NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 101, julio de 2019, páginas 113-134

Una calculadora muy, pero que muy extraña

(Problemas Comentados LI)

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático[1])

Resumen Resolvemos los problemas propuestos en anterior artículo mediante estrategias de ensayo y error, y organizando la información mediante esquemas y tablas de forma exhaustiva. Nos hacemos eco de ampliaciones a las soluciones expuestas en artículos anteriores y proponemos nuevos retos para llevar al aula.

Palabras clave Resolución de problemas. Estrategias de ensayo y error. Estrategia de organización de la información mediante esquemas y tablas de forma exhaustiva. Enunciados de problemas para niveles obligatorios.

Abstract We solve the problems proposed in the previous article by means of testing and error strategies, and organizing the information through diagrams and tables in an exhaustive way. We echo extensions to the solutions presented in previous articles and propose new challenges to take to the classroom.

Keywords Problem resolution. Trial and error strategies. Strategy of organization of the information by means of diagrams and tables of exhaustive form. Problem statements for obligatory levels.

Sabemos que tenemos muchos lectores, aunque nos gustaría que nos escribieran más. Uno de los que nos ha escrito lo ha hecho para indicarnos un posible error nuestro al dar las soluciones del problema **Fechas mágicas** publicado en la revista nº 49 y resuelto en el nº 50. Se trata de **Juan Carlos de la Paz**, profesor del Colegio Nuryana de La Laguna. Nos dice así en su escrito:

"Buenas tardes:

Primero que nada, enhorabuena por el gran trabajo que están realizando. Para mí sus artículos, charlas y seminarios son una gran ayuda.

Estaba probando a simular el problema de las fechas mágicas con la hoja de cálculo de GeoGebra, para ver la posibilidad de usarlo con mis alumnos, y me salieron algunas fechas más, no sé si estoy cometiendo algún error.

Hasta el año 2000 me salen 34 fechas mágicas. Me parece que faltan el 28-3-84, 14-6-84, 12-7-84 y 7-12-84.

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón** y **Manuel García Déniz**, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

Y hasta el 2018 me salen 52 fechas mágicas. Me parece que faltan el 14-1-14, 15-1-15, 16-1-16, y 18-1-18.

También en la fecha que debería poner 17-1-17 pone un 17-1-13.

Muchas gracias de nuevo y saludos.

Juan Carlos."

Juan Carlos, agradecemos tus palabras y, por supuesto, tu corrección. Nos encanta tener lectores como tú.

Nos gustaría indicar que no nos han llegado soluciones a los problemas del Torneo de Secundaria de 2018. Nos llenaremos de paciencia y esperaremos un poco más para dar tiempo a que nos llegue alguna.

Por nuestra parte, daremos algunas soluciones a los problemas propuestos como retos en el anterior artículo. Y expondremos alguna recibida también. Dejaremos algunos también sin respuesta confiando en que nos llegará alguna de parte de nuestros lectores.

Primer reto:

UNA PESADA CADENA

Tienes una gruesa cadena de trece eslabones que pesan un kilo cada uno, lo que los hace idóneos para usarlos como pesas en una balanza de brazos iguales.
¿Cuántos eslabones tiene que abrir para poder pesar cualquier número exacto de kilos comprendido entre 1 y 13 (ambos inclusive)?
Razona adecuadamente y explica cómo harás cada una de las pesadas solicitadas.

Nosotros lo hemos resuelto así:

COMPRENDER Datos Una cadena de trece eslabones. Cada eslabón pesa un kilo. Se van a usar como pesas en una balanza de brazos iguales. Objetivo Cuántos eslabones tiene que abrir para poder pesar cualquier número exacto de kilos comprendido entre 1 y 13 (ambos inclusive). Relación Las pesadas se podrán hacer poniendo eslabones en uno de los platos (comparación) o en ambos (diferencia). Diagrama El que ilustra el problema.

PENSAR Estrategias Ensayo y Error. Organizar la Información

EJECUTAR Si hacemos una prueba rompiendo el tercer eslabón para quedarnos con dos pedazos, uno de un eslabón (el que se ha abierto) y otro con dos eslabones, nos quedaría un tercer pedazo con diez eslabones.

Con los dos pedazos de 1 y 2 podemos pesar 1, 2 y 3 kilos.

Evidentemente, para poder seguir pesando debemos tener, al menos, un pedazo con cuatro eslabones. Ello obligaría a romper el eslabón número nueve, quedándonos ahora un trozo de cuatro eslabones, otro de cinco eslabones y otro más de un eslabón.

Es decir, las pesas disponibles son 1, 1, 2, 4 y 5.

Con ellas podemos pesar: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 y 13, poniendo las pesas en un solo platillo de la balanza, y, además, algunas de esas pesadas pueden ser realizadas de varias maneras distintas.

1 → 1	**6** → 4 + 2, 4 + 1 + 1	**11** → 5 + 4 + 2, 5 + 4 + 1 + 1
2 → 2	**7** → 5 + 2, 5 + 1 + 1,	**12** → 5 + 4 + 2 + 1
3 → 2 + 1	**8** → 5 + 2 + 1, 4 + 2 + 1 + 1	**13** → 5 + 4 + 2 + 1 + 1
4 → 2 + 1 + 1	**9** → 5 + 4, 5 + 2 + 1 + 1	
5 → 4 + 1	**10** → 5 + 4 + 1	

Pero ha habido que romper dos eslabones: el tercero y el noveno. La cuestión está en ver si hay otra manera más eficiente en la que sólo haya que romper un eslabón.

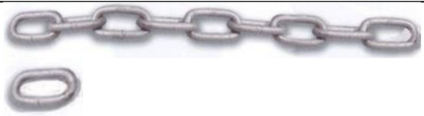
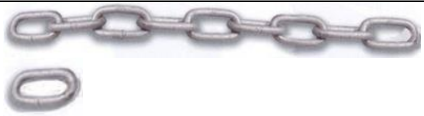
Y sí la hay: romper el cuarto eslabón. Nos quedan así tres pedazos de la cadena con 1, 3 y 9 eslabones.

Para conseguir las diferentes pesadas es necesario usar los dos platillos de la balanza para colocar las pesas. Las que se coloquen en el platillo del objeto a pesar se restarán del peso de las colocadas en el otro platillo de la balanza.

Podemos representar todas las pesadas, poniendo como negativo el trozo de cadena que va en el platillo donde está el cuerpo a pesar, que aparece a la derecha de la flecha:

1 – 0 → 1	**3** – 9 → 6	**9** + 3 – 1 → 11
1 – 3 → 2	**3** – 9 + 1 → 7	**9** + 3 – 0 → 12
3 – 0 → 3	**1** – 9 → 8	**9** + 3 + 1 – 0 → 13
1 + 3 – 0 → 4	**9** – 0 → 9	
1 + 3 – 9 → 5	**9** + 1 – 0 → 10	

Lo podemos representar de manera más gráfica como en la siguiente tabla, donde los paquetes azules representan el peso del objeto a pesar.

