NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 101, julio de 2019, páginas 7-18

111 PROPUESTAS EN AMBIENTES DINÁMICOS QUE PONEN EN JAQUE IMÁGENES CONCEPTUALES.

Marcela Götte y Ana María Mántica
(Universidad Nacional del Litoral. Argentina)

Fecha de recepción: 01 de septiembre de 2018
Fecha de aceptación: 06 de febrero de 2019

Resumen

Se presentan tareas centradas particularmente en el concepto de regularidad de polígonos y poliedros. Son diseñadas para un curso con estudiantes universitarios desarrollado en dos encuentros y planteado en un entorno dinámico. Del análisis de sus resoluciones vislumbramos que sus imágenes conceptuales no se ajustan a las definiciones de los conceptos de polígono regular y poliedro regular. Por ejemplo, concluyen que es suficiente que un polígono tenga todos sus lados iguales para afirmar que es regular o que un tetraedro con caras iguales es siempre regular. Se considera provechoso plantear en las tareas imágenes de lo extra matemático y a partir de ello focalizar en el concepto a estudiar. Las tareas se plantean de modo de abordar el contexto físico, a partir de plegado y modelos reales, y el contexto informático a través de un Software de Geometría Dinámica.

Palabras clave Imagen conceptual, regularidad, polígonos, poliedros, entorno dinámico.

Title **Proposals in dynamic environments that challenge concept images**

Abstract

The tasks presented are focused on the concept of regularity of polygons and polyhedrons. They are designed for a formation course of university students. The course consists in two meetings and it is developed in a dynamic environment. Analysis of its resolutions allows us conclude that the concept images of students do not adjust to the definitions of the concepts regular polygon and regular polyhedron. For example, they conclude the fact that a polygon has all its sides equal, it is a sufficient condition to affirm it is regular. They also affirm that a tetrahedron with equal faces is always regular. It is considered important to propose in the tasks extra mathematics images and focus on the concept to study starting from there. The tasks are proposed with the purpose of addressing physic context from folding, real models, and the informatics context through a dynamic geometry software

Key Words Imagen conceptual, regularidad, polígonos, poliedros, entorno dinámico.

Corresponde al profesor de Matemáticas volver a hallar el contenido matemático de las cosas que nos rodean y jugar con este contenido a efectos didácticos.
(Puig Adam, 1960, p. 264)

1. Introducción

La propuesta que se presenta apunta a que los estudiantes logren una adecuada imagen conceptual del concepto referido a la regularidad de polígonos y poliedros. En general, en la educación obligatoria, el tratamiento de estos temas hace que no se logre una apropiada relación entre la imagen del concepto y su definición. Se plantea un trabajo con un Software de Geometría Dinámica (SGD), en particular Cabri 3D v2, que permite no sólo construir figuras con determinadas propiedades geométricas sino también transformar esas construcciones en tiempo real. Esto puede contribuir a que los estudiantes experimenten muchas transformaciones que posibilitan determinar regularidades e invariantes estableciendo casos extremos, no estereotipados que permiten conjeturar propiedades de la figura con una única construcción.

En el artículo se reflexiona sobre lo sucedido en un curso con estudiantes que concurren a la carrera Comunicación Gráfica y Publicitaria y a la carrera Comunicación y Entretenimiento Digital de la Facultad de Comunicación. Se realizan dos encuentros presenciales, en los que se formulan algunas tareas para el estudio profundo de propiedades de figuras geométricas tanto del plano como del espacio, en particular para trabajar el concepto de regularidad de figuras en dos y en tres dimensiones aprovechando las potencialidades del software, dado que una de sus características principales es la representación de las tres dimensiones en el plano. Distintas investigaciones (Gutiérrez y Jaime, 2015; Parzyzs, 1991; Gutiérrez, 1998; Ryu, Chong y Song, 2007; Hölzl, 1996; Alba Alejos, 2012; entre otras) sostienen que los estudiantes tienen grandes dificultades en el trabajo y representación de lo tridimensional y en especial en la resolución de problemas en esta temática.

