Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2022, nº 110, 77-101*

Fórmulas que generan números primos

Juan Fernández Sánchez
I.E.S. "Valle del Almanzora" (Cantoria), Almería
juanfernandez@ual.es
Rocío Sánchez Alcalde
Graduada en Matemáticas, Universidad de Almería
rociosancheeez@gmail.com
Manuel Úbeda Flores
Departamento de Matemáticas, Universidad de Almería
mubeda@ual.es

Resumen: *Gracias a Euclides, es conocido desde hace más de dos mil años que existen infinitos números primos. Desde entonces, numerosas demostraciones lo han probado de diferentes maneras. Además, se han desarrollado fórmulas que permiten la generación de los números primos. El objetivo de este trabajo es hacer un compendio de las principales fórmulas generadoras de números primos, que permiten su obtención utilizando diferentes técnicas.*
Palabras clave: *fórmulas generadoras, número primo, Teorema Pequeño de Fermat, Teorema de Wilson.*

Formulas that generate prime numbers

Summary: *Thanks to Euclid, it has been known for more than two thousand years that there are infinite prime numbers. Since then, numerous proofs have proven this fact in different ways. In addition, formulas have been developed that allow the generation of prime numbers. The objective of this work is to make a compendium of the main formulas, which allow obtaining the prime numbers by using different techniques.*
Keywords: *generating formulas, prime number, Fermat's Little Theorem, Wilson's Theorem.*

1. INTRODUCCIÓN

Los números primos juegan un papel importante en la teoría de números (véanse, por ejemplo, Crandall y Pomerance (2005) y Narkiewicz (2000). Es un hecho conocido que existen infinitos números primos (para una revisión de algunas demostraciones, véanse, por ejemplo, de Amo y otros (2013), Hardy y Wright (1979) y Ribenboim, 2004), y que no existe un polinomio que proporcione todos los números primos. También se sabe que no existe un polinomio no constante que solo tome valores primos (véase Ribenboim, 2004).

Ahora bien, ¿existe una "fórmula" restringida a un polinomio medio? ¿Podemos usar signos de suma, factoriales y la función parte entera en nuestra "fórmula"? Si es así, entonces, de hecho, hay fórmulas para los números primos, si bien, algunas son muy poco prácticas. Para una introducción a algunas fórmulas conocidas, puede consultarse, por ejemplo, Guy (2004) y Ribenboim (2004).

Para determinar los números primos, es natural pedir funciones $f(n)$ definidas para todos los números naturales $n \geq 1$, que sean manejables en la práctica y que produzcan algunos o todos los números primos.

En su libro, Hardy y Wright (1979) se preguntan lo siguiente:

1. ¿Existe una fórmula para el n-ésimo número primo?
2. ¿Existe una fórmula para un número primo en términos de los primos anteriores?

Si denotamos por p a un número primo, y p_n al n-ésimo número primo, Ribenboim (2004) sugiere que para tales fórmulas debería verificarse una de las siguientes condiciones:

1. $f(n) = p_n$ para todo $n \geq 1$;
2. $f(n)$es siempre un número primo; y si $n \neq m$, entonces $f(n) \neq f(m)$;
3. el conjunto de los números primos es igual al conjunto de valores positivos adoptados por la función.

Tras unos preliminares sobre notación y resultados conocidos que necesitaremos, nuestro objetivo en este trabajo es la reunión de fórmulas (o funciones) que permiten generar números primos y que las clasificamos dependiendo de su tipología.

2. PRELIMINARES

Comenzamos esta sección aportando algunas definiciones y cierta notación que utilizaremos a lo largo de la siguiente sección.

- Se denota por mcd(m,n) al máximo común divisor de los enteros m y n.
- Para cualquier número real x, se definen las funciones

$$sg(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0, \\ 1 & si\ x > 0 \end{cases} \quad y \quad \overline{sg}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0. \end{cases}$$

- Para cada número real $x > 0$, denotamos por $\pi(x)$ al número de primos p tal que $p \leq x$.
- Sea $\lfloor x \rfloor = \text{máx}\{k \in Z \mid k \leq x\}$, es decir, el mayor de los enteros menor o igual que x.
- Dados dos números x e y, se define $x \ominus y$ como

$$x \ominus y := \begin{cases} x - y & si\ x \geq y, \\ 0 & si\ x < y. \end{cases}$$

- Dado un número natural $n \geq 3$, se define la función f_n como

$$f_n := \begin{cases} 1 & si\ n\ es\ primo, \\ 0 & si\ n\ es\ compuesto. \end{cases}$$

- Sea μ la función de Möbius, la cual se define de la siguiente manera:

$$\mu(n) := \begin{cases} \mu(1) = 1 \\ si\ n\ es\ el\ producto\ de\ r\ primos\ distintos,\ entonces\ \mu(n) = (-1)^r, \\ si\ el\ cuadrado\ de\ un\ primo\ divide\ a\ n,\ entonces\ \mu(n) = 0. \end{cases}$$

Además, los siguientes resultados son fundamentales para las demostraciones de las fórmulas que presentaremos en la siguiente sección. El primero de los resultados es el conocido como "postulado de Bertrand".

2.1. Teorema 1 (Bertrand, 1845)

Entre $n \geq 2$ y $2n$ siempre hay un número primo, esto es, $p_{n+1} < 2p_n$.

No reproducimos aquí la demostración de este postulado, ya que requiere de herramientas analíticas que no son el objetivo de este trabajo. La primera demostración de este resultado fue dada por Tschebycheff (1852a, 1852b), aunque también puede consultarse una demostración diferente debida a Erdős (1932).

Sin embargo, dado su interés, para los dos siguientes resultados, el Teorema Pequeño de Fermat y el Teorema de Wilson, presentamos sus correspondientes demostraciones (véase Euler (1741) para el primer resultado, Lagrange (1771) para el segundo y Ribenboim (2004) para un contexto histórico de ambas).

2.2. Teorema 2 (Pequeño de Fermat, 1636)

Si p es un número primo, entonces, para cada número natural n, se tiene $n^p \equiv n \pmod{p}$.

