupaciones temáticas muy diversas en los Proyectos Curriculares que se elaboren a partir de este Diseño Curricular Base.

Los bloques son agrupaciones de contenidos que presentan al profesor la información relativa a lo que se debería trabajar durante la etapa. Se señalan en ellos los contenidos que se consideran más adecuados para desarrollar las capacidades indicadas en los objetivos generales del área.

Estos bloques **no constituyen un temario**. No son unidades compartimentadas que tengan sentido en sí mismas. Su estructura responde a lo que se pretende que el profesorado tenga en cuenta a la hora de elaborar los Proyectos Curriculares de Centro y las Programaciones. El equipo docente de un centro decidirá cómo distribuirlos en los ciclos, secuenciándolos, y cada profesor seleccionará posteriormente los contenidos que va a desarrollar en su programación. El profesor atravesará los bloques eligiendo de cada uno de ellos los contenidos de cada tipo que considere más adecuados para la unidad didáctica que en ese momento vaya a desarrollar. Es importante tener en cuenta que, por lo tanto, el **orden de presentación de los bloques no supone una secuenciación** (véase MEC 1992b).

3. LA NECESIDAD DE UN NUEVO ENFOQUE EN EL APRENDIZAJE NUMÉRICO

3.1. ¿Qué pensar en la actualidad de la descripción que hizo Piaget de la génesis del número?

Para Piaget (1941), el desarrollo de la competencia numérica del niño se halla esencialmente relacionada con el desarrollo de su capacidad lógica. Tres pruebas le parecen cruciales:

- Prueba de la **conservación numérica**: cuando dos filas de fichas se encuentran en correspondencia "uno a uno", el adulto separa las fichas de una de las filas y pide al niño que compare las cantidades correspondientes. Antes de los 5-7 años, los niños creen que la fila más larga contiene más fichas que la que no ha sufrido transformación alguna; no se dan cuenta del truco perceptivo producido por la separación de las fichas.
- Prueba de la **seriación** de longitudes: el niño debe colocar unas varillas en orden de longitud creciente, formando una escalera.
- Por último, en una situación de reunión de dos conjuntos, se pide al niño que compare el todo con una de sus las partes (**inclusión de clases**).

Para Piaget, el niño que hace bien una de las pruebas anteriores hace bien las otras: hay un sincronismo entre la conservación numérica, la seriación y la inclusión. Además, el éxito que se observa entre los 6 y los 8 años en cada prueba es "operatorio", es decir, de naturaleza lógica.

Tras un minucioso análisis de todas las experiencias relativas a estas tareas, J. Bideaud (1985), en su tesis doctoral, concluye que:

- Ya no es posible aceptar un sincronismo entre la conservación numérica, la inclusión y la seriación.
- El problema crucial sigue siendo otro. Si, como se afirma a partir de los hechos experimentales presentados y analizados, ni la inclusión ni la seriación son operatorias, en el sentido piagetiano del término, antes de los 10-11 años, ¿qué sucede con la síntesis original que conduce al número?

3.2. ¿Qué pensar en la actualidad del enfoque conjuntista del número en la escuela?

En las instrucciones oficiales de 1970 se lee que el niño debe "elaborar el concepto de número natural". Los comentarios que acompañan a las instrucciones precisan el objetivo, ofreciendo ejemplos de actividades:

"Dos niños extienden sobre la mesa el contenido de sus estuches. Si se puede establecer la correspondencia "uno a uno" entre los objetos de ambos estuches (sin ocuparse de su naturaleza ni disposición), cabe concluir que hay tantos objetos en uno de los estuches como en el otro."

"Cuando se hayan realizado múltiples ejercicios de este tipo, los niños comprenderán que el número es una propiedad ligada a los conjuntos a través de un proceso similar al que les permite comprender que el color, por ejemplo, es una propiedad vinculada a los objetos."

"El empleo sistemático de la correspondencia "uno a uno" permite clasificar los conjuntos y atribuir a cada clase un número; así, la clase de todos los conjuntos que tengan tantos objetos como los dedos de la mano define el número natural *cinco*".

Esta descripción tiene el defecto de minimizar la importancia del lenguaje en el aprendizaje. La noción de "número" no precede al empleo de las palabras-número; más bien hay que considerar que el uso de las palabras número y, sobre todo, la práctica de contar, participan en el proceso de aprendizaje de los números.

3.3. ¿Cómo establecer un nuevo enfoque?

Con las últimas reformas curriculares, los números han recuperado su puesto –e, incluso, han aumentado su importancia– en la escuela infantil. Sin embargo, la falta de un marco teórico tiene el peligro de volver a los planteamientos pedagógicos anteriores a los años 70, excepto en aquellos países con tradición en pedagogía activa. Entonces, ¿cómo evitar los errores pasados en la creación de un nuevo marco teórico?

¿Cómo utilizar los trabajos de los psicólogos? En 1970, los psicólogos ya sabían que la **acción de contar** desempeña un papel importante en el desarrollo de la competencia numérica. El psicólogo francés P. Gréco (1962) había publicado en 1962 un estudio totalmente explícito en este sentido. Entre 1941 –fecha en que Piaget construyó su teoría de la génesis del número– y 1970, numerosos investigadores abordaron de nuevo este tema, y el estado de los conocimientos psicológicos no ofrecía un panorama tan uniforme como el que presentaron los reformadores.

Había acuerdo sobre la importancia de las aportaciones de Piaget, pero en 1970 sus trabajos eran ya objeto de críticas muy fundadas incluso de la propia escuela de Ginebra.

Para un reformador que quisiese rehabilitar la práctica de contar en la escuela infantil, sería muy grande la tentación de reclamar el padrinazgo exclusivo de la psicóloga americana Rachel Gelman, cuyos trabajos empiezan a darse a conocer en la década de los 80, lo cual implicaría no tener en cuenta los de Steffe y von Glasersfeld, P. Fisher y P. Carpenter y K. Fuson, cuyos puntos de vista suelen diferir de los de Gelman.

El plan que vamos a presentar para la escuela infantil, al igual que para la primaria, está basado en lo que preconizan las actuales propuestas curriculares: **un aprendizaje de las matemáticas por solución de problemas**. Para plantear el aprendizaje de los números mediante la solución de problemas, en principio hay que identificar los diversos usos de los números:

- sirven para comunicar cantidades o para retenerlas en la memoria;
- sirven también para calcular, es decir, para establecer una relación entre cantidades.

No hay que ver en esta división una jerarquía de dificultad. Desde el principio, hay que desarrollar una competencia en el cálculo aunque sólo concierna a un campo numérico restringido.