2. Marco de referencia

Vinner (1991) sostiene que cuando escuchamos el nombre de un concepto conocido muy rara vez viene a nuestra mente la definición del concepto, sino que esta palabra nos hace evocar “algo” formado por un conjunto de representaciones visuales, imágenes, impresiones o experiencias. Este “algo” lo denomina imagen conceptual. Afirma que la imagen conceptual que se crea en la mente de los estudiantes está formada por los diversos dibujos, figuras o representaciones que recuerdan los estudiantes como ejemplo de este concepto, junto con el conjunto de propiedades que asocian al mismo. La imagen de un concepto es correcta cuando permite discriminar sin errores todos los ejemplos de ese concepto y cuando las propiedades que lleva asociada son todas relevantes. En la formación de la imagen de un concepto juegan un papel importante, la propia experiencia y los ejemplos que se han visto o utilizado tanto en el contexto escolar como en el extraescolar. Sostiene que la actividad de los estudiantes, en general, está basada sólo en sus imágenes del concepto y que la definición es inactiva o no existe.

La representación de las tres dimensiones en dos dimensiones es difícil de entender como lo señalan distintos autores (Parzyzs, 1991; Gutiérrez, 1998; Ryu, Chong y Song, 2007; entre otros) y el parecido con los objetos representados es mucho más débil que en la geometría plana.

Parzyzs (1991) admite que el uso de las computadoras puede ayudar considerablemente a la visualización de las representaciones de los cuerpos geométricos, pero también señala que los dibujos llevados a cabo por una computadora deben ser aprendidos, lo cual exige el conocimiento de los conceptos específicos involucrados en cada una de las actividades.

En esta línea Gutiérrez afirma que

> si se posibilita que los estudiantes utilicen de manera habitual un programa de geometría dinámica, estos pueden adquirir con más profundidad y rapidez los conceptos geométricos estudiados y progresar en sus habilidades de razonamiento deductivo y demostración (Gutiérrez, 2007, p. 7)

Arcavi (2008) propone como reto a los docentes e investigadores en educación matemática crear situaciones en las cuales el resultado de la actividad sea inesperado o en algunos casos contra intuitivo de tal forma que entre lo conjeturado por el estudiante y lo devuelto por el software propicie la necesidad de demostrar o probar sus conjeturas utilizando argumentos matemáticos que van más allá del software.

3. Algunas consideraciones respecto al SGD.

Con Cabri 3D, podemos construir, visualizar y manipular en tres dimensiones distintos objetos como: rectas, planos, conos, esferas, poliedros… Podemos crear construcciones dinámicas, medir objetos, incorporar datos numéricos y aún revisar la secuencia de realización de sus construcciones. Es una herramienta potente para el estudio y la resolución de problemas de geometría y de matemáticas[1].

Una de las particularidades de estos entornos dinámicos, es que ofrecen un sistema de representación de objetos geométricos producidos por medio de comandos expresados en un lenguaje geométrico y que se materializan mediante dibujos en la pantalla. Ellos pueden transformarse con facilidad y rapidez y por tanto disponer de un gran número de ejemplos tan variados como quieran. Los SGD brindan la posibilidad de modificar de manera persistente y en tiempo real la forma de las figuras construidas, "sujetando" con el cursor alguno de sus elementos y "arrastrándolo" por la pantalla, de manera que las características matemáticas de esas figuras se mantienen durante la transformación. Esto da a los estudiantes la posibilidad de realizar intentos que les permitan formular y validar conjeturas o encontrar propiedades matemáticas no evidentes con las que abordar la resolución del problema planteado.

