NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 100, mayo de 2019, páginas 79-84

Determinando propiedades geométricas simbólicamente con GeoGebra [1,2]

Markus Hohenwarter[3]
(Johannes Kepler University. Austria)

Zoltán Kovács[4]
(The Private University College of Education of the Diocese of Linz. Austria)

Tomás Recio[5]
(Universidad de Cantabria. España)

1. Introducción

Los programas de *Geometría Dinámica* (GD) constituyen unas herramientas tan útiles como provocadoras para la enseñanza/aprendizaje de los conceptos matemáticos de razonamiento y prueba. Así, estos programas de GD[6] facilitan a los estudiantes la formulación de ciertos hechos geométricos (por ejemplo, como pasos intermedios para establecer la prueba de una proposición dada) dibujando diagramas auxiliares que permiten, luego, convencerse de la verdad/falsedad de la afirmación conjeturada al poder verificar su validez en muchos casos, tras *arrastrar* al azar algunos elementos de la figura y comprobar, en la figura *arrastrada*, la permanencia de determinadas propiedades.

Esto ya ha planteado algunas preocupaciones:

> …increased availability in school mathematics instruction of … dynamic geometry systems… raised the concern that such programmes would make the boundaries between conjecturing and proving even less clear for students… [They] allow students to check easily and quickly a very large number of cases, thus helping students "see" mathematical properties more easily and potentially "killing" any need for students to engage in actual proving[7](Lin & al., 2012)

---

[1]Versión libre, en español, del artículo de los mismos autores: "Deciding geometric properties symbolically in GeoGebra". R\&E-SOURCE Open Online Journal for Research and Education. Special Issue no.6, March 2017, ISSN: 2313-1640. Accesible en: https://journal.ph-noe.ac.at/index.php/resource/article/view/411

[2]Parcialmente financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad y por el European Regional Development Fund (ERDF), a través del Proyecto MTM2017-88796-P.

[3]Johannes Kepler University, Department of Mathematics Education, Altenberger Straße 54, 4040 Linz, Austria.
[4]The Private University College of Education of the Diocese of Linz, Salesianumweg 3, 4020 Linz, Austria.
[5]Universidad de Cantabria, Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Facultad de Ciencias, Avenida de los Castros, s/n, 39071 Santander, España.

[6]https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_interactive_geometry_software

[7] Traducción libre de los autores: "...la creciente disponibilidad de programas de geometría dinámica en la enseñanza de la matemática escolar....suscita preocupación por la posibilidad de que estos contribuyan a diluir, para los estudiantes, el límite entre las nociones de conjetura y prueba....al permitir que los estudiantes verifiquen, fácil y rápidamente, un gran número de casos y, de esta forma, "vean" más fácilmente las propiedades matemáticas de las figuras, "matando" así, potencialmente, la necesidad, para los alumnos, de realizar demostraciones.

Ciertamente el "arrastre" es un rasgo característico de los sistemas GD, por lo que estas preocupaciones se aplican a todos los GDs. Por otro lado, sólo unos pocos DGS incluyen actualmente otra característica estrechamente relacionada con el razonamiento matemático: la implementación de un algoritmo de *Demostración Automática de Teoremas* (DAT) que permita confirmar/refutar la validez matemática (es decir, no aproximada ni probabilística) de un enunciado geométrico propuesto por el usuario sobre una construcción desarrollada en el sistema de Geometría Dinámica.

Tales sistemas, como GeoGebra (ver Hohenwarter, 2002), que incluyen un DAT, pueden considerarse como una suerte de "calculadora geométrica" y, como tales, agregan, a las preocupaciones expresadas anteriormente sobre el papel del *arrastre* en el aprendizaje del razonamiento y demostración, aquellas ya conocidas --pero aún no bien resueltas en la Educación Matemática-- relacionadas con el uso en el aula de las calculadoras aritméticas o científicas. ¿Puede ser intelectualmente atractivo para los estudiantes el cálculo de 23456789 × 98765432, una vez que saben que hay un algoritmo que da la respuesta correcta 2316719898917848 y que está implementado en su, digamos, *tablet* o teléfono personal? Del mismo modo, ¿estarán los alumnos interesados en determinar si las tres alturas de un triángulo se encuentran siempre en un punto, si su teléfono de bolsillo puede garantizar, con un algoritmo matemático, que sí lo hacen?