4. DOS FORMAS DE COMUNICAR CANTIDADES: LAS COLECCIONES DE MUESTRA Y LOS NÚMEROS

4.1. Cifras y palabras-número

- ¿De qué forma permiten los números representar cantidades?
- ¿Cuál es el mecanismo por el que los miembros de una comunidad consiguen comunicar cantidades de manera eficaz empleando los

números, ya sea de forma escrita (con cifras) u oral?

Para responder a estos interrogantes hay que distinguir dos aspectos en la representación de cantidades: escrito y oral.

En la **representación escrita** hay que considerar dos aspectos. Si se trata de una comunicación escrita, un **primer aspecto** consiste en explicar por qué, cuando se dibuja, por ejemplo, la cifra "6" para pedir por escrito un número de objetos, el interlocutor comprende la cantidad deseada; un **segundo aspecto** consiste en explicar que, al disponer las cifras "2" y "6", por ejemplo, en la forma "26" ó "62", se pueden comunicar cantidades más importantes. Al hablar de numeración escrita, nos referimos al estudio de este segundo aspecto: se trata de estudiar la representación escrita de las cantidades como sistema de escritura.

Hay que hacer la misma distinción en la **representación** de cantidades **de modo oral**. Un **primer aspecto** consiste en explicar que, al pronunciar ciertas palabras –"diez", por ejemplo–, se consigue comunicar de forma eficaz una cantidad. El **segundo aspecto** consiste en explicar que, al disponer las palabras "diez" y "siete", por ejemplo, en la forma "diecisiete", se pueden comunicar cantidades más importantes.

Se trata, por tanto, de estudiar la representación de cantidades en tanto que sistema oral de designación. Del mismo modo que hay que diferenciar los **números** de las **cifras** (que sirven para designar los números de forma escrita), es necesario diferenciar los números de las **palabras-número** (que sirven para designar los números de forma oral).

El problema esencial, en un primer momento, es saber cómo se aprende el niño que las cifras y las palabras-número representan cantidades.

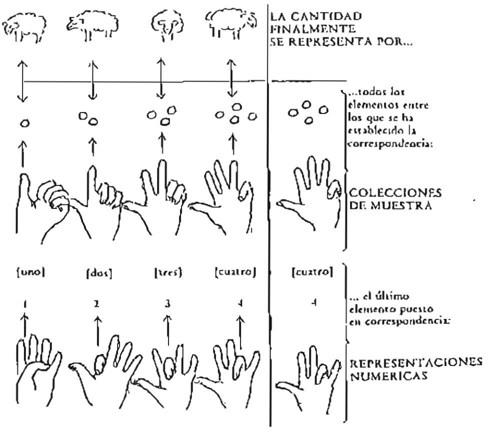
4.2. Colecciones de muestra y números

El número no es el único medio de que disponemos para retener cantidades en la memoria: también se pueden representar cantidades por medio de **colecciones de muestra**.

En estos dos medios de representar cantidades, el principio básico es la correspondencia "uno a uno". Si, en el caso de las colecciones de muestra, dicha correspondencia se realiza con piedras, trazos grabados sobre un soporte o dedos sucesivamente levantados, en el caso de la representación numérica, son las **palabras-número** (en una cuanta oral) o las **cifras** (en una numeración escrita) las que hay que poner en correspondencia "uno a uno" con las unidades de la cantidad que hay que representar.

Partiendo del ejemplo de la representación de una cantidad de 4 ovejas, la figura siguiente aclara varios procesos de correspondencia "uno a uno".

El principio básico es siempre la correspondencia "uno a uno". En cambio, la forma final de representación de la cantidad varía:



Tomado de Brissiaud, R. (1993, pág.32)

- en uno de los casos, la cantidad se representa por el conjunto de los elementos puestos en correspondencia "uno a uno", constituyendo lo que hemos denominado una **colección de muestra**;
- en el otro, la cantidad se representa por el último elemento puesto en correspondencia "uno a uno": son las **representaciones numéricas.**

No hay representación numérica posible sin la existencia de un orden convencional. Pero este orden deriva de una convención construida y transmitida de modo cultural tanto por lo que refiere a los dedos de la mano como a las palabras-número o a las cifras que empleamos.

Cuando una cantidad se representa por una colección de muestra, se representa de un modo muy similar a la forma en que se ha percibido: cuatro ovejas se representan por cuatro piedras, cuatro surcos sobre la corteza de un árbol o cuatro dedos levantados. Por eso se podría afirmar que la representación de una cantidad por una colección de muestra es una **representación analógica** de dicha cantidad. No es el caso de una representación numérica, pues una pluralidad se representa por un solo signo: una pluralidad de ovejas, por ejemplo, se representa mediante una sola palabra-número, una sola cifra o un único dedo bajado. Se trata en este caso de una **representación convencional** de la cantidad.

Hay que esperar entonces que la representación de cantidades por una colección de muestra sea más precoz que la representación numérica, por ser más accesible.

5. UN PRIMER PROCESO DE APRENDIZAJE: DE LA ACCIÓN DE CONTAR-NUMERAR A LA ACCIÓN DE ENUMERAR

5.1. La acción de contar-numerar y la acción de enumerar

Contar es establecer una correspondencia "uno a uno" entre los objetos de una colección y la lista de las palabras-número, respetando el orden convencional.

Esta definición es insuficiente, ya que sólo se refiere a los objetos de una colección como entidades que se pueden contar. Pero también se pueden contar grupos de objetos (3 pares de zapatos) y no sólo elementos aislados, acontecimientos sucesivos (5 campanadas de reloj), conceptos (los 7 pecados capitales)... De modo más general, para contar es necesario que la primera entidad contada, así como las siguientes, pueda emparejarse con la palabra-número [uno]: de este modo se puede contar todo lo que los sentidos y la razón nos permiten considerar de manera unificada, es decir, que sea uno.

Hay que distinguir **dos tipos de acciones de contar** según el significado que el niño atribuya a las palabras-número que pronuncia: la acción de contar-numerar y la de enumerar. En la primera, el niño no siempre sabe que hay que tomar como respuesta la última palabra-número pronunciada. En la segunda, la última palabra-número que pronuncia no es un simple número, sino que representa la cantidad de todos los objetos.

El paso de la acción de numerar-contar a la de enumerar es una transición difícil. El niño debe cambiar el significado de la palabra número para que represente la cantidad de todos los objetos:

Se pasa de "el siete" a "los siete"

O	O	O	O	O	O	O
"el uno"	*"el dos"*	*"el tres"*	*"el cuatro"*	*"el cinco"*	*"el seis"*	*"el siete"*

"los siete"

Se trata de un obstáculo lingüístico que no hay que subestimar.

Pero esta claro que llega un momento en que la última palabra-número pronunciada permite efectivamente al niño representar la cantidad correspondiente.