En este software, el sistema "interacciona" con el usuario por medio de un interfaz gráfico. Todas las informaciones en la interfaz son por consecuencia de naturaleza gráfica y aparecen bajo forma de imágenes y de textos. Este SGD es concebido para representar lo que aparece en el universo de la geometría espacial: objetos geométricos (desde puntos de dimensión 0 a poliedros de dimensión 3), construcciones geométricas, transformaciones geométricas y medidas y coordenadas. Según Alba Alejos (2012) cada uno de estos elementos geométricos tiene varias representaciones: en las barras de herramientas, en los menús, en los mensajes contextuales y en la pantalla.

4. Relato de dos encuentros.

Se realizan actividades para lograr una familiarización con el software centradas en el concepto de regularidad de polígonos y poliedros. A partir de ello se proponen problemas para trabajar el pasaje de 3D a 2D y viceversa poniendo especial interés en la influencia que la utilización del software ejerce

[1] Extraído del Manual del Usuario de Cabri 3D v2.

sobre el modo de validar los conceptos matemáticos abordados. En el presente trabajo nos referiremos en particular a lo acontecido en los encuentros del curso haciendo hincapié en los modos de resolución de los estudiantes.

4.1. Primer encuentro.

En esta instancia nos proponemos indagar los conceptos previos con los que cuentan los estudiantes y que se familiaricen con el software.

Consignas de las tareas.

- Construye un triángulo equilátero de por lo menos tres modos distintos. Explica.
- Construye, si es posible, un hexágono equilátero pero no regular.
- Construye, si es posible, un hexágono equiángulo pero no regular.

Detallamos a continuación lo realizado por los estudiantes al resolver cada una de las consignas propuestas.

4.1.1. Respecto a la construcción del triángulo equilátero.

- ✓ Los estudiantes construyen un triángulo equilátero con la función que el software ofrece.
- ✓ Utilizan la cara de un tetraedro regular (Figura 1). En la puesta en común se interroga si se podría considerar algún otro poliedro y responden, que el octaedro regular y el icosaedro regular tienen también caras que son triángulos equiláteros.

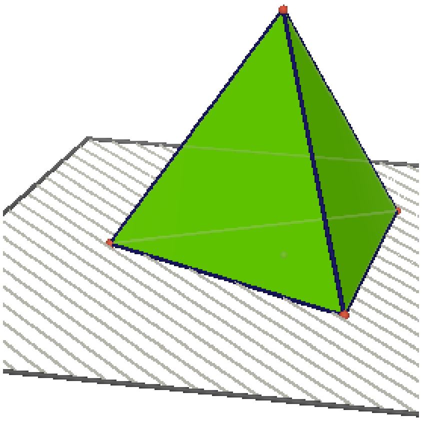

Figura 1 Triángulo equilátero como cara de un tetraedro regular.

- ✓ Lo construyen con circunferencias, como lo realizarían con lápiz y papel y un compás (Figura 2). Aquí tuvieron algunas dificultades dado que el software que particularmente trabaja en 3D requiere ciertos pasos para construir circunferencias. Para realizar una circunferencia hay que indicar en qué plano se desea construirla, el centro y un punto, por ejemplo.

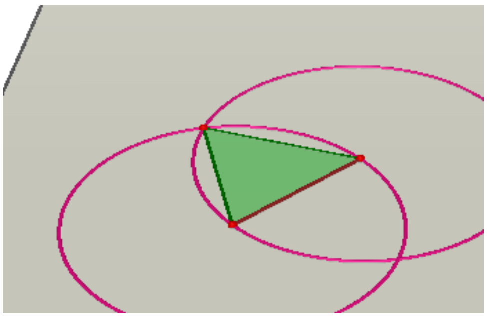

Figura 2. Construcción de triángulo equilátero utilizando circunferencias.