PLATO IZQUIERDO	PLATO DERECHO	
		1
		2
		3
		4
		5
		6
		7
		8
		9
		10
		11
		12
		13

Tenemos dos soluciones posibles, pero esta última es mejor ya que necesita romper menos eslabones que la anterior.

<u>Solución</u> Un único eslabón.

RESPONDER <u>Comprobación</u> Hacemos todas las pesadas posibles:

1 – 0 → 1 1 – 3 → 2 3 – 0 → 3 1 + 3 – 0 → 4 1 + 3 – 9 → 5 3 – 9 → 6

3 – 9 + 1 → 7 1 – 9 → 8 9 – 0 → 9 9 + 1 – 0 → 10 9 + 3 – 1 → 11

9 + 3 – 0 → 12 9 + 3 + 1 – 0 → 13

Análisis Varias soluciones posibles, pero una sola óptima.

Respuesta: **Bastará con abrir el eslabón que esté en cuarto lugar, lo cual dará lugar a la obtención de tres tramos de la cadena: 1, 3 y 9.**

Con ellos se podrán realizar las siguientes pesadas:

1 – 0 → 1 1 – 3 → 2 3 – 0 → 3 1 + 3 – 0 → 4 1 + 3 – 9 → 5 3 – 9 → 6

3 – 9 + 1 → 7 1 – 9 → 8 9 – 0 → 9 9 + 1 – 0 → 10 9 + 3 – 1 → 11

9 + 3 – 0 → 12 9 + 3 + 1 – 0 → 13

Donde el primer número representa el platillo de la izquierda, el segundo número el platillo de la derecha y, el tercer número, el valor final de la pesada.

Segundo reto:

LA GARRAFA DE LECHE

La noche de Fin de Año, tres familias necesitadas reciben como regalo una garrafa que contiene doce litros de leche. Quieren repartírsela a partes iguales y para ello disponen de una jarra de cinco litros de capacidad y otra de tres.

¿Cómo pueden hacer el reparto sin que se desperdicie nada de leche y con el menor número de operaciones posible?

Justifica adecuadamente todos los pasos de tu resolución.

Nuestra solución:

COMPRENDER Datos Tres familias reciben como regalo una garrafa con doce litros de leche. Disponen de una jarra de cinco litros de capacidad y otra de tres. Objetivo Cómo pueden hacer el reparto. Relación Quieren repartírsela a partes iguales. Hacer trasvases sin que se derrame ni una gota de leche. Con el menor número de trasvases posible. Diagrama Una tabla.

PENSAR Estrategias Organizar la Información de manera exhaustiva.

EJECUTAR Si hacemos un pequeño cálculo, repartir 12 litros entre 3 personas corresponde a 4 litros para cada una de ellas. No hay tres recipientes con esa capacidad. En el de 12 litros caben 4 litros, en el de 5 litros caben 4 litros, pero en el de 3 litros es imposible. Será necesario pensar en otra forma de repartir la leche.

Movimiento	Garrafa de 12 litros	Garrafa de 5 litros	Garrafa de 3 litros
Punto de partida	12	0	0
1º	9	0	3
2º	9	3	0
3º	6	3	3
4º	6	5	1

Procediendo como indica la tabla anterior podemos obtener 1 litro. Como se trata de familias menesterosas no hay ningún inconveniente para que una de ellas se beba directamente ese litro de leche y se anota como recibido.

Ahora podemos reanudar el reparto. O bien se repite el proceso tres veces para que cada familia beba su litro de leche extra y, después, se reparte el resto a partes iguales, 3 litros a cada familia. O bien, se reparte lo que queda de manera que las otras dos familias reciban 4 litros cada una y la tercera, que ya bebió su litro, reciba los 3 litros que le faltan.

En la primera posibilidad se necesitan 4 x 3 = 12 movimientos básicos más los necesarios para obtener las tres partes iguales a 3. Procedamos con la segunda manera de trasvasar:

Movimiento	Garrafa de 12 litros	Garrafa de 5 litros	Garrafa de 3 litros
Punto de partida	6	5	0
5º	6	2	3
6º	9	2	0
7º	9	0	2
8º	4	5	2
9º	4	4	3

Con lo cual, en nueve movimientos, queda resuelto el problema.

Solución Los nueve movimientos reflejados en la tabla.

RESPONDER Comprobación Se puede realizar una modelización con vasos de distintas capacidades o, simplemente, revisar la tabla para comprobar que no hay una solución mejor.

Análisis Solución única.

Respuesta: **El reparto se hará de la forma indicada en la tabla siguiente:**

Movimiento	**Garrafa de 12 litros**	**Garrafa de 5 litros**	**Garrafa de 3 litros**
Punto de partida	**12**	**0**	**0**
1º	**9**	**0**	**3**
2º	**9**	**3**	**0**
3º	**6**	**3**	**3**
4º	**6**	**5**	**1**
Una familia bebe el litro	**6**	**5**	**0**

de leche separado.			
5º	**6**	**2**	**3**
6º	**9**	**2**	**0**
7º	**9**	**0**	**2**
8º	**4**	**5**	**2**
9º	**4**	**4**	**3**

El lector y, especialmente amigo, Luis Ángel Blanco nos manda solución a este mismo problema. Queremos exponerlo aquí para presentar a los que nos leen otra manera de afrontar los mismos problemas.

COMPRENDER: Datos: Tres familias. Tenemos una garrafa con 12 litros de leche. Tenemos una jarra de 5 litros y otra de 3 litros. Objetivo: ¿Cómo pueden hacer el reparto sin que se desperdicie nada de leche y con el menor número de operaciones posible? Relación: Quieren repartir los 12 litros en partes iguales, es decir 4 litros para cada familia. Diagrama: Diagrama de grafos.

PENSAR: Estrategias: Organizar la información y simplificar

EJECUTAR: **Estrategia de organización de la información con simplificación por división del problema en dos partes.**

Tenemos que darnos cuenta que si las tres familias quieren cuatro litros y como los contenedores son de 12, 5 y 3 litros, evidentemente la familia que decida llevarse la leche en la jarra de 3 litros deberá primero separar un litro que se tomará durante el reparto y distribuir el resto de la leche con 4 litros en la garrafa de 12 litros, 4 litros en la jarra de 5 litros y 3 litros en la jarra de tres litros.

Por tanto, podemos dividir el problema en dos partes, (simplificar) separando en primer lugar un litro de leche y después de beber ese litro, comenzaría la segunda parte del problema que consistiría en repartir los 11 litros restantes en 4, 4 y 3 litros.

Existe una técnica que consiste en representar cada trasvase como un grafo.

1.- Dibujamos una tabla isométrica donde el eje de las abscisas representa la capacidad de un depósito vacío (5 l) y el eje de las ordenadas el otro depósito vacío (3 l).