5.2. El papel de la percepción visual global de pequeñas cantidades en el acceso a la enumeración

Hacia los cuatro años y medio, el niño, cuando se le presentan colecciones de 1, 2 ó 3 objetos, suele ser capaz de pronunciar la palabra-número correspondiente sin contar los objetos. A este fenómeno nos referimos al hablar de **"percepción global de pequeñas cantidades"**. El niño tiene de este modo la posibilidad de observar que la palabra-número que hay que pronunciar para decir cuantos objetos hay –palabra-número obtenida por percepción global– es también con la que finaliza la acción de contar. Tomar conciencia de esta coincidencia puede desempeñar un papel importante en el aprendizaje.

El empleo de constelaciones facilita el acceso a la enumeración. Cuando los niños juegan con dados y dominós en los que las cantidades se representan por configuraciones de puntos que facilitan su reconocimiento, los niños aprenden con rapidez a denominarlas. Estas configuraciones se denominan **constelaciones**. Ahora bien, la constelación, como la cantidad, es una característica del conjunto.

5.3. Contar y usar constelaciones se complementan

Antes de 1970 había dos concepciones pedagógicas opuestas del primer aprendizaje numérico:

- la de los "pedagogos contadores", que preconizaban la práctica intensiva de la acción de contar;
- la de los "pedagogos visuales", que defendían el uso de constelaciones.

Con pequeñas cantidades, el niño progresa confrontando dos modos de tratar la información:

- la percepción visual global, que es una forma de tratamiento, muy rápida y simultánea;
- la acción de contar, que es una forma de tratamiento secuencial (que tiene lugar en el tiempo).

Estas dos formas de tratar la información presentan características distintas: una de ellas es apropiada para dar cuenta de la cantidad en su conjunto, y la otra, para hacerlo unidad a unidad.

5.4. Enseñar a contar

¿Cómo aprende el niño a establecer la correspondencia "uno a uno" entre los objetos de una colección y las palabras-número de la cancioncilla de los números? ¿Hay que ayudarle en este aprendizaje? ¿A qué edad?

Un niño **sabe contar** cuando sabe establecer la correspondencia "uno a uno" entre los objetos de una colección y las palabras-número de la cancioncilla de los números. En colecciones pequeñas, la capacidad de contar es precoz y, en la mayoría de los casos, el niño se sirve del índice para señalar. Así, Gelman observa que, a los 4 años de edad, hay más del 80% de aciertos en una colección de 5 objetos (siempre que contemos como acierto la acción de contar-numerar). En cambio, cuando el tamaño de la colección aumenta, es difícil para el niño establecer la correspondencia "uno a uno" de manera correcta.

Hay que distinguir **dos tipos de errores** al establecer la correspondencia "uno a uno" entre las palabras-número y los objetos:

– por falta de método;

– por descoordinación al señalar los objetos al recital la cancioncilla de los números.

El segundo tipo es más grave que el primero ya que en ausencia de la correspondencia "uno a uno" es imposible toda representación de cantidades.

Conclusión: Para ayudar al niño a acceder a la numeración proponemos:

–realizar actividades en las que el adulto recite la lista de los números en tanto que la tarea del niño consista en señalar los objetos correspondientes;

–realizar juegos de dados o de dominó e intervenir en el juego del niño para ayudarle a darse cuenta del doble significado de las palabras-número que designan las constelaciones.

6. UN SEGUNDO PROCESO DE APRENDIZAJE: DE LAS COLECCIONES DE MUESTRA DE DEDOS A LA ENUMERACIÓN

6.1. Representación mediante colección de muestra de dedos

Toda acción de contar no es una enumeración. Es más, no basta con saber numerar una colección para tener una representación correcta de las cantidades.

Un niño que sepa contar 8 objetos, pero que no sepa mostrar 8 dedos de forma directa, sin contar, no tiene un concepto correcto de las cantidades. Para él, hablar de una colección de 8 objetos no hace referencia a algo distinto de hacerlo de una colección de "H" objetos. Se ve obligado a construir la colección de dedos correspondiente para **sentir** la cantidad. Es, por tanto, importante desarrollar la capacidad de los niños para "sentir" las cantidades con los dedos de modo casi inmediato, sin contar.

Los dedos no son objetos como los demás, son un centro de sensaciones cinestésicas (unidas a la mayor o menor contracción de los músculos) que permiten controlar la cantidad independientemente de la visión.

Una colección de dedos es susceptible de proporcionar información de dos tipos: visual y cinestésica y táctil. Algunos niños saben representar las cantidades de 1, 2 y 3 objetos por una colección de dedos antes de saber contar las cantidades correspondientes.

6.2. La idea general de la progresión

Para dejar clara la idea general de la progresión, se puede emplear una analogía con los métodos de lectura:

- La progresión presentada en el epígrafe 3 correspondería a un método silábico, en el que la atención del niño se centra al principio en el código, antes de que el maestro le permita la lectura comprensiva.
- La progresión presentada en el epígrafe 4 se correspondería más bien con un método mixto: queremos que el niño construya primero el significado de la actividad antes de proporcionarle complejos instrumentos técnicos (como el silabeo) que le permitan acelerar el proceso de aprendizaje. Se trata, por tanto, en un primer momento, de instaurar la idea de que las palabras-número designan cantidades. Para ello, se trabaja en un campo limitado, el de las cantidades muy pequeñas, y se emplea el instrumento más sencillo: la representación de cantidades por una colección de muestra de dedos. En esta etapa, que llega hasta los cuatro años aproximadamente, hay que evitar que el niño cuente y, de modo más general, que emplee las palabras número como etiquetas numéricas.

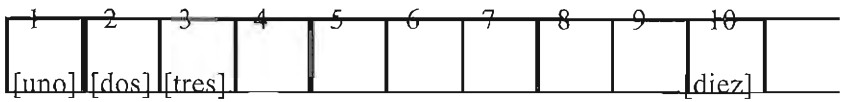
6.3. Conclusión

La característica principal de este proceso de aprendizaje es que en ningún momento debe el niño proceder a contar-numerar. Aprende a contar después, pero su primera acción de contar le permite representar la cantidad por la última palabra-número pronunciada: se trata de una enumeración.

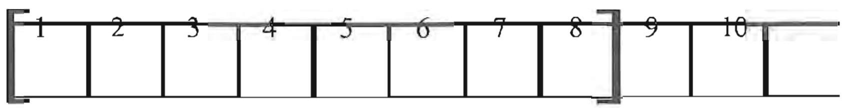
7. LOS PRIMEROS USOS DE LAS CIFRAS

¿Cómo aprenden los niños que las cifras, al igual que las palabras-número, no son solamente etiquetas numéricas, sino que también representan cantidades? El primer proceso de aprendizaje que se puede mencionar, según Brissiaud (1993, pág. 61), es un proceso de "traducción" de las palabras-número a cifras. Pero este proceso de traducción no permite por sí solo comprender cómo los niños aprenden a emplear las cifras.