- ✓ Utilizan la construcción de un hexágono regular y a partir de él, el triángulo equilátero es el que tiene vértices en el centro y dos vértices consecutivos del hexágono. En la puesta en común se consideró también tomar tres vértices alternados del hexágono. (Figura 3)

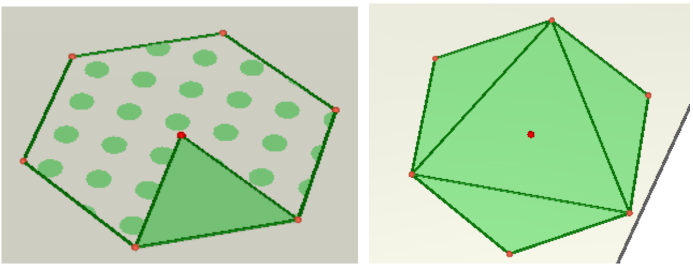

Figura 3. Triángulo equilátero a partir de un hexágono regular.

- ✓ Utilizan esferas. Toman un segmento y trazan las esferas con centro en un extremo y que pasa por el otro extremo y hallan la circunferencia intersección de ambas. Los extremos del segmento inicial y cualquier punto de la circunferencia son los vértices de un triángulo equilátero (Figura 4). Los estudiantes sin embargo toman sólo los puntos de intersección de la circunferencia con el plano base. En la puesta en común se analiza que cualquier punto de la circunferencia también podría ser vértice.

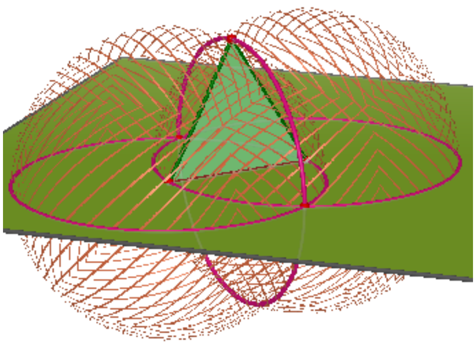

Figura 4. Construcción de triángulo equilátero utilizando superficies esféricas.

- ✓ Intentan construirlo a partir de ángulos de 60º, pero dadas las particularidades del software (no realiza un ángulo dada su medida) no lo logran. Para ello hubiese sido necesario utilizar giro alrededor de un eje y ángulo de 60º, conocimientos al parecer no disponibles en estos estudiantes.

4.1.2. Respecto a la construcción del hexágono equilátero y el hexágono equiángulo, no regulares.

Los estudiantes construyen un hexágono regular sin tener en cuenta lo que se solicita en la consigna. Responden que un hexágono sólo puede ser regular. Los estudiantes de diseño sostienen que si se solicita un hexágono este no tiene otra opción que ser regular. Al interrogante de las docentes si no podría ocurrir que un hexágono tenga todos los lados pero no los ángulos iguales intentan construirlo utilizando el software.

- ✓ Utilizan propiedades de los ángulos interiores de un polígono para deducir que los ángulos interiores del hexágono regular son de 120º. Realizan un ángulo de 120º utilizando la herramienta "Ángulo" que dispone el software, arrastrando libremente hasta conseguir la amplitud deseada. Luego emplean la herramienta "Longitud" para verificar la conjetura: es posible encontrar un hexágono con todos sus ángulos iguales pero no con todos sus lados iguales (Figura 5). Esta resolución no resiste el "arrastre" pero les permitió a los estudiantes invalidar la conjetura de que un hexágono equiángulo es siempre equilátero, dado que un ejemplo permite refutarla.

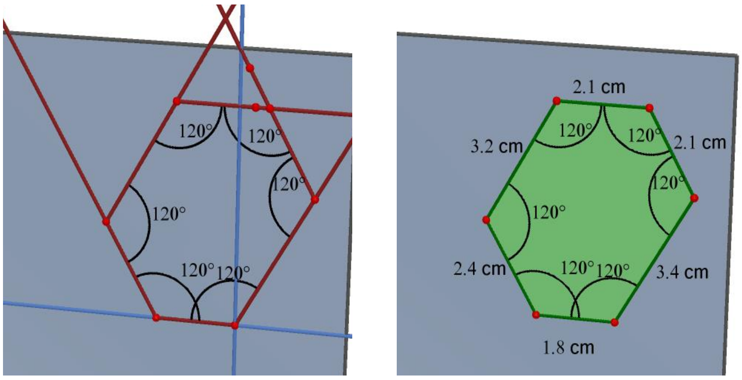

Figura 5. Hexágono equiángulo no equilátero (no resiste arrastre).