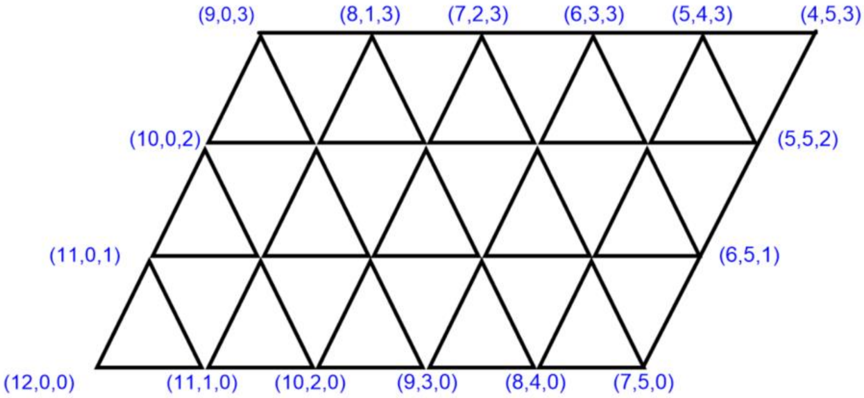
2.- Numeramos los vértices de los bordes con tríos ordenados de números. (A, B, C).

El primer término representa los litros que hay en el depósito de 12 litros.

El segundo término representa los litros que hay en el depósito de 5 litros,

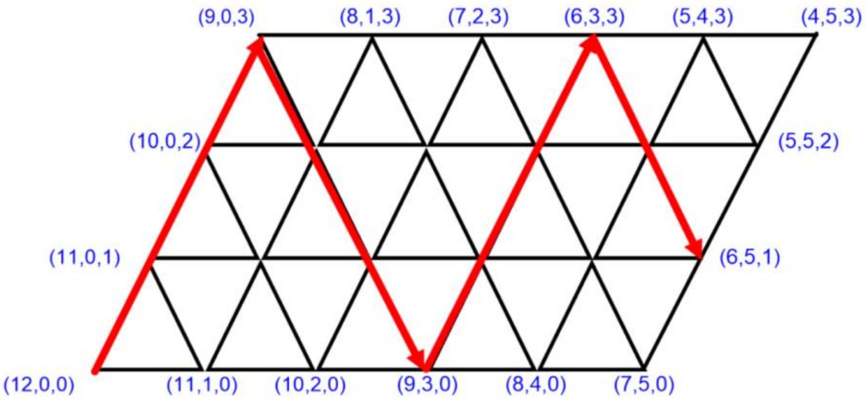
El tercer término representa los litros que hay en el depósito de 3 litros,

P R O B L E M A S



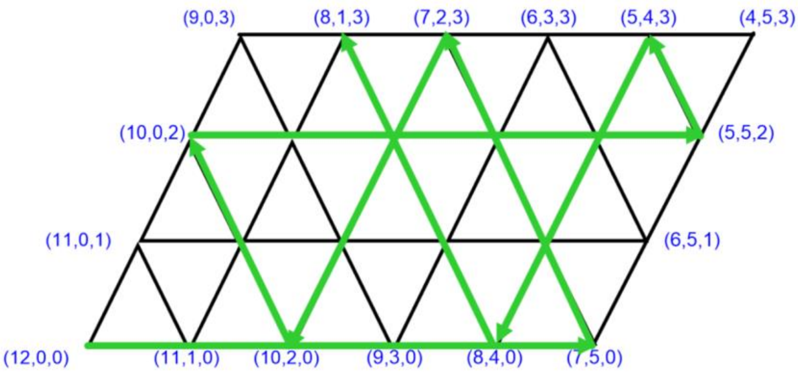
<u>Primera parte del problema: Separar un litro de leche.</u>

Partiendo de (12,0,0) como si un haz de luz rebotara sobre paredes espejo, la podemos enviar a (9,0,3) o a (7,5,0). Solo hay esas dos opciones iniciales que significan llenar la jarra de 3 litros o llenar la jarra de 5 litros. En sucesivos rebotes debemos conseguir llegar a un punto de los bordes en los que haya un término que sea 1, así conseguiremos aislar 1 litro de leche. Veamos el grafo si la enviamos a (9,0,3).



Con **cuatro trasvases** hemos conseguido aislar un litro en la jarra de 3 litros, quedando la jarra de 5 litros llena y la jarra de 12 litros con 6 litros.

Si hubiéramos comenzado por hacer el primer trasvase a la jarra de 5 litros habríamos creado el siguiente grafo:

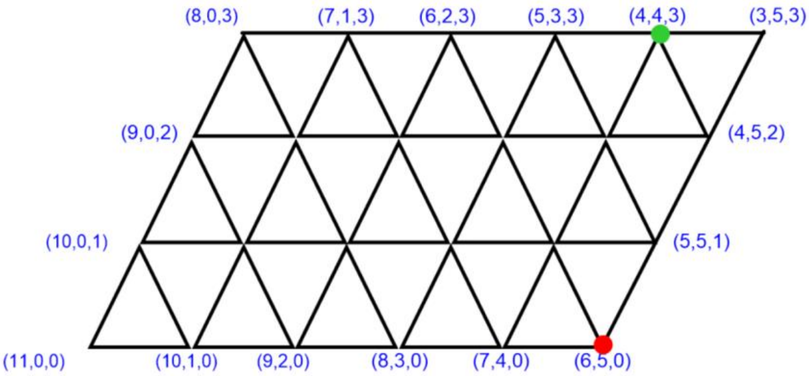


Que requiere de un mínimo de **ocho trasvases** para aislar un litro de leche en la jarra de 5 litros, quedando la jarra de tres litros llena y el depósito de 12 litros con ocho litros.

Hasta aquí la primera parte de la fase de ejecución.

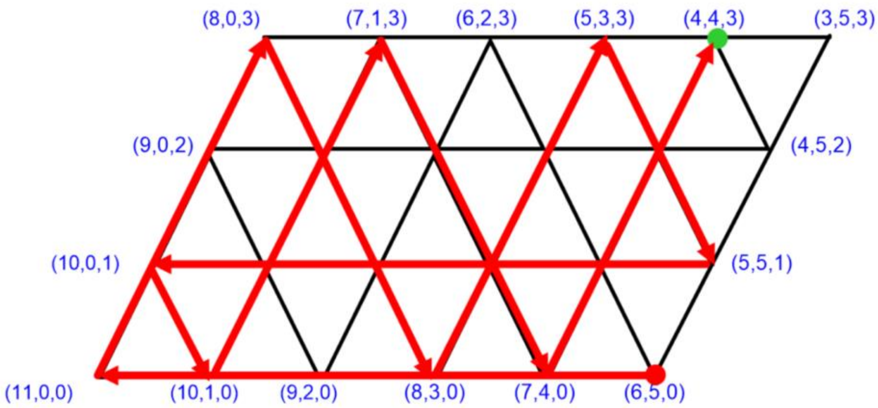
Segunda parte del problema: Separar cuatro, cuatro y tres litros de leche.