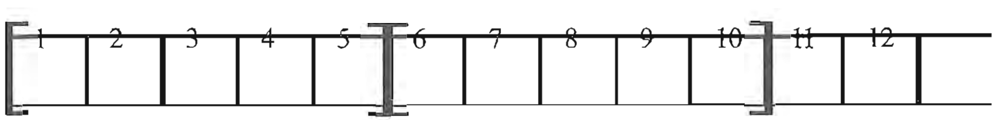
Una fila numérica escrita puede ayudar a la traducción de palabras-número a cifras (y viceversa), y sería recomendable que el maestro pusiera una fila numérica de referencia en la pared.



El empleo de la fila numérica escrita puede ayudar al niño a aprender el empleo de las cifras, pero el maestro debe estimular al máximo una "lectura acumulada" de la fila numérica. Con la mayor frecuencia posible debe dejar claro que si una casilla contiene la cifra "8" es porque "8 es todo esto":



Para proporcionar a los niños referencias de naturaleza cuantitativa, la separación entre series sucesivas de 5 casillas podrá resaltarse en rojo (entre el 5 y el 6, entre el 10 y el 11...). Al actuar así, no se concede una categoría particular a ciertas casillas (no se escribe "5" ó "10" en rojo), sino que se atribuye una categoría específica a la cantidad de 5 casillas.



Además, conviene que los niños se enfrenten con frecuencia a consignas escritas en las que la cifras designen cantidades, como, por ejemplo: "dibuja 6 flores", "dibuja 4 canicas"...

Más adelante veremos que el cálculo escrito favorece esta lectura de las cifras: una igualdad como "4 + 3 = 7" carece de sentido si lo que se ve en ella son relaciones entre números como etiquetas.

8. CONCLUSIÓN

Hemos distinguido **dos formas de comunicar cantidades**: las colecciones de muestra y los números.

Dos procesos de aprendizaje del número:

– El niño comienza a apropiarse de los aspectos convencionales de la representación numérica: aprende la "cancioncilla de los números" y a contar, es decir, a establecer una correspondencia "uno a uno" entre las palabras-número de ésta y los objetos de una colección. Al principio, la forma de contar es una acción de contar-numerar, pues la última palabra-número pronunciada es una etiqueta numérica que no designa la cantidad correspondiente.

– En el segundo proceso de aprendizaje, el niño comienza a representar cantidades pequeñas por medio de colecciones de muestra de dedos y nombrando dichas cantidades de modo directo, sin contarlas. El niño cuenta más tarde, pero, desde que empieza a hacerlo, sabe que la última palabra-número pronunciada permite representar la cantidad correspondiente: accede de forma directa a la enumeración.

Las constelaciones y las configuraciones de dedos no son colecciones de muestra comunes, pues permiten una representación rápida de la cantidad correspondiente gracias a la configuración espacial que se asocia a ellas.

No sería prudente enseñar a usar los dedos para resolver problemas aritméticos. En cambio, es del todo deseable que los niños aprendan a representar cantidades con los dedos de modo directo, sin contar.

Es un error creer que el niño debería "haber construido" la noción de cantidad antes de utilizar las palabras-número y las cifras. Es un error creer que el niño elabora los conceptos independientemente de los sistemas simbólicos que la cultura pone a su disposición. Como dijo Vigosky: "Las palabras no se limitan a expresar el pensamiento: lo hacen nacer".

9. CALCULAR

Del mismo modo que hemos definido dos formas de representar cantidades –la colecciones de muestra y el número–, vamos a distinguir dos formas de establecer relaciones entre cantidades: contar y calcular, que se diferencian del modo siguiente:

– Para determinar el resultado de una suma contando, los niños representan cada cantidad por medio de una colección de muestra de objetos antes de volver a contar el conjunto de objetos.

– El niño que calcula, en cambio, dirá directamente "nueve y cuatro son trece", o, de modo menos directo, "nueve y uno, diez y tres, trece". A esta forma de cálculo la llamaremos **cálculo pensado**.

9.1. La distinción entre contar y calcular

Los problemas aritméticos más sencillos son aquellos en los que se añade (o se quita) un determinado número de elementos a una cantidad inicialmente conocida: se trata de hallar el resultado de añadir o quitar una cantidad. Son dos tipos de problemas que nos servirán de ejemplo para distinguir la acción de contar de la de calcular.

Los niños resuelven problemas de suma y de resta antes de que haya tenido lugar cualquier tipo de aprendizaje del simbolismo aritmético, y emplean dos tipos de procedimientos, según señala Brissiaud (1993, pág. 83):

– procedimientos para contar que sugieren el uso de objetos con los que los niños imitan las transformaciones descritas en el enunciado;
– procedimientos de cálculo: el cálculo se define por la oposición de contar.

Calcular es establecer una relación directa entre cantidades a partir de sus representaciones numéricas, sin pasar por la construcción física de una o varias colecciones cuyos elementos se cuentan.

Una primera opción pedagógica consiste, por tanto, en distinguir dos campos de actividades numéricas:

– un campo muy amplio –puede contener los 30 primeros números– en el que los niños resuelven problemas por procedimientos en los que interviene la acción de contar, empleando colecciones de objetos;
– un campo más restringido en el que los procedimientos de cálculo son sistemáticamente los más importantes.

La función del maestro es permitir que el niño amplíe su campo de cálculo para que, al final, abarque por entero el campo en el que se cuenta.

Hay tres tipos de actividades que se pueden realizar de modo paralelo:

–aprender a calcular con los primeros números;
–resolver problemas contando, y
–aprender el simbolismo aritmético.

La independencia de estas actividades sólo puede ser relativa. Para comprender cómo pueden concurrir en un saber unificado en el niño, tenemos que estudiar de modo más preciso los procesos por los que el niño accede al cálculo, es decir, llega a ser capaz de establecer una relación directa entre cantidades a partir de su representación numérica, sin necesidad de contar los objetos.

9.2. Dos elementos del progreso hacia el cálculo

Aprender a calcular es un fenómeno complejo. Dos procesos parecen desempeñar un papel esencial:

– la mejora de la práctica de contar, y
– el empleo de colecciones de muestra organizadas.

Gracias al primero, los niños tienen cada vez menos necesidad de emplear objetos, ya que los sustituyen por palabras-número cuando cuentan. Gracias al segundo, los niños acceden al cálculo al pensar en colecciones de muestra organizadas que pueden ser configuraciones de dedos o constelaciones.

dos o constelaciones.