- ✓ Construyen un ángulo de 120º partiendo de un triángulo equilátero y su simétrico respecto a uno de sus lados. Luego utilizan propiedades de ángulos entre rectas paralelas cortadas por una secante para construir un hexágono equiángulo, pero no equilátero. (Figura 6)

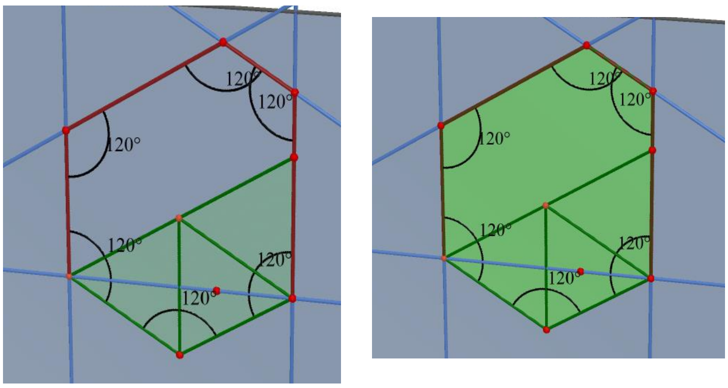

Figura 6. Hexágono equiángulo no equilátero (resiste arrastre).

- ✓ Teniendo en cuenta que si un hexágono es equiángulo, cada ángulo interior es de 120º, construyen un hexágono equilátero y no equiángulo a partir de un rectángulo de dimensiones a y b y dos triángulos isósceles de lados a y b. Los triángulos isósceles tienen un lado coincidente con un lado del rectángulo (Figura 7).

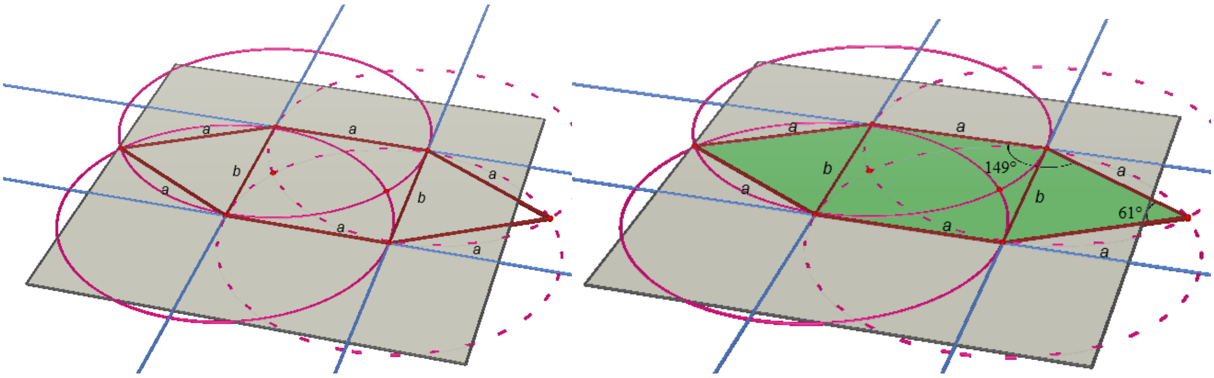

Figura 7. Hexágono equilátero no equiángulo.

4.1.3. Algunas reflexiones del primer encuentro.

De este modo utilizando las ventajas del software que permite medir lados y ángulos logran convencerse que es posible construir hexágonos equiláteros y no equiángulos y viceversa.

En el triángulo esta posibilidad no se presenta dado que una de las condiciones implica la otra. Si trabajamos sólo con el triángulo no se transparentan estas dos condiciones de regularidad de polígonos por lo que puede quedar oculta la necesidad de que ambas se cumplan (igualdad de lados e igualdad de ángulos).