Ahora se debe vaciar ese primer litro que una de las familias se ha de beber para continuar con el trasvase para conseguir separar 4, 4 y 3 litros respectivamente. Eso quiere decir que de la posición de partida debemos llegar al punto (4,4,3) en un nuevo grafo en el que varía la cantidad del primer término en uno menos al haber ahora 11 litros en lugar de 12 litros. Ahora utilizaremos este nuevo diagrama, donde el punto rojo indica el punto de partida y el punto verde el punto de llegada.



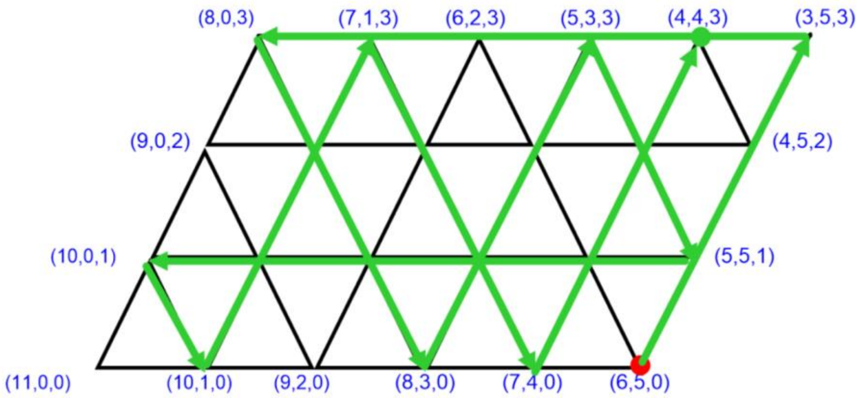
Del punto rojo existen tres posibles caminos, los exploramos los tres y observamos cual es el que menos trasvases necesita:

1.)



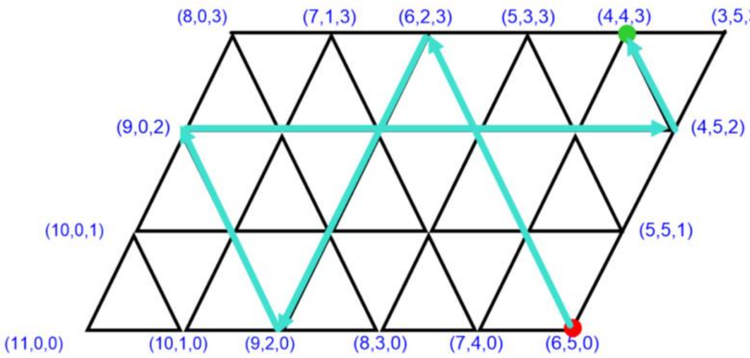
En este caso necesitaríamos 10 trasvases.

2.)



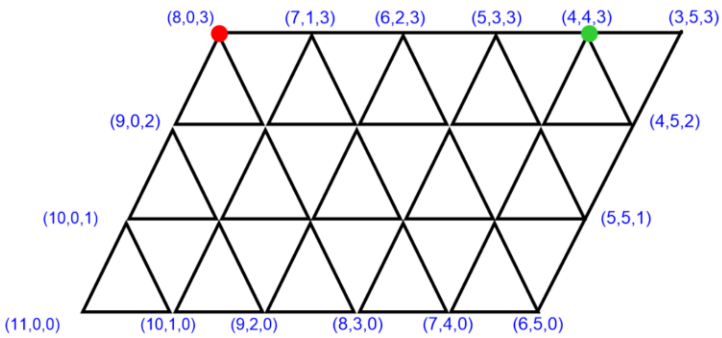
En este caso también necesitaríamos 10 trasvases.

3.)



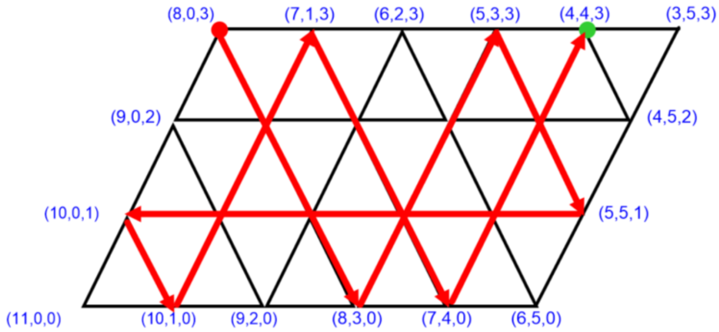
Y en este caso necesitaríamos 5 trasvases.

Si hubiéramos optado en la primera fase por escoger la segunda opción y llegar al punto (8,1,3), después de vaciar el litro de leche tendríamos que hacer los trasvases desde el punto (8,0,3) para llegar al punto (4,4,3). Para ello utilizaríamos el siguiente grafo que también tiene tres recorridos:



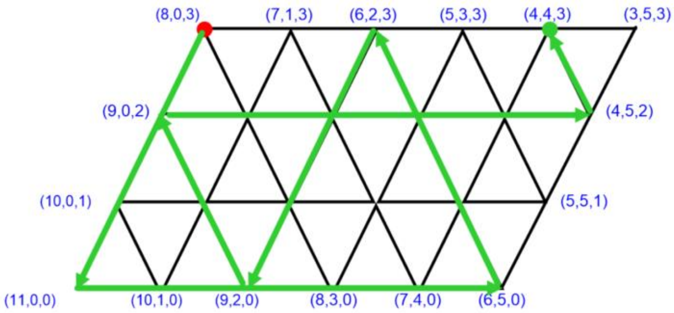
Del punto rojo existen tres posibles caminos, los exploramos los tres y observamos cual es el que menos trasvases necesita:

1.)



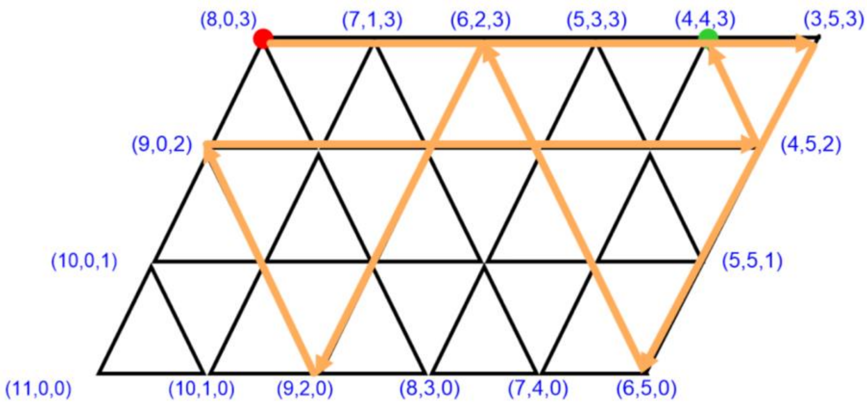
Necesita 8 trasvases.