Ambos procesos son necesarios para que los niños puedan acceder a la forma de cálculo que puede parecer la más completa, que los anglosajones denominan "cálculo pensado", donde el término "pensado" se opone al de "sistemático". Ahora bien, el cálculo pensado se debe enseñar, ya que pocos niños lo usan de modo espontáneo.

La división pedagógica de las actividades que se han de llevar a cabo presenta la siguiente progresión:

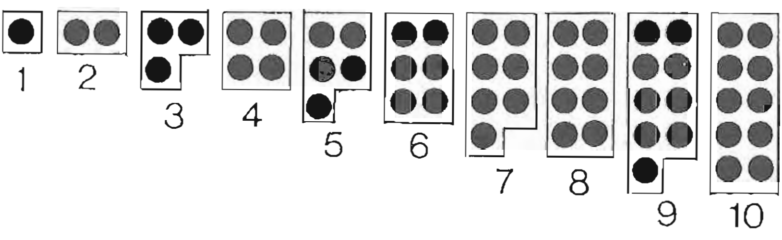
- aprendizaje del cálculo con la ayuda de colecciones de muestra organizadas;
- solución de problemas por procedimientos en los que se cuenta;
- utilización de la escritura aritmética y enseñanza del cálculo pensado;
- la numeración y la adición de números de dos cifras.

10. EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO CON COLECCIONES DE MUESTRA ORGANIZADAS

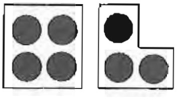
Vamos a hacer referencia a dos ayudas para el aprendizaje: las constelaciones y las regletas de Cuisenaire.

El uso de constelaciones

El material pedagógico más conocido lo constituyen las plaquitas de la Sra. Herbinière Lebert, material que se puede construir con material Prismaker.



El reconocimiento rápido del número representado deriva del agrupamiento de 2 en 2, y las relaciones numéricas se esquematizan por la yuxtaposición de plaquitas:



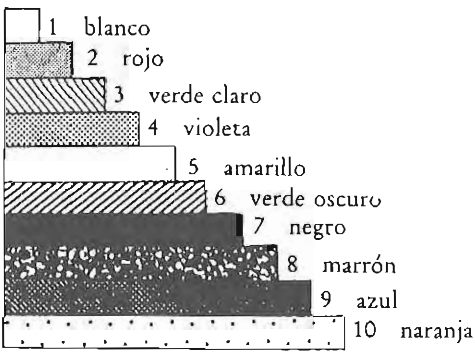
"Cuatro y tres es igual a 7"

El niño no necesita "volver a contar todo", ya que reconoce la plaquita-suma. Estas plaquitas sirven para ilustrar las relaciones numéricas, y, aunque el niño puede volver a contarlo todo, se le invita a ir más deprisa al reconocer las plaquitas utilizadas.

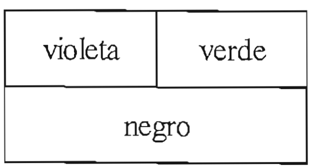
El empleo de constelaciones no se limita al de la utilización de ese material. De hecho, hay dos grandes clases de constelaciones, según que se emplee el agrupamiento de 2 en 2 ó de 5 en 5, y que corresponde, asimismo, a las dos grandes clases de procedimientos de cálculo pensado: utilización de 5 y del 10 y utilización de números dobles.

El uso de las regletas de Cuisenaire o los números de colores

El reconocimiento rápido del número representado se relaciona con el conocimiento de un código de colores:



También en este caso, las relaciones numéricas se esquematizan por la yuxtaposición de regletas:



"Cuatro mas tres es igual a siete

Aquí el niño no tiene la posibilidad de "volver a contar todo", ya que no hay divisiones unitarias. Para evitar que los niños cuente unidad a unidad, la solución pedagógica propuesta es radical: se suprime todo lo que pueda servir de apoyo para la acción de contar.

En tanto que las constelaciones ilustran las relaciones numéricas, las regletas de Cuisenaire se presentan como un medio de "verificar" dichas relaciones, siendo además un material autocorrector.

Piaget distinguía dos usos del material de Cuisenaire, y decía que "...es excelente cuando se emplea con una perspectiva activa y operatoria, rativos predominan sobre las combinaciones operativas".

Con los niños de la escuela infantil, el riesgo de un aprendizaje fundamentalmente perceptivo es aún mayor, debido a la total ausencia de divisiones unitarias en las regletas; la regleta negra se llama "siete" porque se yuxtapone a 7 unidades de cubo, pero en ningún momento la regleta está dividida en estas 7 unidades. Ahora bien, el niño pequeño asocia más fácilmente la palabra-número "siete" a una colección de 7 unidades que a una regleta que sólo se yuxtapone a 7 unidades, pero que no está constituida por éstas.

Con el material Prismaker se pueden construir regletas, aunque con divisiones unitarias, y en las que la gama de colores no es tan amplia. Hemos elegido el color blanco para el 1 y el 7; el azul para los múltiplos de 2: 2, 4 y 8; el rojo para los múltiplos de 3: 3, 6 y 9; por último, el verde para el 5 y el 10.

11. EL SIMBOLISMO ARITMÉTICO (+, –, :, =) Y LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO PENSADO

La utilización del simbolismo aritmético no es indispensable para el aprendizaje del cálculo ni para la resolución de problemas.

Antes de 1970 se enseñaba el uso de la escritura como:

7 canicas + 6 canicas = 13 canicas

En esta igualdad, el signo "+" que precede a "6 canicas" es la indicación de lo que se quiere hacer con esta magnitud. Es decir, esta igualdad cuenta una historia de manera abreviada: "Tengo 7 canicas, añado 6 canicas (he ganado 6, he comprado 6...) y ahora tengo 13 canicas".

Si examinamos la igualdad "9 canicas – 6 canicas = 3 canicas", inmediatamente nos surge lo siguiente: "Tengo 9 canicas de las que quito 6 (porque las pierdo, las regalo...) y me quedan 3".

Los reformadores de 1970 llevaron a cabo una crítica fundamental de esta práctica pedagógica: el enseñar el signo "–" como una simple abreviación taquigráfica de la palabra "quito", se crea un obstáculo importante para el uso de la resta en el caso en que esta operación no sirva para hallar el resultado de quitar una cantidad.

En efecto, examinaremos este otro problema de búsqueda de un complemento. "Tengo 6 canicas. Juego una partida, y después de la partida tengo 9 canicas. ¿Cuántas he ganado?"