La respuesta no está clara para nosotros; por ejemplo, tal vez los dos contextos (aritmético, geométrico) no puedan considerarse, a estos efectos, como realmente paralelos... En todo caso creemos que es necesario abordar con urgencia este asunto, dada la gran expansión de *GeoGebra* en las aulas de todo el mundo, con más de 20 millones de usuarios en 2013 (Houghton, 2014), y el hecho de que las funciones de DAT acaban de ser incorporadas en la versión más reciente, la número 5, de este software (véase Kovács, 2015a).

El propósito de esta nota es contribuir, de manera muy modesta, hacia una mejor comprensión de este complejo problema. Para ello describiremos de manera resumida la implementación de la herramienta de DAT en *GeoGebra,* como una extensión simbólica del comando *Relación,* ya existente, pero de carácter meramente numérico (ver Kovács, 2015b), detallando, en particular, el diseño de la interfaz de usuario de DAT (por ejemplo, tratando que el usuario pueda percibir fácilmente la diferencia entre una afirmación conjetural, verificada con un simple control visual, y un teorema rigurosamente probado). Concluiremos reiterando la urgente necesidad de abordar los nuevos desafíos que surgirán por la disponibilidad de tales herramientas para millones de estudiantes en todo el mundo.

2. La herramienta *Relación* en GeoGebra 5

GeoGebra (ver Hohenwarter, 2002) es un software educativo de matemáticas pensado, principalmente, para facilitar la realización, por parte de los estudiantes, de construcciones y conjeturas en geometría euclídea. Dado que los métodos de *Demostración Automática de Teoremas* (DAT) en geometría han alcanzado, con el tiempo, un nivel de madurez considerable, algunos expertos en DAT consideraron oportuno iniciar un proyecto de incorporación y validación de varios mecanismos de DAT en *GeoGebra*. La colaboración entre los autores de este trabajo, junto con otros colegas (véase Botana et. al., 2015), se inició en 2010 y se apoyó en una diversidad de enfoques y logros previos de una gran comunidad de investigadores, involucrando diferentes técnicas de geometría algebraica, lógica formal y álgebra computacional. Además, se requirió la utilización de varios paquetes de computación simbólica, de código abierto, entre los que destacamos los sistemas de álgebra computacional *Singular* (Decker& al., 2012) y *Giac* (Parisse, 2013). Remitimos al lector a Kovács, 2015a y Kovács, 2015b, para una descripción más detallada de los detalles técnicos, así como a Kovács et. al., 2018, para una suerte de manual, con multitud de ejemplos, del uso de DAG en GeoGebra.

El resultado, en pocas palabras, ha sido la creación de una versión sofisticada y ampliada de la herramienta de *Relación*, es decir, de un comando que ya estaba disponible en las primeras versiones de GeoGebra (desde 2002), pero que sólo establecía, en principio, relaciones entre objetos geométricos en función de criterios numéricos. Así, la herramienta de *Relació*n, en su versión original, permitía seleccionar dos objetos geométricos en una construcción, para luego verificar la existencia o no de determinadas relaciones típicas entre ellos, tales como la perpendicularidad, el paralelismo, la igualdad o la incidencia[8], mostrando, finalmente, un mensaje con la conclusión obtenida: sí/no, la relación es (numéricamente) válida.