2.)



Necesita 7 trasvases.

3.)



Necesita 7 trasvases.

Por tanto, podemos adelantar una **solución**. Para aislar 1 litro se necesitan un mínimo de 4 trasvases. Una vez vaciado ese litro, para conseguir separar los once litros restantes en 4 litros por un lado cuatro litros por otro lado y tres litros por otro lado, se necesita un mínimo de 5 trasvases, **en total se puede resolver con 9 trasvases.**

P R O B L E M A S

Si lo ordenáramos en una tabla de doble entrada sería así:

Trasvases	Jarra de 12 litros	Jarra de 5 litros	Jarra de 3 litros	Observaciones
0	12	0	0	Punto de partida
1	9	0	3	
2	9	3	0	
3	6	3	3	
4	6	5	1	El litro de esta jarra es bebido por una de las familias. No se considera un trasvase
4	6	5	0	
5	6	2	3	
6	9	2	0	
7	9	0	2	
8	4	5	2	
9	4	4	3	Los tres litros se los lleva la familia que se bebió un litro en el trasvase 4.

RESPONDER:

Comprobar: El sistema de la resolución por un diagrama de grafos ofrece la respuesta con el menor número de trasvases.

Análisis: Aunque existen numerosas formas de hacer los trasvases, unas llevarán más manipulaciones que otras. La solución mínima es aquella en la que se realizan solo 9 trasvases, sin contar como trasvase el que en la mitad del proceso una familia se debe beber un litro de leche aislado en una de las jarras.

Respuesta:

Para hacer el mínimo número de trasvases hay que proceder de la siguiente manera:

- **Trasvase 1. Pasamos 3 l de la jarra de 12 litros a la de 3 litros.**
- **Trasvase 2. Vaciamos la jarra de 3 litros en la de 5 litros.**
- **Trasvase 3, Pasamos 3 l de la jarra de 12 litros a la de 3 litros.**
- **Trasvase 4. Pasamos 2 litros de la jarra de 3 a la jarra de 5 con lo que conseguimos dejar 1 litro en la jarra de 3 que se beberá una familia.**
- **Trasvase 5. Pasamos 3 litros de la jarra de 5 litros a la de 3 litros.**
- **Trasvase 6. Pasamos los 3 litros de la jarra de 3 a la jarra de 12 litros.**
- **Trasvase 7. Pasamos los 2 litros de la jarra de 5 litros a la de 3 litros.**
- **Trasvase 8. Pasamos 5 litros de la jarra de 12 a la de 5 litros.**

Y trasvase 9. Pasamos un litro de la jarra de 5 litros a la de 3 litros. Así obtenemos 4 litros en la de 12 litros, 4 litros en la de 5 litros y 3 litros en la jarra de tres litros.

Les proponemos una variante en las condiciones para que utilizando cualquiera de los métodos explicados busquen las soluciones. La variante es que las familias disponen de recipientes donde caben los cuatro litros de leche, por lo que no es necesario que obliguemos a beberse un litro a una de ellas, como hemos hecho al resolverlo.

Tercer reto:

EL HOTEL DE LAS CIEN PUERTAS

Un hotel dispone de 100 habitaciones y 100 camareros. Los camareros tienen la costumbre siguiente, más bien simple:

Un primer camarero cierra las puertas de todas las habitaciones.
Un segundo abre las puertas de las habitaciones pares.
Un tercero cambia de posición todas las puertas que son múltiplos de 3.
Un cuarto cambia todas las que son múltiplos de 4...
Así hasta que ha pasado el último camarero.

¿Qué puertas quedarán CERRADAS al final?

Nuestra solución:

COMPRENDER Datos Un hotel con 100 habitaciones. Trabajan 100 camareros. Los camareros tienen la costumbre de abrir y cerrar las puertas según un cierto orden. Objetivo Qué puertas quedarán CERRADAS al final. Relación El primer camarero cierra las puertas de todas las habitaciones. El segundo abre las puertas de las habitaciones pares. El tercero cambia de posición todas las puertas que son múltiplos de 3. El cuarto cambia todas las que son múltiplos de 4. Y así hasta que ha pasado el último camarero, el centésimo. Diagrama Tabla. Modelo

PENSAR Estrategias Simplificar. Modelización. Organizar la Información. Buscar Patrones.

EJECUTAR Sería bueno, para entender bien el problema y para encontrar el patrón, acudir a resolver casos sencillos, por ejemplo, para 5 puertas o para 10.

Para cinco puertas (**A**=abierta, **C**=cerrada):

- Primer camarero: cierra las puertas de todas las habitaciones. **C C C C C**
- Segundo camarero: abre las que tienen como número un múltiplo de 2, es decir, abrimos la 2 y la 4. **C A C A C**
- Tercer camarero: cambia de posición todas las que son múltiplo de 3: **C A A A C,** es decir, abre la 3
- Cuarto camarero: cambia de posición las que son múltiplo de 4: cierra la 4. **C A A C C**
- Quinto camarero: cambia de posición las que son múltiplo de 5, esto es, abre la 5. **C A A C A**

En este ejemplo **han quedado cerradas la puerta 1 y la puerta 4**.

Realicemos el mismo procedimiento para 10 puertas:

- Camarero 1: **C C C C C C C C C C**
- Camarero 2: **C A C A C A C A C A**
- Camarero 3: **C A A A C C C A A A**
- Camarero 4: **C A A C C C C C A A**
- Camarero 5: **C A A C A C C C A C**
- Camarero 6: **C A A C A A C C A C**
- Camarero 7: **C A A C A A A C A C**
- Camarero 8: **C A A C A A A A A C**
- Camarero 9: **C A A C A A A A C C**
- Camarero 10: **C A A C A A A A C A**

En este caso **quedan cerradas la <u>puerta 1</u>, la <u>puerta 4</u> y la <u>puerta 9</u>**.

Podemos establecer una hipótesis acerca del patrón que parece ser LAS PUERTAS **CERRADAS** SON LOS **NÚMEROS CUADRADOS**.

Habría que verificar la hipótesis haciendo al menos dos casos más, por ejemplo para 16 o para 30 puertas. Pero también podemos razonar para encontrar la justificación para esa hipótesis.

Todas las puertas comienzan cerradas y cambian de estado cuando nos colocamos delante de un divisor del número de dicha puerta.

Por ejemplo, la secuencia que se sigue en la puerta 18 es la siguiente: se abre con el 2, se cierra con el 3, se abre con el 6, se cierra con el 9 y se abre con el 18, por lo que **la puerta 18 termina abierta**.

Con la puerta 16 la secuencia es: se abre con el 2, se cierra con el 4, se abre con el 8 y se cierra con el 16. En este caso, **la puerta 16 queda cerrada**.