Demostración. Para demostrar este resultado, tomamos primero los $p-1$ primeros múltiplos de n, es decir, $n, 2n, 3n, \ldots, (p-1)n$. Tengamos en cuenta que si $2n \equiv k \pmod{p}$ y $3n \equiv k' \pmod{p}$, entonces k y k' tienen que ser distintos, ya que si no lo fuesen se tendría que $2 \equiv 3 \pmod{p}$, y eso es contradictorio. De forma general, siendo k_i, con $i \in \{1,2,\ldots, p-1\}$ distintos, podemos decir entonces que se cumple lo siguiente:

$n \equiv k_1 \pmod{p}$
$2n \equiv k_2 \pmod{p}$
$3n \equiv k_3 \pmod{p}$
$\vdots$
$(p-1)n \equiv k_{p-1} \pmod{p}$.

Multiplicando los términos de los dos miembros de las congruencias anteriores queda lo siguiente: $(p-1)! \cdot n^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod{p}$. Ninguno de los números del factorial es divisible por *p,* ya que éste es primo. Por tanto, con la propiedad de cancelación, tenemos: $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, quedando el resultado probado.

2.3. Teorema 3 (Wilson, 1770)

Si p es un número primo, entonces $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. *El recíproco también es cierto*.

Demostración. Supongamos que p es un número primo; por tanto, todos los números enteros anteriores a éste, $1,2,3,\dots,p-1$, son coprimos con él. Este conjunto de números forma el grupo Z_p, es decir, un grupo con la operación multiplicación. Esto implica que para todo $a \in Z_p$, existe un único $b \in Z_p$ tal que $a \cdot b \equiv 1 \pmod{p}$. Además, por ser p primo, sabemos que la anterior congruencia se cumpliría para $a = b$ si, y solo si, $a = 1$ o bien $a = p - 1$. Así, podemos agrupar este conjunto en parejas de un número con su inverso de tal manera que $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$. Por último, multiplicamos por $p - 1$ a ambos lados, obteniendo $(p-1)! \equiv (p-1) \pmod{p}$ y, por tanto, $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Recíprocamente, supongamos que p no es un número primo, sino compuesto. Esto significa que p se debe poder factorizar por algún número entero mayor que 1 y menor que él mismo, el cual llamaremos d, lo que implica que $\text{mcd}((p-1)!,p) > 1$. Como d es un divisor de p, también lo es de $(p-1)!$ y de $(p-1)! + 1$ (por la congruencia). Por lo tanto, el divisor d divide a 1, lo cual es imposible debido a que se había exigido que d debía ser mayor estricto que 1.

3. FÓRMULAS PARA GENERAR NÚMEROS PRIMOS

En esta sección principal presentamos una recopilación de algunas fórmulas (las que hemos considerado más interesantes, puesto que, como puede consultarse en la literatura, existen cientos de ellas), haciendo una clasificación según su tipología y, dentro de cada tipo, por año de aparición en la literatura.

3.1. Fórmulas elementales

A continuación, mostramos algunas de las fórmulas más conocidas de generación de números primos basadas en expresiones elementales.

3.1.1. Fórmula de Hacks (1893)

Hacks (1983) prueba que $p>2$ es un número primo si, y sólo si, se cumple la siguiente igualdad:

$$\sum_{y=1}^{p-1}\sum_{s=1}^{(p-1)/2}\left\lfloor\frac{ys}{p}\right\rfloor+\sum_{y=1}^{p-1}\sum_{s=1}^{\lfloor y/2\rfloor}\left\lfloor\frac{ps}{y}\right\rfloor=\left(\frac{p-1}{2}\right)^3$$

3.1.2. Fórmula de Wormell (1967)

Wormell (véase Goodstein y Wormell, 1967) demuestra la siguiente fórmula:

$$p_n=2+2^{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{m=2}^{2^n}(-1)^{2^{\prod_{r=1}^{n}\left(1-r+(m-1)/2+\frac{1}{2}\sum_{x=1}^{m}(-1)^{2^{\prod_{a=1}^{x}\prod_{b=1}^{x}(x-ab)^2}}\right)}}$$

3.1.3. Fórmula de Jones (1975)

En su fórmula, Jones (1975) demuestra que p_n viene dado por la fórmula

$$p_n=\sum_{i=0}^{n^2}\left(1\ominus\left(\left(\sum_{j=0}^{i}r\left((j\ominus 1)!^2,j\right)\right)\ominus n\right)\right),$$

donde $r(x,y)$ denota el resto de la división de x por y.

3.1.4. Fórmula de Papadimitriou (1975)

La siguiente fórmula recursiva (Papadimitriou, 1975) expresa p_{n-1} en términos de p_n:

$$\begin{aligned}p_{n+1} = {} & (p+2)f_{p+2}+(p+4)f_{p+4}(1-f_{p+2})+(p+6)f_{p+6}(1-f_{p+2})(1-f_{p+4})+\\ & \cdots+(2p-1)f_{2p-1}(1-f_{p+2})(1-f_{p+4})\cdots(1-f_{2p-3}).\end{aligned}$$

3.1.5. Fórmula de Regimbal (1975)

En Regimbal (1975) el autor demuestra que

$$p_n = \sum_{m=2}^{2^n} m \left\lfloor \frac{1}{1 + \left| n - \left\lfloor \frac{1}{\sum_{i=1}^{m-1} \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{m}{i} \right\rfloor}{\frac{m}{i}} \right\rfloor} \right\rfloor \sum_{j=2}^{m} \left\lfloor \frac{1}{\sum_{i=1}^{j-1} \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{j}{i} \right\rfloor}{\frac{j}{i}} \right\rfloor} \right\rfloor \right|} \right\rfloor.$$

3.1.6. Fórmula de Hardy y Wright (1979)

Si r es un número natural mayor que 1, Hardy y Wright (1979) demuestran que

$$p_n = \left\lfloor r^{n^2} \alpha_r \right\rfloor - r^{2n-1} \left\lfloor r^{(n-1)^2} \alpha_r \right\rfloor,$$

donde

$$\alpha_r = \sum_{m=1}^{\infty} p_m \, r^{-m^2}.$$

3.1.7. Fórmula de Elliott (1983)

La función

$$g(n) = (n-1) \left[\left\lfloor \frac{n! + 1}{n+1} \right\rfloor - \frac{n! - n}{n+1} \right] + 2$$

siempre genera un primo, genera todos los primos y genera cada uno de los primos impares exactamente una vez y en su orden natural (Elliott, 1983).