Por el contrario, ahora, la versión 5 de GeoGebra añade un botón adicional en ese mismo mensaje, con la etiqueta "Más ...". Pulsándolo se inician determinados cálculos simbólicos, poniéndose en marcha el subsistema DAT de GeoGebra, que selecciona (según ciertas heurísticas) el método de prueba que considera más adecuado para decidir si la propiedad obtenida numéricamente es, además, rigurosamente cierta en general. La versión actual de GeoGebra (5.0.509) es capaz de elegir, internamente, entre aplicar a) *el método de la base de Gröbner*, b) *el método característico de Wu*, c) *el método del área*, o d) *el método de Recio de verificación exacta a través de un número finito de casos* como la técnica DAT subyacente más oportuna para la verificación o negación de la propiedad conjeturada.

Además, si la relación conjeturada no se cumple (matemáticamente hablando), los dos primeros métodos permiten determinar algunas condiciones geométricas adicionales que deben verificarse para que la afirmación dada sí sea generalmente correcta. Estas son las llamadas *condiciones de no degeneración*, que habitualmente prescriben que determinados objetos del input (por ejemplo, los vértices de un triángulo definido libremente) no deben coincidir o alinearse, etc. para que la relación conjeturada sea verdadera.

La herramienta *Relación* con estas mejoras está ya disponible, no sólo en la versión clásica de GeoGebra (que está programada en Java), sino también en la versión web (que es, principalmente, una compilación de máquina de Java a JavaScript, véase Ancsin, Hohenwarter y Kovács, 2013) y en la versión para *tablet* (Fig. 1a y 1b). En la Fig. 2 se muestra una versión anterior del subsistema DAT para teléfonos inteligentes. Señalemos, también, que en https://tinyurl.com/provertestse encuentra disponible una colección de *tests* del comportamiento de la actual versión de DAT en GeoGebra, involucrando 285 construcciones.

Ha de señalarse que, en la versión actual de GeoGebra, el usuario no dispone de una prueba visible o legible de la validez del teorema que haya sido verificado usando las herramientas DAT. Sin embargo, es preciso insistir en que el resultado obtenido se basa en una prueba matemáticamente correcta, lo que es filosóficamente una verdad de nivel superior y completamente diferente a la alcanzada mediante la verificación de la certeza de una propiedad geométrica sobre una colección de casos particulares obtenidos al arrastrar la construcción dada a diversas posiciones, que ha sido hasta la fecha la forma clásica de trabajar en los sistemas de geometría dinámica.

[8] Véase una lista completa en https://wiki.geogebra.org/en/Relation_Command

3. Conclusión

Como conclusión, creemos que es oportuno citar aquí el mensaje inicial contenido en el estudio premonitorio de ICMI (Howson y Wilson, 1986):

…even if the students will not have to deal with computers till they leave school, it will be necessary to rethink the curriculum, because of the changes in interests that computer have brought.[9]

En realidad, es algo más que "necessary": es urgente abordar los nuevos desafíos planteados por los programas de GD con rutinas de demostración automática de teoremas geométricos, de los que GeoGebra es un ejemplo paradigmático, que ya están disponibles, de forma gratuita y en múltiples plataformas, para millones de estudiantes en todo el mundo.

Esta llamada de atención a la comunidad educativa quiere ser, finalmente, nuestro mensaje.