¿Por qué la 18 queda abierta y, en cambio, la 16 queda cerrada?

Los divisores de 18 son el 1, el 2, el 3, el 6, el 9 y el 18. Un número par, incluyendo al 1.

El 18 cambia de estado 5 veces más el cierre inicial. Un número impar de veces. Cambia con cada divisor de 18. Es decir, termina con el estado contrario al que tenía cuando comenzó con el camarero 1.

Los divisores de 16 son el 1, el 2, el 4, el 8 y el 16. Un número impar, incluyendo al 1.

El 16 cambia de estado 4 veces más el cierre inicial. Un número par de veces. Cambia con cada divisor de 16. Es decir, termina con el estado idéntico al que tenía cuando comenzó con el camarero 1.

Las puertas cuyo número tiene un número **par** de divisores acaban **abiertas**.

Las puertas cuyo número tiene un número **impar** de divisores acaban **cerradas.** Y los únicos números que tienen un número impar de divisores son los **números cuadrados**.

Como los factores deben multiplicarse por otros factores para conseguir el número (por ejemplo, 4 x 6 = 24; 8 x 3 = 24, etc.), los factores siempre aparecen por pares. Sin embargo, los números cuadrados tienen unos pares de factores que consisten en el factor multiplicado por sí mismo, de forma que cuentan como un único factor.

Consideremos el número 36: 1 x 36; 2 x 18; 3 x 12; 4 x 9; 6 x 6.

Sus factores son, pues, el 1 y el 36; el 2 y el 18; el 3 y el 12; el 4 y el 9; y el 6, lo que da un total de 9 factores, es decir, un número impar de factores.

Los números cuadrados son los únicos números que tienen un número impar de factores,

Solución Los números cuadrados.

RESPONDER Comprobación Podemos hacer una simulación (modelización) para 52 puertas con las cartas de una baraja. Se pondrán, en principio, todas boca abajo (con el dorso hacia arriba) y se procederá a realizar los cambios que realizan los camareros volteando las cartas en cada uno de los pases. Deberá observarse que, al finalizar, quedarán boca abajo (cerradas) solamente las cartas que ocupan los lugares 1, 4, 9, 16, 25, 36 y 49.

Análisis Solución única.

Respuesta: **Al final del paso de los cien camareros, las puertas que quedarán cerradas son aquellas que tienen como número un número cuadrado.**

Cuarto reto:

CRUZAR EL PUENTE

Cuatro amigos deben cruzar un barranco muy profundo y peligroso que sólo se puede atravesar por un viejo y desvencijado puente de cuerda. Además, faltan muchas de las lamas de madera del puente, así que es imposible cruzarlo con seguridad sin mirar donde poner los pies.

Por desgracia ha caído la noche, así que necesitarán una luz para guiarse y sólo hay una linterna en el grupo.

Para colmo de males, el puente es endeble y como máximo aguanta el peso de dos personas al mismo tiempo. Además, es un puente largo, muy largo.

Los cuatro amigos son perseguidos por una banda criminal que tardará 15 minutos en alcanzarlos. Por si fuera poco, los miembros del grupo tienen ciertas limitaciones para cruzar el puente debido a la carga que acarrean:

- Andrés es conocido por su agilidad de cabra montesa, puede atravesar veloz el puente en tan solo un minuto.
- Blas también es bastante rápido, pero lleva un montón de carga, de manera que tardará dos minutos.
- Carlos también va muy cargado pero es capaz de moverse a un ritmo bastante bueno y será capaz de cruzar en tan solo cinco minutos.
- Darío, finalmente, aunque es el menos cargado, no es capaz de cruzar el puente en menos de ocho minutos por temor a perder su carga.

¿Cómo conseguir que los cuatro amigos consigan pasar ilesos al otro lado del puente en tan solo quince minutos, de forma que puedan prenderle fuego al puente antes de tener encima a la banda de criminales?

Nuestra solución:

COMPRENDER Datos Cuatro amigos. Deben cruzar un puente viejo, peligroso y muy largo, de noche y que sólo aguanta el peso de dos personas a la vez o de una sola. Sólo hay una linterna. Únicamente disponen de 15 minutos para cruzarlo. Objetivo Cómo conseguir que los cuatro amigos consigan pasar ilesos al otro lado del puente. Relación Los cuatro amigos tienen ciertas limitaciones para cruzar el puente debido a la carga que acarrean: Andrés puede atravesar el puente en 1 minuto. Blas va cargado y tarda 2 minutos. Carlos también va cargado y es capaz de cruzar en 5 minutos. Darío tarda 8 minutos. Diagrama Una tabla sistemática.

PENSAR Estrategias Organizar la Información de manera sistemática. Ensayo y Error. Modelización.

EJECUTAR Podríamos utilizar una tira de papel para representar el puente y cuatro muñequitos de lego para representar a los cuatro amigos. Podría funcionar un razonamiento que requeriría ir anotando y sumando los tiempos de cruce. El Ensayo y Error contribuiría a la búsqueda de la solución.

Pero mucho más interesante es tratar de organizar la información para poder minimizar los tiempos de cruce.

Pensemos: alguien tiene que devolver la linterna al inicio del puente después de cada cruce y debería ser la persona más rápida que haya cruzado y que, además, ya no llevaría carga. Hay personas que no deberían hacer más de un viaje. Éstas deben ser Carlos y Darío que tardan mucho en cruzar.

Podríamos intentar ver cuánto tarda cada pareja en cruzar el puente: evidentemente será el tiempo que tarde el componente más lento de la pareja.

A + B → 2 min	A + D → 8 min	B + D → 8 min
A + C → 5 min	B + C → 5 min	C + D → 8 min

Sería bueno que los dos miembros más lentos crucen juntos. Tardarán 8 minutos en cruzar. Ninguno de ellos debe hacer más de un viaje, por lo tanto, no pueden volver atrás para entregar la linterna. Es decir, no pueden ser los primeros. Y tampoco pueden ser los últimos. Tendrían que ir en el medio.

Así que Andrés y Blas tienen que ser los primeros en cruzar y lo harán en 2 minutos. Andrés regresa con la linterna y tarda 1 minuto. Obtenemos un tiempo total de 3 minutos.

Creemos una tabla para esquematizar lo ya razonado:

Inicio	Van	Tiempo	Regresa	Tiempo	Final	Tiempo total
A B C D	A B	2	A	1	B	2 + 1 = 3 min
A C D						

Ahora deben cruzar Carlos y Darío, los dos más lentos, y tardarán 8 minutos. Regresará Blas con la linterna, ya que es más rápido que los otros dos.

Inicio	Van	Tiempo	Regresa	Tiempo	Final	Tiempo total
A B C D	A B	2	A	1	B	2 + 1 = 3 min
A C D	C D	8	B	2	C D	3 + 8 + 2 = 13 min
A B						

Ahora Andrés y Blas realizan el último tramo para cruzar el puente, lo que lleva 2 minutos.