3.1.8. Fórmulas de Tsangaris y Jones (1992)

Tsangaris y Jones (1992) prueban que, para $n > 1$,

$$p_n = \sum_{l=0}^{k} \left(1 \ominus \left(\left(\sum_{j=1}^{l} \left(1 \ominus \sum_{0 < i < k \leq m} \left(2 \left\lfloor \frac{i \cdot j}{k} \right\rfloor - j + 1 \right) \right) \right) \ominus n \right) \right).$$

3.1.9. Fórmula de Mináč (2004)

Mináč muestra (véase Ribenboim, 2004) que

$$p_n = 1 + \sum_{m=1}^{2^n} \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{1+\pi(m)} \right\rfloor^{1/n} \right\rfloor,$$

donde

$$\pi(m) = \sum_{j=2}^{m} \left\lfloor \frac{(j-1)!+1}{j} - \left\lfloor \frac{(j-1)!}{j} \right\rfloor \right\rfloor.$$

3.1.10. Fórmula de Tsangaris (2007)

Tsangaris (2007) prueba que

$$p_n = \sum_{m=2}^{n^2} m \left\lfloor \frac{1}{1 + \left| n - \left\lfloor \frac{1}{\sum_{d=1}^{\lfloor\sqrt{m}\rfloor} \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor}{\frac{m}{d}} \right\rfloor} \right\rfloor \sum_{k=2}^{m} \left\lfloor \frac{1}{\sum_{d=1}^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor} \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{k}{d} \right\rfloor}{\frac{k}{d}} \right\rfloor} \right\rfloor \right|} \right\rfloor.$$

3.1.11. Fórmula de Kaddoura y Abdul-Nabi (2012)

Kaddoura y Abdul-Nabi (2012) muestran que

$$p_n = 7 + \sum_{x=7}^{2(\lfloor n \log n \rfloor + 1)} \left\lfloor \frac{2n}{\pi(x) + n + 1} \right\rfloor,$$

donde

$$\pi(k) = 4 + \sum_{x=7}^{k} \lfloor f_x \rfloor.$$

3.1.12. Fórmula de Ruiz y Sondow (2014)

Ruiz y Sondow (2014) demuestran que

$$p_n = 2 + \sum_{k=2}^{\lfloor 2+2n\log n \rfloor} \left(1 - \left\lfloor \frac{\pi(k)}{n} \right\rfloor\right),$$

siendo

$$\pi(x) = \sum_{j=2}^{\lfloor x \rfloor} \left(1 + \left\lfloor \frac{2 - \sum_{i=1}^{j}\left(\left\lfloor \frac{j}{i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j-1}{i} \right\rfloor\right)}{j} \right\rfloor\right).$$

3.1.13. Fórmula de Saouter (2017)

Saouter (2017) prueba que

$$p_n = \sum_{k=2}^{2^{2^n}} k \left\lfloor \frac{1}{1 + (\pi(k) + \pi(k-1) - 2n + 1)^2} \right\rfloor,$$

siendo

$$\pi(x) = \sum_{i=2}^{\lfloor x \rfloor} \left\lfloor \frac{1}{\sum_{j=1}^{i} \left\lfloor \frac{1}{i+1-j\left\lfloor \frac{i}{j} \right\rfloor} \right\rfloor - 1} \right\rfloor.$$

3.2. Fórmulas trigonométricas

El siguiente listado de fórmulas generadoras de números primos incluye funciones trigonométricas.

3.2.1. Fórmula de Willans (1964)

Willans (1964) prueba que

$$p_n = \sum_{m=1}^{N} A_n\left(\pi(m)\right),$$

siendo

$$\begin{aligned} A_n(a) &= \left\lfloor \sqrt[n]{\frac{n}{a+1}} \right\rfloor, \\ \pi(m) &= \sum_{j=2}^{m} F(j), \\ F(j) &= \left\lfloor \cos^2 \pi \frac{(j-1)!+1}{j} \right\rfloor, \end{aligned}$$

y N suficientemente grande, para el cual Willans sugiere el valor $N = 2^n$.

3.2.2. Fórmula de Harris (1969)

Mediante un test, y basándose en el Teorema Pequeño de Fermat, Harris (1969) demuestra que $n > 3$ es un número primo si se cumple la siguiente igualdad:

$$\prod_{p \leq \sqrt{n}} \frac{1 - \cos \frac{2n^{p-1}\pi}{p}}{1 - \cos \frac{2\pi}{p}} = 1.$$

3.2.3. Fórmula de Tee (1972)

Tee (1972) prueba que

$$\pi(n) = 1 + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} w\,(2k+1),$$

donde

$$w(n) = \frac{1 - \cos\left(\pi \frac{(n-1)!}{n}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

y es tal que $w(2n + 1) = 1$ cuando $2n + 1$ es un número primo.

3.2.4. Fórmula de Tsangaris (2004)

Tsangaris (2004) prueba que si $p > 1$ es un número natural y $m = \lfloor n \rfloor$, entonces p es un número primo si, y sólo si,

$$\sum_{\substack{1\le j\le m\\ 1\le t,k\le p-1}} \cos\frac{2\pi tjk}{p} = -m(p-1).$$

3.3. Fórmulas que utilizan funciones aritméticas o de teórica de números

Para las siguientes fórmulas basadas en funciones aritméticas necesitamos alguna notación adicional:

- $m \mid n$ significa "el entero m divide al entero n".
- $d(n)$ denota el número de divisores de n.
- $\varphi(n)$ es el número total de enteros menores de n que son primos relativos (coprimos) con n.
- $\omega(n)$ es el número de primos distintos que dividen n.
- $\Omega(n)$ cuenta el número total de factores primos de n.
- $\sigma(n)$ denota la suma de los divisores positivos de n.

$$\psi(n) = n\prod_{p\mid n}\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

- $\theta(n)$ representa a las funciones $\sigma(n)$ y $\psi(n)$.
- Sean $p_1, \ldots, p_k$ diferentes números primos y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 1$ números naturales para los que

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}.$$

- Definimos las funciones $\eta(n)$ y $\delta(n)$ como

$$\eta(n) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, p_i \quad y \quad \delta(n) = n\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{p_i},$$

respectivamente.