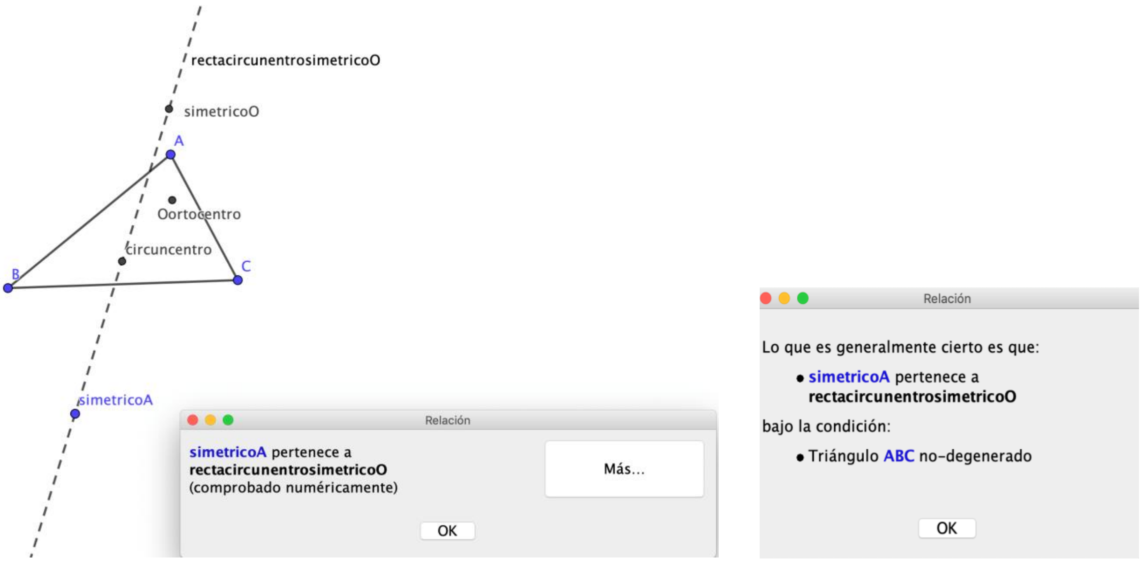

Fig. 1a y 1b: Ejemplo 230 de Chou (Chou, 1987), ejecutado en la versión Clásica de GeoGebra 5: Probar que el simétrico del ortocentro (O) de un triángulo (ABC) con respecto a un vértice (A), y el simétrico de ese vértice con respecto al punto medio del lado opuesto, están alineados con el circuncentro del triángulo.

Se ha usado la herramienta Relación para comprobar si el simétrico del vértice A está en la recta definida por el circuncentro y el simétrico del ortocentro O. Inicialmente, Relación confirma numéricamente esta propiedad. Luego, con Más…, realiza la comprobación rigurosa.

[9]Traducción libre de los autores: "... incluso si los estudiantes no tuvieran que lidiar con las computadoras hasta que salgan de la escuela, será necesario repensar el currículo, debido a los cambios en los intereses que los ordenadores han generado."

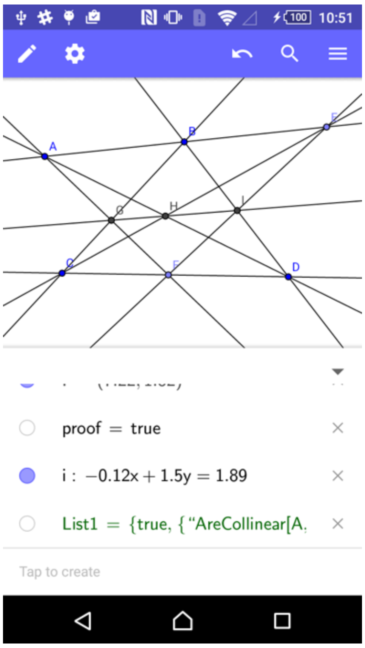

Fig. 2: Investigación del teorema del hexágono de Pappus en un teléfono con Android. Los comandos Comprueba [EstánAlineados [G, H, I]] y DemuestraDetalles [EstánAlineados[G, H, I]] de GeoGebra devuelven Comprueba = true y Lista1 = {true, {“EstánAlineados [A, B, C]”, “EstánAlineados[A, C, D]"}} lo que significa que el teorema es verdadero si los triángulos ABC y ACD no son degenerados (esto es, si {A, B, C} no están alineados y si {A,C, D} tampoco lo están).

Bibliografía

Ancsin, G., Hohenwarter, M., Kovács, Z. (2013). GeoGebra goes web. *The electronic journal of mathematics and technology* (Volume 7, Number 6, pp. 412-418).