Inicio	Van	Tiempo	Regresa	Tiempo	Final	Tiempo total
A B C D	A B	2	A	1	B	2 + 1 = 3 min
A C D	C D	8	B	2	C D	3 + 8 + 2 = 13 min
A B	A B	2			A B C D	13 + 2 = 15 min

Hemos conseguido el pase del puente en 15 minutos.

Pero si nos damos cuenta, los regresos de Andrés y Blas pueden ser intercambiados. Eso significa una segunda solución alternativa.

Solución Los amigos consiguen pasar el puente en cinco movimientos y 15 minutos.

RESPONDER

Comprobación Se puede hacer una simulación, aunque la tabla es suficiente para verificar la corrección de los cálculos.

Análisis Hay dos soluciones, que se diferencian en el intercambio en los dos movimientos de regreso con la linterna, y ambas son correctas

Respuesta:

- **1º. Cruzan Andrés y Blas con la linterna. (2 minutos)**
- **2º. Regresa Andrés con la linterna. (1 minuto)**
- **3º. Cruzan Carlos y Darío con la linterna. (8 minutos)**
- **4º. Regresa Blas con la linterna. (2 minutos)**

- **5º. Cruzan Andrés y Blas con la linterna. (2 minutos)**

Han empleado 2 + 1 + 8 + 2 + 2 = 15 minutos y, por muy rápidos que sean los miembros de la banda de criminales, tendrán tiempo de prender fuego al puente para evitar su persecución.

Otra manera de resolverlo. Cómo no, de Luis Ángel Blanco:

COMPRENDER: Datos: Cuatro amigos: Andrés, Blas, Carlos y Darío deben cruzar un puente. Tienen una única linterna y la necesitan para cruzar el puente pues es de noche. El puente sólo resiste el paso de dos personas a la vez. Disponen sólo de 15 minutos para cruzar todos el puente. Andrés puede atravesar el puente en un minuto. Blas puede atravesar el puente en dos minutos. Carlos será capaz de cruzar en tan sólo cinco minutos. Darío no es capaz de cruzar el puente en menos de ocho minutos. Objetivo: ¿Cómo conseguir que los cuatro amigos consigan pasar ilesos al otro lado del puente en tan solo quince minutos? Relación: Si dos personas cruzan el puente, irán siempre a la velocidad del más lento pues tienen que alumbrase con la única linterna que tienen. Siempre que crucen dos personas, una tiene que volver con la linterna para que pueda cruzar el resto, por tanto siempre cruzarán el puente a la ida en parejas. Diagrama: Pictograma

PENSAR: Estrategias: Modelización con ensayo-error. Organizar la información.

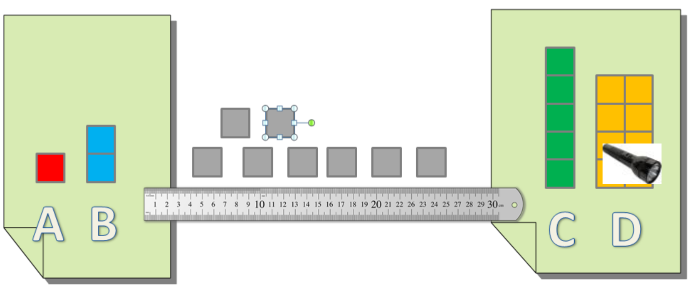
EJECUTAR: **Modelización con Ensayo-error.**

Se puede crear un modelo manipulativo con dos folios que representan las dos orillas del barranco, donde iremos colocando las personas según van cruzando en una u otra orilla. Podemos representar el puente con una regla o cualquier objeto alargado. Necesitamos también algún pequeño objeto que haga de linterna, ya que esta nos marcará la dirección del siguiente cruce del puente.

Para representar las personas utilizaremos fichas encajables como los cubos multilink, fichas de lego, etc. De tal manera que a Andrés le representaremos con un cubito, a Blas con dos cubitos a Carlos con 5 cubitos y a Darío con 8 cubitos.

Cada vez que una persona cruza el puente, deja sobre el puente tantos cubitos como lleva encima, actuando así como un contador de tiempo. Si dos personas cruzan a la vez sólo se pondrán tantos cubitos como tenga el mayor de ellos. Si en el puente se acumulan al final más de 15 cubitos quiere decir que no han conseguido cruzar el puente a tiempo. Y a partir de aquí se trata de ir haciendo ensayos hasta conseguir el objetivo.

Este modelo se puede realizar igualmente con regletas.



La imagen representa un ensayo en el modelo justo después del primer movimiento en el que han cruzado el puente Carlos y Darío. Al cruzar juntos, sobre el puente se han acumulado ya 8 minutos que es lo que han tardado en cruzar.

Organizar la información.

Para organizar la información debemos considerar todos los aspectos que optimizan los tiempos para cruzar el puente.

1. Hay que cruzar siempre de 2 en 2 el puente desde la primera orilla.
2. Por cada viaje de ida hay que hacer uno de vuelta para devolver la linterna.
3. Los que deben de volver con la linterna han de ser los más rápidos en cruzar.
4. Los más lentos en cruzar deben hacerlo juntos con lo que nos ahorramos los minutos del segundo más lento.
5. Siempre tiene que haber uno rápido en la segunda orilla para devolver la linterna.

Pues bien, teniendo en cuenta esto, podemos ver que la estrategia está clara en función de estas consideraciones.

- Según 1 y 5 en el primer viaje cruzarían A y B consumiendo 2 minutos
- Según 2 y 3 debe volver A consumiendo 1 minuto.
- Según 4 deben cruzar ahora C y D, consumiendo 8 minutos.
- Según 2 y 5 debería volver con la linterna B consumiendo 2 minutos.
- Por último, cruzarían A y B consumiendo 2 minutos.

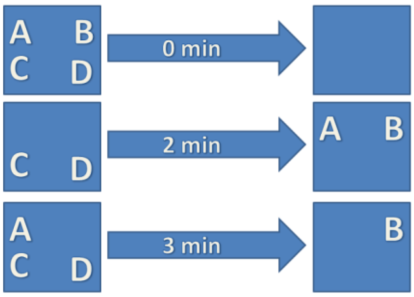
Contamos los minutos: 2+1+8+2+2=15 minutos

Solución:

Cruzan A y B, regresa A

Cruzan C y D regresa B

Cruzan A y B

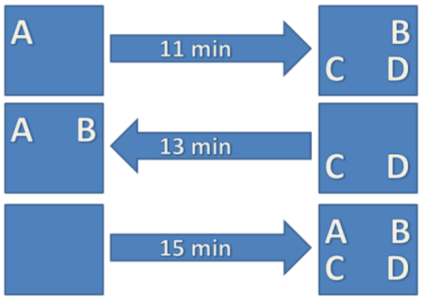


También puede ser:

Cruzan A y B, regresa B

Cruzan C y D, regresa A

Cruzan A y B



Número de cruces y sentido	Lado izquierdo puente	Cruzan	Tardan	Lado derecho del puente
1 +	CD	AB ⟶	2	AB
2 -	CDB	⟵ B	2	A
3 +	B	CD ⟶	8	ACD
4 -	AB	⟵ A	1	CD
5 +		AB ⟶	2	ABCD
Cinco cruces	Totales		15 min.	