3.3.1. Fórmula de Srinivasan (1961)

Srinivasan (1961) prueba que

$$p_{n+1} = \left\lfloor \frac{\sum_{d|p_1\cdots p_n} \frac{\mu(d)d\cdot 2^d}{(2^d-1)^2} - \frac{1}{2}}{\sum_{d|p_1\cdots p_n} \frac{\mu(d)}{2^d-1} - \frac{1}{2}} \right\rfloor.$$

3.3.2. Fórmula de Gandhi (1971)

Gandhi (1971) demuestra que

$$p_n = \left\lfloor 1 - \frac{1}{\log 2} \log\left(-\frac{1}{2} + \sum_{d|p_1 p_2\cdots p_{n-1}} \frac{\mu(d)}{2^d - 1} \right) \right\rfloor.$$

3.3.3. Fórmula de Ernvall (1975)

Dado un número natural $m \geq 2$, Ernvall (1975) demuestra que el número primo más pequeño p que es mayor que m es

$$p = \frac{d}{mcd(t/d^a, d)},$$

donde

$$\begin{aligned} d &= mcd((m!)^{m!} - 1, (2m)!), \\ t &= \frac{d^d}{mcd(d^d, d!)} \end{aligned}$$

y a es el único número entero tal que d^a divide a t, pero d^{a+1} no divide a t.

3.3.4. Fórmula de Almansa y Prieto (1994)

Almansa y Prieto (1994) aportan en su trabajo diversas fórmulas para el n-ésimo número primo, siendo éstas:

$$p_n = 2 + \sum_{m=2}^{2^n} \left\lfloor 2^{-\left\lfloor \frac{\sum_{k=2}^{m} \left\lfloor \frac{2}{d(k)} \right\rfloor}{n} \right\rfloor} \right\rfloor,$$

$$p_n = 2 + \sum_{m=2}^{2^n} \left\lfloor 2^{-\left\lfloor \frac{\sum_{k=2}^{m} \left\lfloor \frac{k+1}{\sigma(k)} \right\rfloor}{n} \right\rfloor} \right\rfloor,$$

$$p_n = 2 + \sum_{m=2}^{2^n} \left\lfloor 2^{-\left\lfloor \frac{\sum_{k=2}^{m} \left\lfloor \frac{\varphi(k)}{k-1} \right\rfloor}{n} \right\rfloor} \right\rfloor.$$

3.3.5. Fórmula de Ruiz (2000)

Ruiz (2000) prueba que

$$p_n = 1 + \sum_{k=1}^{C_n} \left(1 - \left\lfloor \frac{\pi(k)}{n} \right\rfloor\right),$$

siendo

$$\begin{aligned} \pi(k) &= \sum_{i=2}^{k} \left(1 - G(i)\right), \\ G(i) &= \begin{cases} 0 & si\ i\ es\ primo, \\ 1 & si\ i\ es\ compuesto \end{cases} \end{aligned}$$

y C_n es una constante para la que el autor sugiere $C_n = 2(\lfloor n \log n \rfloor + 1)$.

3.3.6. Fórmula de Vassilev-Missana (2001)

Vassilev-Missana (2001) demuestra que

$$\pi(n) = \sum_{k=2}^{n} \left\lfloor \frac{k+1}{\theta(k)} \right\rfloor.$$

3.3.7. Fórmula de Atanassov (2001)

Atanassov (2001) prueba que

$$p_n = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n^2+3n+4}{4} \right\rfloor} sg(n - \pi(i)),$$

donde

$$\begin{aligned}
\pi(i) &= \sum_{k=2}^{i} \overline{sg}\left(k - 1 - \varphi(k)\right), \\
\pi(i) &= \sum_{k=2}^{i} \overline{sg}\left(\sigma(k) - k - 1\right), \\
\pi(i) &= \sum_{k=2}^{i} f\,r\left(\frac{k}{(k-1)!}\right),
\end{aligned}$$

siendo

$$fr\left(\frac{n}{m}\right) = \begin{cases} 0 & si\ n = 1, \\ 1 & si\ n \neq 1 \end{cases}$$

para n y m números naturales tales que mcd(n,m) = 1.

3.3.8. Fórmula de Atanassov (2004)

Atanassov (2004) prueba que

$$p_n = \sum_{i=0}^{2^n} sg\left(n - \sum_{k=2}^{i} \overline{sg}\left(k - \eta(k)\right)\right).$$

3.3.9. Fórmula de Atanassov (2013)

Atanassov (2013) demuestra que

$$p_n = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n^2+3n+4}{4} \right\rfloor} sg\left(n - \sum_{k=2}^{i} \left\lfloor \frac{1}{\delta(k)} \right\rfloor\right).$$

3.3.10. Fórmula de Vassilev-Missana (2013)

Vassilev-Missana (2013) prueba que

$$\pi(n) = \left\lfloor \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{k+1}{\theta(k)} \right)^{k+\sqrt{k}} \right\rfloor.$$

3.4. Fórmulas combinatorias

En las siguientes fórmulas se utilizan funciones generadoras y otros elementos combinatorios.

3.4.1. Serie de Lambert (1771)

La serie de Lambert (1771)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n},$$

cuando se expande en un entorno de 0 en la variable *x*, da un coeficiente de 2 precisamente en los números primos (véase también Gawlik, 1995).

3.4.2. Serie de Gawlik (1995)

Basado en la serie de Lambert y en la teoría de funciones elípticas, Gawlik (1995) proporciona la serie

$$\frac{1}{4} \log \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}} \right)^4$$

para la cual el coeficiente de q^{2n-1} es $2+2/(2n-1)$ si, y sólo si, $2n-1$ es un número primo.