De la resolución de las consignas vislumbramos que la imagen conceptual de polígono regular que tienen estos estudiantes está asociada sólo a la igualdad de sus lados.

Los estudiantes se sorprenden al toparse con hexágonos de lados iguales y no regulares. En lo cotidiano encuentran polígonos equiláteros y no equiángulos pero no logran reconocerlos en la clase de matemática. Esto nos lleva a concentrarnos en el encuentro siguiente en la construcción de poliedros que no cumplan todas las condiciones exigidas para la regularidad y que se encuentren habitualmente en su entorno, dado que para el segundo encuentro planificamos el trabajo con figuras en 3D.

4.2. Segundo encuentro.

Teniendo presente lo ocurrido respecto a la regularidad de los polígonos y que en el segundo encuentro trabajaríamos con figuras en tres dimensiones, nos proponemos buscar elementos que estén al alcance de los estudiantes que permitan trabajar con los poliedros regulares y con los que cumplan algunas condiciones pero no todas las exigidas para la regularidad.

Al salir de la universidad, nos cruzamos con un vendedor ambulante, con el que los estudiantes se topan a diario al retirarse del predio exhibiendo el envase de una bebida refrescante, en dimensiones considerables como puede verse en la imagen que presentamos (Figura 8). En la Figura 9 puede dimensionarse el envase real en relación de una mano.

Figura 8: envase bebida refrescante.

Figura 9: envase bebida refrescante tamaño real.

Esto nos lleva a plantear la siguiente tarea:

Construye, si es posible, un tetraedro no regular con caras iguales.

4.2.1. Revisión del concepto de poliedro regular.

Previo al planteo de esta tarea repasamos la definición de poliedro regular y los estudiantes los construyen utilizando las herramientas que disponen en el software (Figura 10). Esta herramienta insinúa que existen tetraedros, octaedros, dodecaedros e icosaedros que son no regulares. Esto lo corroboran a partir de otra herramienta (Figura 11), que permite la construcción de poliedros sin la condición de "regular".

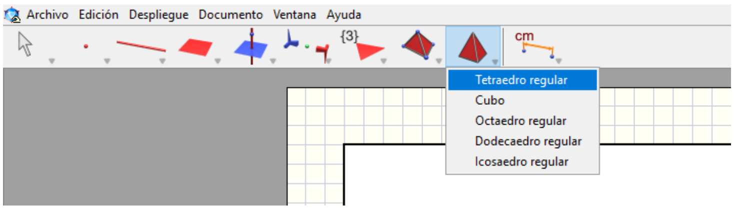

Figura 10. Herramienta del SGD para poliedros regulares.

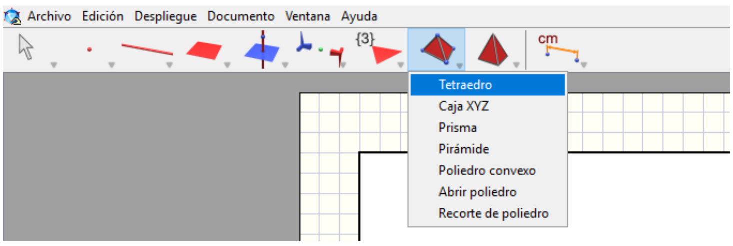

Figura 11. Herramienta del SGD para poliedros.

En la resolución de la tarea planteada, queda explícito que se pueden construir tetraedros con una herramienta y tetraedros regulares con otra.

4.2.2. Construcción del tetraedro solicitado en la consigna.

Pedimos a los estudiantes que comiencen a pensar si es posible construir un tetraedro con todas sus caras iguales que no sea regular. Trabajan en el software proponiendo un tetraedro de modo que sus caras tengan la forma de un triángulo escaleno. Los estudiantes no logran construirlo ni pensar en su existencia, es decir para ellos, si es tetraedro, sus caras son triángulos equiláteros.