Botana, F., Hohenwarter, M., Janičić, P., Kovács Z., Petrović, I., Recio, T., Weitzhofer, S. (2015). Automated theorem proving in GeoGebra: current achievements. *Journal of Automated Reasoning* (Vol. 5, Number 1, pp. 39-59).

Chou, S. C. (1987). *Mechanical geometry theorem proving*. Norwell, MA, USA: Kluwer Academic Publishers.

Decker, W., Greuel, G.M., Pfister, G. & Schönemann, H. (2012). *Singular 3-1-6 – A computer algebra system for polynomial computations*. http://www.singular.uni-kl.de.

Hohenwarter, M. (2002). *Ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene*. Master’s thesis. Salzburg: Paris Lodron University.

Houghton, T. (2014).The impact of GeoGebra – Evidence.Presentación Prezi disponible en https://prezi.com/bsi-qdd6jr6r/the-impact-of-geogebra-evidence.

Howson, G. & Wilson, B. (Eds.) (1986).*School mathematics in the 1990s*.*ICMI Study Series Volume 2*.Cambridge University Press.

Kovács, Z. (2015a). *Computer based conjectures and proofs*. Dissertation. Linz: Johannes Kepler University.

Kovács, Z. (2015b). The Relation Tool in GeoGebra 5. In Botana, F., Quaresma, P. (Eds.), Post-conference Proceedings of the 10th International Workshop on Automated Deduction in Geometry (ADG 2014), 9-11 July 2014, *Lecture Notes in Artificial Intelligence 9201* (pp. 53-71). Springer.

Kovács, Z., Recio, T. and Vélez, M. P. (2018).Using Automated Reasoning Tools in GeoGebra in the Teaching and Learning of Proving in Geometry. International Journal of Technology in Mathematics Education 25 (2), p. 33–50 (DOI: 10.1564/tme_v25.2.03).

Lin, F. L., Yang, K. L., Lee, K. H., Tabach, M. & Stylianides, G. (2012). Principles of task design for conjecturing and proving. In Hanna, G. & de Villiers, M. (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study* (pp. 305-326). Springer.

Parisse, B. (2013). *Giac/Xcas, a free computer algebra system*.Disponible en http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html

Markus Hohenwarter, es, desde 2010, catedrático y director del Departamento de Educación STEM y del equipo de Educación Matemática de la Universidad Johannes Kepler (JKU) de Linz. Creador del software educativo GeoGebra, que ha ganado numerosos premios en Europa y Estados Unidos, lidera en la actualidad su desarrollo y aplicación educativa. Su investigación se centra en el uso de la tecnología en la educación matemática. Más información en https://www.jku.at/linz-school-of-education/ueber-uns/team/mint/hohenwarter-markus/

Zoltán Kovács es un profesor adjunto en The Private University College of Education of the Diocese of Linz, Institute of Initial Teacher Training (Austria), desde 2015. Miembro del equipo de Educación Matemática, en el Departamento de Educación STEM de la Universidad de Linz. Desarrollador del núcleo de GeoGebra, desde 2010. Autor de mas de cincuenta publicaciones científicas y más de un centenar de comunicaciones (incluyendo paquetes de software) en diferentes revistas y conferencias. Temas: Eduación Matemática, Razonamiento Automático en Geometría Dinámica, Algebra Computacional. Mas información en https://www.jku.at/linz-school-of-education/ueber-uns/team/mint/kovacs-zoltan/

Tomás Recio Muñiz. Universidad de Cantabria, Santander. Catedrático de Algebra desde 1982. Presidente del Consejo Escolar de Cantabria (1999-2008). Representante español en la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), en el periodo 2002-2007. Fundador del Instituto GeoGebra de Cantabria. Temas de investigación: Geometría Algebraica Real, Algebra y Geometría Computacional, Razonamiento Automático y Geometría Dinámica, Educación Matemática. Más información en www.recio.tk