También en este caso, la solución esperada es la igualdad anterior:

9 canicas – 6 canicas = 3 canicas

He ganado canicas, ya que tengo más, y, sin embargo, ¡hay que escribir "–"! Esto nos indica la necesidad de enseñar "los otros sentidos de la resta": la resta para buscar un complemento y la resta para comparar dos cantidades. Igualmente, se han de enseñar "los otros sentidos de la suma", como, por ejemplo, que la suma nos permite conocer el estado de una cantidad antes de una pérdida: "Pedro pierde 6 canicas; ahora tiene 7. ¿Cuántas tenía antes de jugar?" El estudiante que ha aprendido que el signo "+" corresponde a una ganancia tendrá muchas dificultades para escribir:

7 canicas + 6 canicas = 13 canicas

en un problema en que se han perdido 6 canicas.

La escritura aritmética no es una simple transcripción del lenguaje ordinario. Si el único objetivo es que los niños sepan hallar el resultado de añadir o quitar una cantidad a otra, ¿por qué no se emplean las palabras "añado" y "quito", reservando el uso de los signos "+" y "–" para cuando el niño sepa comprender que una misma igualdad se aplica a problemas que se enuncian de modo muy diverso en el lenguaje ordinario?

Hoy día se recomienda establecer una diferencia clara entre escritura aritmética y lenguaje ordinario debido a que la escritura aritmética tiene cierta autonomía con respecto al lenguaje ordinario: un mismo signo puede aplicarse a problemas que se enuncian de forma distinta en el lenguaje ordinario.

Otra recomendación consiste en enseñar la igualdad numérica para ayudar a aprender a calcular en un contexto que tiene la dos propiedades siguientes:

- En una igualdad numérica, las cantidades se representan por medio de cifras y no de colecciones.
- En una igualdad numérica, las "reglas del juego" son conocidas (desde el momento en que el niño sabe leer la igualdad numérica).

Cuando un niño sabe, por ejemplo, leer una igualdad numérica incompleta, posee un nuevo lenguaje simbólico que permite que le pongan ejercicios, aunque sean rudimentarios, que le inciten a calcular. Se acaban las colecciones dibujadas que les inducen a contar y las situaciones descritas en lenguaje ordinario que requieren el empleo de colecciones para "recrear mentalmente" la situación.

Hoy día se sabe que la representación de una situación concreta suele requerir el uso de material, en cuyo caso, se convierte en un obstáculo para el cálculo. Nunca es interesante que un niño cuente cuando podría resolver el mismo problema por un procedimiento de cálculo, aunque, para resolver un problema complejo (uno de los llamados de resta, de división o de multiplicación), los niños necesiten durante mucho tiempo contar los elementos de una colección de muestra, aun cuando las cantidades empleadas sean pequeñas.

Las colecciones de muestra y los procedimientos en los que se cuenta sirven tanto para hallar la solución numérica de un problema como para re-presentar la situación descrita en el enunciado, y, cuando ésta es compleja, la representación es indispensable.

Este tipo de solución presenta dificultades específicas sensiblemente diferentes de las que encuentra el alumno más mayor, que deberá utilizar las operaciones aritméticas correspondientes.

12. MÁS ATENCIÓN AL SENTIDO Y SIGNIFICADO QUE A LOS ENFOQUES TRADICIONALES

Los programas de la enseñanza tradicional hacían que los niños estudiaran de pasada los aspectos conceptuales de una nueva operación aritmética. En este caso, aprender las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división no implicaban una base conceptual extensiva basada en una variedad de situaciones y en una diversidad de (re)presentaciones (por ejemplo, modelos físicos con bloques, dibujos, etc.). Como consecuencia de ello, muchos niños no construían una rica y profunda comprensión de estas operaciones y sus conexiones con otras operaciones y aplicaciones del mundo real (Baroody y Standifer, 1993; Kouba y Franklin, 1993).

En el enfoque propuesto en la "Matemática Moderna", se prestaba más atención al apuntalamiento conceptual de las cuatro operaciones aritméticas básicas que en el enfoque mecánico tradicional. Sin embargo, esta atención llevó a una manera determinada de concebir y presentar estas operaciones aritméticas, a saber, como operaciones lógicas en conjuntos discretos (por ejemplo, la adición como unión de dos conjuntos, y la sustracción como la separación de un subconjunto de un conjunto mayor). Además, las experiencias del mundo real fueron sustituidas rápidamente por ejercicios de lápiz y papel con los diagramas de Venn (Vershaffel, 1995).

En los actuales documentos de reforma (MEC, 1989, 1992), se aboga por una fase conceptual más extensa exponiendo a los alumnos a una gama más amplia de situaciones modelo de una determinada operación aritmética. En la literatura de educación matemática se describen muchas formas diferentes de categorizar las situaciones aditivas y multiplicativas.

12.1. Clasificación de situaciones de adición y sustracción

Las investigaciones sobre la adición y la sustracción de números enteros ha dado como resultado un inventario y clasificación de las diferentes clases de situaciones de problemas verbales que implican la adición y la sustracción. La clasificación más extensamente utilizada en la literatura reciente distingue tres categorías básicas de situaciones-problema: cambio, combinación y comparación (Fuson, 1992; Riley, Heller y Greeno, 1983; Vershaffel y De Corte, 1993).

Los problemas de **cambio** se refieren a situaciones activas o dinámicas en las que un hecho cambia el valor de la cantidad inicial.

Los problemas de **combinación** se refieren a situaciones estáticas consistentes en dos cantidades que son consideradas por separado o juntas.

Los problemas de **comparación** implican dos cantidades que son comparadas y la diferencia entre ellas.

Cada una de estas tres categorías básicas de situación-problema puede ser subdividida dependiendo de la identidad de la cantidad desconocida y dar origen a una variedad de tipos de problemas verbales de adición y sustracción, que se presentan en la tabla 1. En la última década, muchas investigaciones han analizado el nivel de dificultad de los diferentes tipos de problemas de adición y sustracción. Estos estudios han mostrado de forma convincente que estos distintos tipos de problemas difieren significativamente, en cuanto al nivel de dificultad, del tipo de estrategias utilizadas por los niños para resolver estos problemas y la naturaleza de sus errores (Fuson, 1992; Vershaffel y De Corte, 1993).