Entregamos hojas A4 y las instrucciones para que, sin cortarla, construyan un modelo tridimensional que resulte un tetraedro cuyas caras son triángulos isósceles iguales (Figura 12). De este modo obtienen un poliedro similar al envase de la bebida refrescante mencionada denominada *Triangulito*, que los alumnos encuentran diariamente a la salida de la facultad.

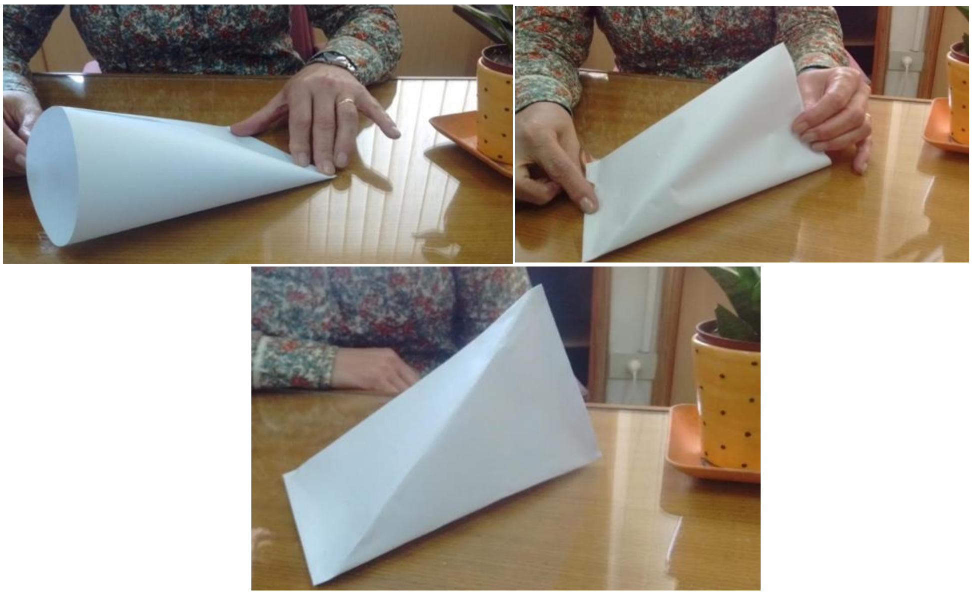

Figura 12. Construcción de tetraedro a partir de hoja A4.

Tomamos un envase de la bebida *Triangulito*, lo analizamos y para sorpresa de los estudiantes este cumple con las condiciones solicitadas en el problema. Desplegamos el mismo obteniendo un desarrollo plano de ese tetraedro no regular, en particular de caras iguales no regulares. Luego construyen el tetraedro utilizando el software (Figura 13).

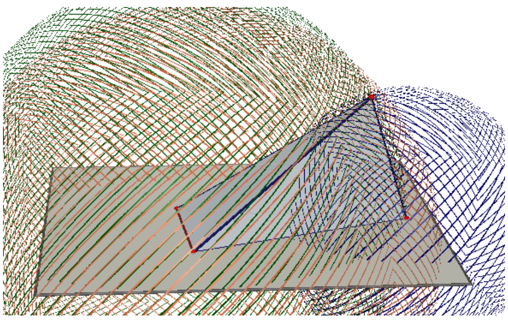

Figura 13. Construcción de tetraedro de caras iguales no regular.

5. Algunas reflexiones.

Una de las cuestiones más importante que presentamos en el primer encuentro es la imagen conceptual de regularidad de polígonos de los estudiantes: no logran fusionar la imagen de polígono regular y su definición.

En general, en el tratamiento que se hace de polígonos en los libros de texto y en clases de matemática se conviene que en caso que no sea regular se especificará, por ejemplo, hexágono no regular. No se analizan las condiciones de equilátero y equiángulo teniendo en cuenta que si se cumple una de ellas y no la otra el polígono no es regular. Consideramos que esto último debería explicitarse dado que, en general, se comienza con el polígono de tres lados en el cual es condición necesaria y suficiente que tenga los tres lados (ángulos) iguales para que sea regular. Cuando se trabaja con cuadriláteros también se tienen nombres específicos. No se habla de cuadrilátero regular se lo denomina cuadrado, al equiángulo y no equilátero se lo denomina rectángulo, y al equilátero y no equiángulo, rombo. En los polígonos de más de cuatro lados se emplea la denominación n-ágono sin hacer referencia a si son o no regulares pero en general se estudian los regulares.