3.5. Fórmulas analíticas

Las siguientes fórmulas utilizan integrales, productos y sumas infinitas o funciones analíticas especiales, como la función zeta de Riemann ζ definida por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

3.5.1. Fórmula explícita de Riemann (1859)

Riemann (1859) prueba que la función

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\log x/\log 2} \frac{\mu(n)}{n} f\left(x^{1/n}\right),$$

siendo

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t} - \sum_{\rho} x^{\rho} + 2\log 2 \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\log t},$$

donde la suma se realiza sobre las partes imaginarias de los ceros no triviales de la función zeta de Riemann ordenados por magnitud, es $\pi(x)$, excepto cuando x es un número primo, en cuyo caso es $\pi(x) - 1/2$.

3.5.2. Fórmula de Isenkrahe (1900)

Isenkrahe (1900) prueba que

$$p_{n+1} = \lim_{x \to p_n+1} F(n,x),$$

donde

$$\begin{aligned} F(m,x_0) &= \prod_{i=1}^{n} p\,(m+i,x_0) + \frac{x_0}{\prod_{i=1}^{n} p\,(m+i,x_0)} - \left\lfloor \frac{\prod_{i=1}^{n} p\,(m+i,x_0)}{x_0} \right\rfloor, \\ p(r,x) &= p_r^{S(r,x)}, \\ S(r,x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor, \end{aligned}$$

para cualquier número primo p_r.

3.5.3. Fórmula de Ortega Costa (1950)

Ortega Costa (1950) prueba que

$$\pi(n) = n - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^{n} \cos\left(x\prod j = 1^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1}(jk-n)\right) dx.$$

3.5.4. Fórmula de Teuffel (1954)

Teuffel (1954) demuestra que

$$p_n = \lfloor 1 + (1 - (1 - \zeta(k)\Pi_n)^{-1})^{1/k} \rfloor,$$

donde k puede tomar el valor $2p_{n-1}$ o cualquier otro valor entero mayor y

$$\Pi_n = \prod_{m=1}^{n-1}(1 - p_m^{-k}).$$

3.5.5. Fórmula de Golomb (1976)

Golomb (1976) obtiene las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= \lim_{s\to\infty}(P_n(s)\zeta(s) - 1)^{-1/s}, \\
p_{n+1} &= \lim_{s\to\infty}\left(P_n(s) - \zeta^{-1}(s)\right)^{-1/s}, \\
p_{n+1} &= \lim_{s\to\infty}\left(\zeta(s) - Q_n(s)\right)^{-1/s}, \\
p_{n+1} &= \lim_{s\to\infty}\left(1 - \zeta^{-1}(s)Q_n(s)\right)^{-1/s},
\end{aligned}$$

siendo

$$\zeta^{-1}(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s},$$

$$P_n(s) = \prod_{p_i | P_n}(1 - p_i^s),$$

$$Q_n(s) = (P_n(s))^{-1} = \sum_{n=1}^{*\infty}\frac{1}{n^s},$$

donde * indica que la suma se extiende sobre aquellos valores de n que no tienen factores primos que excedan p_n.

3.5.6. Fórmula de Knopfmacher (1979)

Knopfmacher (1979) prueba que existe una constante A =0,92189... tal que

$$p_{n+1} = \left\lfloor 1 - \log\left(1 - \frac{A}{\prod_{i=2}^{p_n}(1-4^{-i})}\right)/\log 4 \right\rfloor.$$

En este mismo trabajo, el autor también demuestra que

$$p_{n+1} = \left\lfloor 2^{1/s}\left(1 - \frac{1}{\zeta(s)\prod_{i=2}^{p_n}(1-i^{-s})}\right)\right\rfloor,$$

donde s es cualquier número real tal que

$$s \geq \tfrac{3}{4}\left(p_{n+1} + \tfrac{1}{2}\right).$$

3.5.7. Fórmula de Raitzin (1979)

Raitzin (1979) demuestra que

$$\pi(m) = \sum_{m=1}^{\infty} a_n\, \lambda(m, n+3),$$

siendo

$$\lambda(n, r+3) = \sum_{m=1}^{n} m^{r+2}\,,$$

$$a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{P(k+3)(2\pi i)^{n-k}}{(n-k)!},$$

$$P(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log\zeta(ns)\,.$$

3.5.8. Fórmula de Keller (2007)

Keller (2007) muestra que los n primeros números primos $p_1,\ldots,p_n$ determinan el siguiente número primo si se utiliza la fórmula

$$p_{n+1} = \lim_{s\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^s}-1\right)^{-1/s}.$$

Si se reemplaza el límite superior del sumatorio por $2p_n - 1$, el resultado se sigue cumpliendo.

3.5.9. Fórmula de Assis (2015)

Assis (2015) demuestra que

$$p_{q+k} = \sum_{m=p_q+1}^{\infty}\left(m\prod_{j=2}^{k\prime(m)}\prod_{l=2}^{k\prime(m)}(1-\langle m, jl\rangle)\right)\left\langle m, m\left\langle k, \sum_{r=p_q+1}^{m}\prod_{j=2}^{k\prime(r)}\prod_{l=2}^{k\prime(r)}(1-\langle r, jl\rangle)\right\rangle\right\rangle$$

siendo

$$k'(t) = \frac{t-1+\langle 0, t \, mod \, 2\rangle}{2} = \begin{cases}(t-1)/2 & si\ t\ es\ impar\\(t+1)/2 & si\ t\ es\ par\end{cases}$$

y

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases}1 & si\ x = y\\0 & si\ x \neq y.\end{cases}$$

3.6. Fórmulas que utilizan constantes o información externa

Las siguientes fórmulas involucran constantes especiales u otro tipo de información que esencialmente codifica los números primos.

3.6.1. Fórmula de Scherk (1833)

Scherk (1833) afirma, y lo demuestra Sierpiński (1952b), que

$$p_{2n} = 1 \pm p_1 \pm \cdots \pm p_{2n-1}$$

$$p_{2n+1} = 1 \pm p_1 \pm \cdots \pm p_{2n}$$

para algunas elecciones de signos.