Nombre	Ejemplo	Situación	Desconocido	Dirección
Ca1	Pedro tenía 3 manzanas. Ana le dio 5. ¿Cuántas manzanas tiene Pedro ahora?	Cambio	Conjunto resultado	Aumento
Ca2	Pedro tenía 8 manzanas. Le dio a Ana 3. ¿Cuántas manzanas tiene Pedro ahora?	Cambio	Conjunto resultado	Disminución
Ca3	Pedro tiene 3 manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene que pedir a Ana para tener 8?	Cambio	Conjunto cambio	Aumento
Ca4	Pedro tiene 8 manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene que darle a Ana para tener 3 manzanas?	Cambio	Conjunto cambio	Disminución
Ca5	Pedro tenía algunas manzanas. Ana le dio 3. Ahora tiene 8 manzanas. ¿Cuántas manzanas tenía Pedro al principio?	Cambio	Conjunto inicial	Aumento
Ca6	Pedro tenía algunas manzanas. Le dio 3 a Ana. Ahora Pedro tiene 5 manzanas. ¿Cuántas manzanas tenía Pedro al principio?	Cambio	Conjunto inicial	Disminución
Co1	Pedro tiene 3 manzanas. Ana tiene 5 manzanas. ¿Cuántas manzanas tienen entre los dos?	Combinación	Super Conjunto	–
Co2	Pedro y Ana tiene 8 manzanas entre los dos. Pedro tiene 3 manzanas. ¿Cuántas tiene Ana?	Combinación	Subconjunto	–
Cp1	Pedro tiene 8 manzanas. Ana tiene 3 manzanas. ¿Cuántas manzanas más que Ana tiene Pedro?	Comparación	Conjunto diferencia	Más
Cp2	Pedro tiene 8 manzanas. Ana tiene 3 manzanas. ¿Cuántas manzanas menos que Pedro tiene Ana?	Comparación	Conjunto diferencia	Menos
Cp3	Pedro tiene 3 manzanas. Ana tiene 5 manzanas más que Pedro. ¿Cuántas manzanas tiene Ana?	Comparación	Conjunto comparado	Más
Cp4	Pedro tiene 8 manzanas. Ana tiene 3 manzanas menos que Pedro. ¿Cuántas manzanas tiene Ana?	Comparación	conjunto comparado	Menos
Cp5	Pedro tiene 8 manzanas. Tiene 3 manzanas más que Ana. ¿Cuántas manzanas tiene Ana?	Comparación	Conjunto referencia	Más
Cp6	Pedro tiene 5 manzanas. Tiene 3 manzanas menos que Ana. ¿Cuántas manzanas tiene Ana?	Comparación	Conjunto Referencia	Menos

Ca= cambio; Co= combinación; Cp= comparación.

Varios investigadores, tales como De Corte y Vershaffel (1985) y Willis y Fuson (1984), han enseñado con éxito a niños pequeños a utilizar diagramas esquemáticos para modelar las diferentes clases de situaciones en los problemas de cambio, comparación y combinación, antes de seleccionar y llevar a cabo un procedimiento aritmético adecuado.

12.2. Clasificación de las situaciones de multiplicación y división

Se han realizado también clasificaciones de situaciones-problema de multiplicación y división (Greer, 1992; Nesher, 1988; Vergnaud, 1983). En la tabla 2 presentamos algunas categorías recurrentes en todas estas clasificaciones. Se hace una distinción, más o menos generalmente aceptada, entre situaciones que son "psicológicamente" conmutativas y no conmutativas (Greer, 1992). En este último caso, el multiplicador y el multiplicando pueden distinguirse: una de las cantidades implicadas en la multiplicación (a saber, el multiplicador) es conceptualizada como operando en la otra (el multiplicando) para producir el resultado. Con respecto a la división, implican que pueden distinguirse dos tipos de división: división por el multiplicador, o división "partitiva", y división por el multiplicando, o "división cociente". En una situación conmutativa, es imposible distinguir entre multiplicador y multiplicando, y, concretamente, entre los dos tipos de división.

Tabla 2. Ejemplos de situaciones de problemas asimétricos y simétricos modelados por la multiplicación y división (Greer, 1992)

Situaciones de problemas asimétricos

Grupos iguales

- 3 chicos tienen cada uno de ellos 4 naranjas. ¿Cuatas naranjas tienen en total?
  (problema de multiplicación)
- 12 naranjas son compartidas a partes iguales por 3 chicos. ¿Cuántas tiene cada uno?
  (división por el multiplicador)
- Si tienes 12 naranjas, ¿a cuántos chicos puedes dar 4 naranjas?
  (división por el multiplicando)

Comparación multiplicativa

- Pete tiene 3 manzanas. Ann tiene 5 veces más manzanas que Pete. ¿Cuántas manzanas tiene Ann?
  (problema de multiplicación)
- Pete tiene 15 manzanas. Ann tiene 5 veces menos manzanas que Pete. ¿Cuántas manzanas tiene Ann?
  (división por el multiplicador)

– Pete tiene 3 manzanas. Ann tiene 15 manzanas. ¿Cuántas veces tiene Ann el número de manzanas de Pete?
(división por el multiplicando)

Situaciones de problemas simétricos

Modelo rectangular
– ¿Cuál es el área de un rectángulo de 3 metros de largo y 5 de ancho?
(problema de multiplicación)
– Si el área de un rectángulo es 15^2 m y la longitud es 3 metros, ¿cuál es la anchura?
(problema de división)

Producto cartesiano
– Si hay 3 rutas desde A a B y 4 rutas desde B a C, ¿cuántas maneras diferentes hay de ir de A a C pasando por B?
(problema de multiplicación)
– Si hay 12 rutas diferentes desde A a C pasando por B, y 3 rutas desde A hasta B, ¿cuántas rutas hay desde B hasta C?
(problema de división)

En cuanto a la adición y substracción, programas instruccionales y libros de texto recientemente elaborados proporcionan a los niños muchas oportunidades para explorar estos diferentes tipos de situaciones problema ya en las primeras etapas del proceso de aprendizaje y antes de empezar a adquirir los datos numéricos y los procedimientos para la multiplicación y la división (véase, por ejemplo, el estudio de Ter Heege,1985).

12.3 Variedad y flexibilidad de representaciones (externas)

Mientras aumentan la variedad de los tipos de situaciones con que los niños se encuentran con vistas a reforzar su comprensión conceptual de las operaciones aritméticas, los profesores deben asegurarse de que todas estas situaciones se asocien fácilmente con los diferentes tipos de representaciones (externas) (Greer, 1992; Kouba y Franklin, 1993). Por tanto, al construir estos enlaces conceptuales entre situaciones y operaciones, se necesita una rica y flexible variedad de representaciones, entre las que se incluyan:

1) guiones basados en la experiencia en los que el conocimiento se organice en torno a hechos del mundo real u obras dramáticas,
2) objetos manipulativos,
3) dibujos y diagramas,
4) lenguaje hablado, y

5) símbolos escritos.

Sólo después de que los niños hayan tenido una amplia y variada experiencia describiendo, representando y explorando situaciones aditivas y multilplicativas dramática, física, pictórica, verbal y simbólicamente es cuando tiene sentido introducir la escritura de frases numéricas abstractas que involucren estas situaciones.