RESPONDER: Comprobar: Se comprueba que todos los viajes suman en total 15 minutos y de esta forma cumple con los requisitos del problema. Análisis: Únicamente hay dos soluciones posibles que varían únicamente sobre la persona que devuelve la linterna después de cruzar la primera vez el puente

Respuesta: **Para conseguir que los cuatro amigos consigan pasar ilesos al otro lado del puente en tan solo quince minutos deben hacerlo de la siguiente manera:**

- **Primero cruzan Andrés y Blas. Vuelve Andrés con la linterna.**
- **Segundo cruzan Carlos y Darío. Vuelve Blas con la linterna.**
- **En tercer lugar, cruzan Andrés y Blas.**
- **también pueden hacerlo de la siguiente manera:**
- **Primero cruzan Andrés y Blas. Vuelve Blas con la linterna.**
- **Segundo cruzan Carlos y Darío. Vuelve Andrés con la linterna.**
- **En tercer lugar, cruzan Andrés y Blas.**

OTRAS CONSIDERACIONES QUE SE PODRÍAN TENER EN CUENTA:

Aplicando la lógica y el sentido común, se podría resolver este problema sin necesidad de consumir los 15 minutos, ya que, si Blas tarda 2 minutos en cruzar el puente por la excesiva carga que lleva, una vez que cruza el puente y se deshace de la carga. Si la carga la deja en la otra orilla cuando cruza la primera vez y eso le aligera el tiempo de cruce y puede ir a la misma velocidad que Ángel, podrían cruzar el puente todos en 13 minutos.

En esta URL podemos disfrutar de una variante del juego de modo interactivo en Flash.

https://marcianosmx.com/juego-logica-travesia-puente/

Otras variantes de problemas interactivos de cruzar el puente en nuestro blog para las familias:

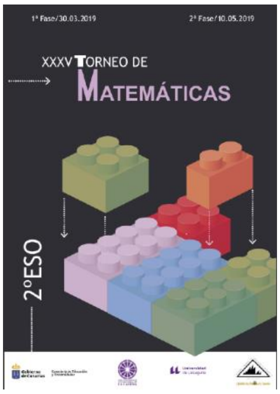
http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/edublogs/proyectonewton/2014/05/11/ayuda-a-la-familia-a-cruzar-el-puente/

http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/edublogs/proyectonewton/2013/07/19/la-oveja-el-leon-y-la-lechuga/

http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/edublogs/proyectonewton/2014/05/24/ayuda-a-la-familia-a-cruzar-el-rio-2/

Los retos pendientes, sobre los que no hemos recibido ninguna respuesta, son los problemas

INTERVENCIÓN QUIRÚRGICA y **LA PARCELA TRIANGULAR**



Y, mientras tanto, con el paréntesis de la extraordinaria celebración de la aparición del nº 100 de nuestra revista **NÚMEROS**, ha habido tiempo para que se celebrasen de nuevo los Torneos de la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas correspondientes al curso escolar 2018-2019.

Si quieren conocer los problemas de las tres convocatorias (Torneo de Primaria, Primera y Segunda Fase del Torneo de Secundaria) y los nombres de los alumnos ganadores, pueden dirigirse a la siguiente dirección web:

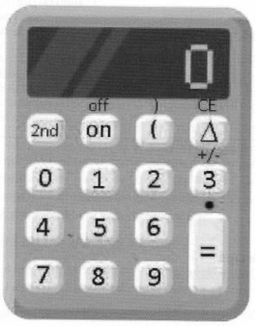
Para este artículo hemos buscado unos pocos problemas que ofrecer a nuestros lectores como retos para el verano.

El primero lo hemos encontrado en la revista francesa ***La rentrée des math*** de la Asociación de Profesores de Matemáticas de la Enseñanza Pública (APMEP) francesa. Aparece en la página 67 de esa revista, dentro de una sección denominada *Au fil des problèmes* a cargo de Frédéric de Ligt.

UNA CALCULADORA PARA LOS MÁS JÓVENES

Para facilitar su uso a los jóvenes, un fabricante de calculadoras ha puesto en el mercado un modelo que sólo tiene una tecla de operación: Δ.

$$a \Delta b = 1 - \frac{a}{b}.$$



Pero, **¿cómo vas a hacer las cuatro operaciones elementales básicas ahora?** Por supuesto, se pueden utilizar todas las teclas de la calculadora.

El segundo tiene su origen en una revista muy familiar y de donde hemos sacado anteriormente algunos problemas, aunque hacía algún tiempo que no teníamos el placer de ofrecer uno a nuestros lectores. Se trata de un problema de José Paulo Viana, de su sección *O PROBLEMA DESTE NÚMERO*, publicada en la Revista portuguesa *Educação e Matemática*, nº doble 149-150, correspondiente a octubre, noviembre, diciembre de 2018.

VACACIONES EN SILDAVIA

En Sildavia tienen un sistema monetario un poco extraño. Tiene monedas de tres tipos, que valen uno, cinco y doce sildares.

En las vacaciones, Víctor y Mario fueron hasta allí. En el último día, fueron a una tienda comprar una camiseta con la bandera del país.

Víctor pagó la suya con diez monedas, unas de "12 sildares" y otras de "1 sildar".

Mario utilizó sus últimas once monedas, siendo unas de "5 sildares" y las restantes de "1 sildar" para comprar la suya.

¿Cuál es el precio de una camiseta?

UN SENCILLO PROBLEMA DE COMBINATORIA.
(Adaptado de Adrián Paeza; Matemagia)

Con las letra de la palabra BECAD (dad una beca), se forman todos los anagramas posibles permutando sus cinco letras. Si colocamos las permutaciones ordenadas alfabéticamente, es decir: ABCDE, ABCED, ACBDE, ACBED, ACDBE, ACDEB, etc. ¿Qué lugar ocupará la palabra CEBAD? ¿Cuántas permutaciones son posibles con las cinco letras?

Y hasta aquí llegamos. Terminamos con nuestro mantra particular: resuelvan los problemas, singulares y alejados de los cotidianos; utilícenlos con los alumnos y, sobre todo, aporten sus comentarios a la revista, sus soluciones e, incluso, nuevas propuestas. O, simplemente, cuéntennos lo sucedido en el transcurso de la clase en que probaron el problema. Queremos pensar que nuestras propuestas tienen uso en el aula. Eso nos alegraría mucho y también al resto de lectores. Nos repetimos: vamos, **anímense**… ¡Si es **divertido**!

Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera de la próxima edición de la revista NÚMEROS.

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**