3.6.2. Fórmula de Mills (1947)

Mills (1947) prueba que existe un número real λ tal que, para todo $n = 1, 2, \ldots$, el número $\lfloor \lambda^b \rfloor$, siendo $b = 3^n$, es primo. Kuipers (1950) generaliza el resultado de Mills reemplazando la constante 3 por cualquier número entero mayor o igual a 3; Ansari (1951) elimina la restricción a números enteros, permitiendo cualquier número real mayor que 8/3, y Matomäki (2010) mejora el 8/3 a 2.

3.6.3. Fórmula de Moser (1950)

Moser (1950) muestra que

$$p_n = A\left(10^{n(n+1)/2} - 10^n A \cdot 10^{n(n-1)/2}\right),$$

donde $A = 0{,}203005000700011\ldots$

3.6.4. Fórmula de Niven (1951)

Niven (1951) demuestra que, dado cualquier número real $c > 8/3$, existe un número real A, que depende de c, tal que

$$\left\lfloor A^{c^n} \right\rfloor$$

es siempre un número primo para cualquier número entero n. Además, dado cualquier número real $A > 1$, existe un c tal que el valor anterior es un número primo.

3.6.5. Fórmula de Wright (1951)

Wright (1951) demuestra que existe un número real β tal que el valor

$$\left\lfloor 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{\beta}}}}} \right\rfloor$$

es un número primo.

3.6.6. Fórmula de Bang (1952)

Bang (1952) muestra que

$$p_n = \left\lfloor 10^{2n-1}\left(a \cdot 10^{(n-1)^2} - \left\lfloor a \cdot 10^{(n-1)^2} \right\rfloor\right) \right\rfloor,$$

siendo

$$a = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{10^{k^2}}.$$

3.6.7. *Fórmula de Sierpiński (1952a)*

A partir de las formulaciones dadas por Kuipers (1950), Mills (1947) y Niven (1951), Sierpiński (1952a) prueba que

$$p_n = \lfloor a \cdot 10^{2^n} \rfloor - 10^{2^{n-1}} \lfloor a \cdot 10^{2^{n-1}} \rfloor,$$

donde a es la constante dada en la fórmula de Bang (1952).

3.6.8. *Fórmula de Alkauskas y Dubickas (2004)*

Basado en el hecho de que la sucesión $\lfloor \xi^{\,p} \rfloor$, donde p recorre los números primos, contiene infinitos números primos para casi todo $\xi > 1$ (véase Baker y Harman, 1996), Alkauskas y Dubickas (2004) demuestran que existe un número trascendental $\omega > 1$ tal que $\lfloor \omega^{n!} \rfloor$ es un número primo.

3.6.9. *Fórmula de Elsholtz (2020)*

Basándose en el resultado de Mills (1947), Elsholtz (2020) proporciona una primera variante incondicional:

$$\lfloor A^{10^{10n}} \rfloor$$

es un número primo, donde $A = 1{,}00536773279814724017\ldots$ se puede calcular con millones de dígitos. De manera similar,

$$\lfloor A^{3^{13n}} \rfloor$$

es un número primo, con $A = 3{,}8249998073439146171615551375\ldots$

3.7. Fórmulas basadas en soluciones de ecuaciones diofánticas

Una combinación de diversos resultados nos dice que existe un polinomio, con coeficientes enteros, de modo que el conjunto de números primos coincide con el conjunto de valores positivos de este polinomio, ya que las variables varían en el conjunto de enteros no negativos. Este polinomio también adquiere valores negativos, y un número primo puede aparecer repetidamente como un valor del polinomio.

3.7.1. Polinomios de Matijasevič (1970)

Matijasevič (1970) resuelve el décimo problema de Hilbert demostrando que cada conjunto computablemente numerable es diofántico. En particular, esto significa que el conjunto de los números primos se puede representar como las soluciones positivas de alguna ecuación diofántica. Proporciona una construcción para un polinomio de 24 variables y de grado 37 (véase Matijasevič, 1971). Adicionalmente, mejoró este resultado a 21 variables y grado 21. Más tarde, redujo el número de variables a 10 (véase Matijasevič, 1977). Esto puede reducirse aún más a 8 variables con el recíproco del Teorema de Wolstenholme (véase Vallata y Omodeo, 2015).

3.7.2. Polinomio de Jones, Sato, Wada y Wiens (1976)

Jones, Sato, Wada y Wiens (1976) proporcionan en su trabajo el primer polinomio explícito de grado 25 con 26 variables.

3.8. Funciones que son siempre primos

En esta sección se presentan funciones sencillas cuyo conjunto de valores es exactamente el conjunto de los números primos.

3.8.1. Fórmulas de Sun (2013)

Para $n = 1,2,3,\ldots$, Sun (2013) define la función $S(n)$ como el entero más pequeño $m > 1$ tal que los valores $2k(k-1)$ (mod m) para $k = 1,\ldots,n$ son distintos dos a dos; además, el autor muestra que $S(n)$ es el mínimo primo mayor que $2n-2$ y, por lo tanto, el conjunto de valores de la función $S(n)$ es exactamente el conjunto de todos los números primos. Adicionalmente, por cada $n = 4,5,\ldots$, demuestra que el mínimo primo $p > 3n$, con $p \equiv 1$ (mod 3), es justo el menor entero m tal que $18k(3k-1)$, para $k = 1,\ldots,n$, son distintos dos a dos módulo m. Finalmente, para d Î $\{4,6,12\}$, y $n = 3,4,\ldots,$ Sun muestra que el mínimo primo $p \geq 2n-1$, con $p \equiv -1$ (mod d), es el entero más pequeño m tal que los valores $(2k-1)^d$, para $k = 1,\ldots,n,$ son distintos dos a dos módulo m.

3.9. Algoritmos que generan números primos

A primera vista, todas las fórmulas para los números primos son esencialmente algoritmos. Aparte de las fórmulas que presentamos aquí, existen otros muchos tipos diferentes de fórmulas (o algoritmos) para generar números primos, como por ejemplo, encontrando todos los primos en un intervalo, comprobando si un número es primo con alta probabilidad, empleando cribas para encontrar un rango de números primos, etc. Además, utilizando "máquinas", también es posible generar números primos basados en esos algoritmos.