Este enfoque contrasta fuertemente con el enfoque tradicional que obliga a los niños ya a una edad muy temprana a representar y resolver todo tipo de situaciones de una manera uniforme, formal y abstracta, por ejemplo, escribiendo frases numéricas canónicas con los números y operaciones "ocultos" en el problema. Los efectos negativos de esta práctica son puestos de manifiesto por estudios de problemas generados por alumnos para frases numéricas dadas así como investigaciones de las frases numéricas que los niños construyen para problemas verbales dados. En efecto, este trabajo muestra que muchos niños no tienen una comprensión clara de cómo los números y signos operativos de una frase numérica aritmética formal se relacionan con sus comprensión intuitiva de los objetos y relaciones involucrados en la situación o con sus estrategias informales de resolución (Carpenter, Hiebert y Moser, 1983; Verschaffel y De Corte, en prensa).

Como han señalado varios autores (Becker y Selter, 1996; Cobb, 1995; Gravemeijer, 1994), estas diferentes formas de representaciones (externas) –tales como objetos manipulativos, dibujos esquemáticos, fotografías de situaciones de la "vida diaria", problemas de palabras, etc.– no siempre son válidas en sí mismas. Por el contrario, los significados que se pretenden y la manera en que han de utilizarse deben ser construidos por el estudiante. Así, estas ayudas de aprendizaje y enseñanza están dotadas de materia adicional que ha de ser aprendida por los estudiantes. El artículo de Becker y Selter (1996) contiene varias ilustraciones de cómo este estatus ambivalente de representaciones (externas) puede representar posibles fuentes de dificultades de aprendizaje, especialmente si los profesores no son muy sensibles a esta cuestión.

REFERENCIAS

BAROODY, A. & STANDIFER, D. J. (1993): Addition and Subtraction in the Primary Grades. En R. J. Jensen (ed.) *Research Ideas for the Classroom. Early Childhood Mathematics*, págs. 72-102. New York: Macmillan.

BECKER, J. P. & SELTER, C. (1996): Elementary School Practices. En *International Handbook of Mathematics Education*, págs. 511-564. London: Kluwer.

BIDEAUT, J. (1985) *Étude du dévelopement des notions logiques élémentaires*. Tesis doctoral. Universidad de Paris V. R. Rescartes.

Boletín Oficial del Estado nº 216 del 9 de septiembre de 1991.

BRISSIAUD, R. (1993): *El aprendizaje del cálculo*. Madrid: Visor.

BROWN, C. & BORKO, H. (1992): Becoming a Mathematics Teacher. En Grouws, D.A. (Ed): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, págs. 209-236. New York: Macmillan.

CALLEJO, M.L. y CAÑÓN, C. (1996): Cambios epistemológicos en Educación Primaria en España desde 1970. En Giménez, Llinares y Sánchez (Eds): *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*, págs. 65-96. Granada: Mathema.

CARPENTER, T., HIEBERT, J. & MOSER, J. M. (1983): The Effect of Instruction on Children's Solutions of Addition and Subtraction Word Problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14, págs. 55-72.

COBB, P. (1995): Cultural Tools and Mathematical Learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, págs. 362-385.

DE CORTE, E. & VERSCHAFFEL, L. (1985): Working with Simple Word Problems in Early Mathematics Instruction. En L. Streefland (de.) *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 1. Individual Contributions*. Research group on Mathematics Education and Educatinal Computer Centre, Subfaculty of Mathematics, University of Utrecht, Utrecht, The Nederlands, págs. 304-309.

FUSON, K. (1992): Research on Whole Number Addition and Subtraction. En D. A. Grouws (de.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, págs. 243-275. New York: Macmillan.

GRAVEMEIJER, K. P. E. (1994): Number Sense as Situated Knowing in a Conceptual Domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, págs. 170-218.

GRÉCO, P (1962): Quantité et qualité. En P. Gréco, A. Morf. *Structures numériques élémentaires*. Paris: PUF.

GREER, B. (1992): Multiplication and Division as Models of Situations. En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, págs. 276-295. New York: Macmillan.

KOUBA, V. & FRANKLIN, K. (1993): Multiplication and Division: Sense Making and Meaning. En R. J. Jensen (ed.) *Research Ideas for the Classroom. Early Childhood Mathematics*, págs. 103-126. New York: Macmillan.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1989): *Diseño Curricular Base*. Madrid: MEC.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1992a): *Proyecto Curricular de la Etapa Infantil*. Madrid: MEC.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1992b): *Proyecto Curricular. Área de Matemáticas. Primaria*. Madrid: MEC.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM) (1989): *Curriculum and Evaluation Standards for Schools Mathematics*. Reston, VA. [Traducción al castellano en 1991 con el título: *Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática*. SAEM, Thales, 1991.]

NESHER, P. (1988): Multiplicative School Word Problems. Theoretical Approaches and Empirical Findings. En J. Hiebert & M. Behr (eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle grades*, págs. 19-40. Erlbaum, Hillsdale, NJ.

PIAGET, J. y SKERMINSKA, A. (1941): *La genèse du nombre chez l'enfant*. Neufchâtel: Delachaux et Niesthé, 1967. *Génesis del número en el niño*. Traducción de M. Riani. Buenos Aires: Guadalupe, 1967.

RILEY, M. S., GREENO, G. J. & HELLER, J. I. (1983): Development of Chidren's Problem-Solving Ability in Arithmetic. En H. P. Ginsburg (de.) *The development of Mathematical Thinking*, págs. 153-196. New York: Academic Press.

TER HEEGE, H. (1985): The Acquisition of Basic Multiplication Skills. *Educational Studies in Mathematics*, 16, págs. 375-389.

VERGNAUD, G. (1983): Multiplicative Structures. En R. Lesh & M. Landau (eds.) *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, págs. 127-174. New York: Academic Press.

VERSCHAFFEL, L. (1995): Visies op Reken/Wiskundeonderwijs op de Basisschool [Perspectives of Mathematics education in the Primary School]. En L.. Verschaffel & E. De Corte (eds.) *Naar een nieuwe reken/wiskundedidactiek voor de basisschool en de basiseducatie. Deel I. Achtergronden* [Toward a New Approach of Mathematics Education. Part I. Theoretical Backgrounds and Perspectives], págs. 95-128. Brussel: Studiecentrum voor Open Hoger Afstandsonderwijs (StOHO).

VERSCHAFFEL, L. & DE CORTE, E. (1993): A Decade of Research on Word Problem-Solving in Leuven: Theoretical, Methodological and Practical Outcomes. *Educational Review*, 5, págs. 239-256.

VERSCHAFFEL, L. & DE CORTE, E. (1996): Number and Arithmetic. En Bishop et al. (eds.). *International Handbook of Mathematics Education*, págs. 99-137. London: Kluwer.

WILLIS, G. B. & FUSON, K. C. (1988): Teaching Children to Use Schematic Drawings to Solve Addition and Subtraction Word Problems. *Journal of Educational Psycology*, 80, págs. 192-201.