3.9.1. Conway (1983)

Conway (véanse Guy, 1983, y Conway, 1983) desarrolla el algoritmo PRIMEGAME que genera números primos utilizando una sucesión de 14 números racionales:

$$\frac{17}{91}, \frac{78}{85}, \frac{19}{51}, \frac{23}{38}, \frac{29}{33}, \frac{77}{29}, \frac{95}{23}, \frac{77}{19}, \frac{1}{17}, \frac{11}{13}, \frac{13}{11}, \frac{15}{2}, \frac{1}{7}, 55.$$

Comenzando con 2, se encuentra el primer número en la máquina que, multiplicado por 2, da un número entero; entonces, para ese número entero encontramos el primer número en la máquina que genera otro número entero. Excepto por el 2 inicial, cada número que tiene un número entero para un logaritmo binario es un número primo, es decir, que las potencias de 2 con exponentes compuestos no aparecen.

3.10. Relaciones de recurrencia

Concluimos el último tipo de fórmula con aquélla que utiliza relaciones de recurrencia.

3.10.1. Sucesión de Rowland (2008)

Rowland (2008) –véase también Chamizo, Raboso y Ruiz-Cabello (2011)– demuestra que la sucesión definida por $a_k = a_{k-1} + \mathrm{mcd}(k, a_{k-1})$, con $a_1 = 7$ implica que $a_k - a_{k-1}$ es siempre 1 o un número primo. Para algunas generalizaciones de la sucesión de Rowland, consúltense Shevelev (2009a) y Shevelev (2009b).

4. REFERENCIAS

Alkauskas, G. y Dubickas, A. (2004). Prime and composite numbers as integer parts of powers. *Acta Mathematica Hungarica,* 105(3), 249–256.

Almansa, J. y Prieto, L. (1994). Nuevas fórmulas para el *n*-ésimo primo. *Lecturas Matemáticas,* 2(15), 227–231.

Ansari, A. R. (1951). On prime representing function. *Ganita,* 2, 81–82.

Assis, A. V. D. B. (2015). Formula to generate the sequence of prime numbers - explained. hal-01180298.

Atanassov, K. T. (2001). A new formula for the *n*th prime number. *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences,* 54(7), 5–6.

Atanassov, K. T. (2004). On a new formula for the nth prime number. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics,* 10(1), 24.

Atanassov, K.T. (2013). A formula for the nth prime number. *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences,* 66(4), 503–506.

Baker, R. C. y Harman, G. (1996). Primes of the form $\lfloor c^p \rfloor$. *Mathematische Zeitschrift,* 221, 73–81.

Bang, T. (1952). A function representing all prime numbers. *Nordisk Matematisk Tidsskrift,* 34, 117–118.

Chamizo, F., Raboso, D. y Ruiz-Cabello, S. (2011). On Rowland's sequence. *The Electronic Journal of Combinatorics,* 18(2), paper 10, 10 pp.

Conway, J. H. (1983). FRACTRAN: a simple universal programming language for arithmetic. En T. M. Cover y B. Gopinath (Eds.). *Open Problems in Communication and Computation*. Springer, New York, pp. 4–26.

Crandall, R. y Pomerance, C. (2005). *Prime Numbers: A Computational Perspective, Second Edition*. Springer, New York.

de Amo, E., Díaz Carrillo, M. y Fernández Sánchez, J. (2013). Demostraciones de la infinidad de los números primos. *Épsilon - Revista de Educación Matemática,* 30(2), nº84, 69–88.

Elliott, D. D. (1983). A prime-generating function. *The Two-Year College Mathematics Journal,* 14(1), 57.

Elsholtz, C. (2020). Unconditional prime-representing functions, following Mills. *American Mathematical Monthly,* 127(7), 639–642.

Erdős, P. (1932). Beweiseines Satzes von Tschebyschef. *Acta Scientiarium Mathematicarum* (*Szeged*)*,* 5, 194–198.

Euler, L. (1741). Theorematum quorundam ad numerous primos spectantium demonstratio. *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae,* 8, 141–146.

Ernvall, R. (1975). A formula for the least prime greater than a given integer. *Elemente der Mathematik,* 30, 13–14.

Gandhi, J. M. (1971). Formulae for the nth prime. *Proceedings of the Washington State University Conference on Number Theory*, Washington State University, Pullman, WA, pp. 96–107.

Gawlik, J. (1995). A function which distinguishes the prime numbers. *Mathematics Today (Southend-on-sea)* 33, 21.

Golomb, S.W. (1976). Formulas for the next prime. *Pacific Journal of Mathematics,* 63(2), 401–404.

Goodstein, R. L. y Wormell, C.P. (1967). Formulae for primes. *Mathematical Gazette,* 51(375), 35–38.

Guy, R. K. (1983). Conway's prime producing machine. *Mathematics Magazine,* 56(1), 26–33.

Guy, R. K. (2004). *Unsolved Problems in Number Theory. Third Edition*. Springer, New York.

Hacks, J. (1893). Über einige für Primzahlen charakteristische Beziehungen. *Acta Mathematica,* 17(1), 205.

Hardy, G. H. y Wright, E. M. (1979). *An Introduction to the Theory of Numbers. Fifth Edition*. Oxford University Press, London.

Harris, V. C. (1969). A test for primality. *Nordisk Matematisk Tidsskrift,* 17(3), 82.

Isenkrahe, C. (1900). Ueber eine Lösung der Aufgabe, jede Primzahlals Function der vorhergehenden Primzahlen durch einen geschlossenen Ausdruck darzustellen, *Matematische Annalen*, 53(1–2), 42–44.

Jones, J. P. (1975). Formula for the *n*th prime number. *Canadian Mathematical Bulletin,* 18(3), 433–434.

Jones, J. P., Sato, D., Wada, H. y Wiens, D. (1976). Diophantine representation of the set of prime numbers. *American Mathematical Monthly,* 83(6), 449–464.

Kaddoura, I. y Abdul-Nabi, S. (2012). On formula to compute primes and the *n*th prime. *Applied Mathematics Science,* 6(76), 3751–3757.

Keller, J. B. (2007). A recursion equation for prime numbers. arXiv:0711.3940 [math.NT].

Knopfmacher, J. (1979). Recursive formulae for prime numbers. *Archiv der Mathematik* (*Basel*)*,* 33(1), 144–149.

Kuipers, L. (1950). Prime-representing functions. *Indagationes Mathematicae,* 12, 57–58.

Lagrange, J. L. (1771). Demonstration d'un théorème nouveau concernant les nombres premiers. *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres* (*Berlin*) vol. 2, 125–137.

Lambert, J. H. (1771). *Anlage zur Architectonic, oder Theorie des Einfachen und Ersten in der philosophischen und mathematischen Erkenntniss* 2, p. 507, Riga.

Matijasevič, Y. (1970). Enumerable sets are Diophantine (en ruso). *Doklady Akademii Nauk SSSR,* 191, 279–282. Traducido al inglés en *Journal of Soviet Mathematics,* 11(2), 354–358, (1970).

Matijasevič, Y. (1971). Diophantine representation for the set of prime numbers (en ruso). *Doklady Akademii Nauk SSSR,* 196, 770–773. Traducido al inglés en *Journal of Soviet Mathematics,* 12(4), 249–254, (1971).

Matijasevič, Y. (1977). Primes are non-negative values of a polynomial in 10 variables (en ruso). *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI,* 68, 62–82.

Matomäki, K. (2010). Prime representing functions. *Acta Mathematica Hungarica*, 128(4), 307–314.

Mills, W. H. (1947). A prime-representing function. *Bulletin of the American Mathematical Society,* 53(6), 604.

Moser, L. (1950). A prime representing function. *Mathematics Magazine,* 23(3), 163–164.

Narkiewicz, W. (2000). *The Development of Prime Number Theory: From Euclid to Hardy and Littlewood*. Springer, New York.

Niven, I. (1951). Functions which represent prime numbers. *Proceedings of the American Mathematical Society,* 2, 753–755.

Ortega Costa, J. (1950). La formulación explícita de la función pi(x) de los números primos. *Revista Matemática Hispanoamericana,* 10(2), 72–76.

Papadimitriou, M. (1975). A recursion formula for the sequence of odd primes. *The American Mathematical Monthly,* 82(3), 289.

Raitzin, C. (1979). The exact count of the prime numbers that do not exceed a given upper bound. *Rev. Ingr.,* 1, 37–43.

Regimbal, S. (1975). An explicit formula for the *k*th prime number. *Mathematics Magazine,* 48(4), 230–232.

Ribenboim, P. (2004). *The Little Book of Bigger Primes. Second Edition*. Springer, New York.

Riemann, B. (1859). Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. *Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1859.

Rowland, E. S. (2008). A natural prime-generating recurrence. *Journal of Integer Sequences,* 11(2), article 08.2.8, 13 pp.

Ruiz, S. M. (2000). The general term of the prime number sequence and the Smarandache prime function. *Smarandache Notions Journal,* 11, 59–61.

Ruiz, S. M. y Sondow, J. (2014). Formulas for $\pi(x)$ and the nth prime. *International Journal of Mathematics and Computer Science,* 9(2), 95–98.

Saouter, Y. (2017). A (doubly) elementary formula for prime numbers. *Mathematical Gazette,* 101(550), 93–95.

Scherk, H. F. (1833). Bemerkungen über die Bildung der Primzahlen aus einander. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik,* 10, 201–208.

Shevelev, V. (2009a). Generalizations of the Rowland theorem. arXiv:0911.3491v5 [math.NT].

Shevelev, V. (2009b). Infinite sets of generators of primes based on the Rowland idea and conjectures concerning twin primes. arXiv:0910.4676 [math.NT].

Sierpiński, W. (1952a). Sur une formule donnant tous les nombres premiers. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris,* 235, 1078–1079.

Sierpiński, W. (1952b). Sur une propriété des nombres premiers. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège,* 21, 537–539.

Srinivasan, B. R. (1961). Formulae for the nth prime. *Journal of the Indian Mathematical Society,* 25, 33–39.

Sun, Z.-W. (2013). On functions taking only prime values. *Journal of Number Theory,* 133(8), 2794–2812.

Tee, G. J. (1972). Simple analytic expressions for primes and for prime pairs. *The New Zealand Mathematics Magazine,* 9, 32–44.

Teuffel, E. (1954). Eine Rekursions für Primzahlen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,* 57(1), 34–36.

Tsangaris, P. G. (2004).Prime numbers and cyclotomy. *Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae,* 31, 3–10.

Tsangaris, P. G. (2007). Formulae for the kth prime number. *Bulletin of the Greek Mathematical Society,* 53, 147–149.

Tsangaris, P. G. y Jones, J. P. (1992). An old theorem on the cgd and its application to primes. *Fibonacci Quarterly,* 30(3), 194–198.

Tschebycheff, P. L. (1852a). Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. *Journal de Mathématiques,* 17, 341–365,

Tschebycheff, P. L. (1852b). Mémoire sur les nombres premiers. *Journal de Mathématiques,* 17, 366–390.

Vallata, L. y Omodeo, E. G. (2015). A Diophantine representation of Wolstenholme's pseudoprimality. En D. Ancona, M. Maratea y V. Mascardi (Eds.). *Proceedings of the 30th Italian Conference on Computational Logic* (*CILC 2015*). Génova, Italia, pp. 2–12.

Vassilev-Missana, M. (2001). Three formulae for n-th prime and six for n-th term for twin primes. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics,* 7(1), 15–20.

Vassilev-Missana, M. (2013). New explicit representations for the prime. *Notes on Number Theory and Discrte Mathematics,* 19(3), 24–27.

Willans, C. P. (1964). On formulae for the nth prime number. *Mathematical Gazette,* 84, 413–415.

Wright, E. M. (1951). A prime-representing function. *The American Mathematical Monthly,* 58, 616–618.