Consideramos que esto no contribuye a la formación de la imagen correcta de polígonos que cumplen sólo algunas de las propiedades exigidas por la definición de polígono regular, otorgándole por tanto la condición de regularidad a todo polígono de más de cuatro lados. El conjunto de representaciones visuales, experiencias e imágenes que se encontraron los estudiantes a lo largo de la escolaridad hacen que la imagen conceptual esté acompañada por propiedades que no son relevantes y por tanto, en palabras de Vinner (1991) esto no permite discriminar que estas condiciones exigidas para los polígonos regulares no son inherentes a todos los polígonos de más de cuatro lados. Si bien los estudiantes pueden encontrarse con representaciones de polígonos que cumplan la condición de ser equiláteros y no equiángulos o viceversa no son conscientes de esto, puesto que en general lo encuentran fuera del ámbito escolar y no se detienen a analizarlos. Se pretende que luego de estas construcciones los estudiantes logren hacer conscientes la existencia de este tipo de polígonos y que realmente al encontrarse con ellos puedan considerar su existencia y hacer visible que cumplen alguna de las condiciones exigidas por la definición de polígono regular.

Destacamos además que al usar el software los estudiantes realizaron el paso de 3D a 2D, dado que tomaron los poliedros regulares, que proporciona Cabri, cuyas caras son triángulos equiláteros para proponer una forma de construcción del mismo. Este procedimiento difícilmente se presenta en un contexto de lápiz y papel por lo que consideramos fundamental el aporte del SGD.

Comprobamos, en el segundo encuentro, que hay una resistencia por parte de los estudiantes a considerar que un poliedro denominado tetraedro puede estar formado por triángulos iguales no equiláteros**.** La imagen del tetraedro es el que tiene sus cuatro caras triángulos iguales equiláteros, es decir, el tetraedro regular.

Si bien el empleo de SGD ayuda considerablemente en la visualización de la representación de figuras tridimensionales y en este caso particular las herramientas que brinda el software permiten considerar que existen tetraedros regulares y no regulares, el dibujo realizado en la pantalla de una computadora debe plantearse como una construcción que exija el conocimiento de los conceptos específicos involucrados en cada una de las actividades propuestas. Parzyzs (1991) sostiene que los dibujos realizados por una computadora deben ser aprendidos, esto permite que su uso ayude notoriamente a la visualización de las representaciones de los cuerpos geométricos.

Puig Adam (1960) sostiene que algo tan cotidiano como "el juego de varillas y el eje de un paraguas, nos ofrecen un modelo matemático, del que extraer muchas lecciones geométricas intuitivas" (p. 270). Por ejemplo, relaciones sencillas entre los lados y los ángulos de un triángulo, reconocimiento de triedros y ángulos poliedros, simetrías, rotaciones, homotecias,…

Sin embargo, los estudiantes no acostumbran mirar el entorno con "lentes geométricas" como se manifiesta con lo propuesto en el segundo encuentro.

Alsina (2015) también se refiere a la relación de la matemática con la realidad afirmando que "los profesores de matemática también tenemos una gran oportunidad de aprovechar la vida cotidiana para interesar, para motivar" tomando ejemplos que empleamos habitualmente y que nos permiten abordar conceptos que parecen lejanos.

Con la regularidad de poliedros ocurre lo mismo que con la regularidad de polígonos, en general se establece que salvo que se aclare cuando se dice tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro, se consideran regulares. El hexaedro tiene una denominación específica: cubo. Tampoco se analiza cuando se trabaja, en especial con pirámides triangulares o prismas rectangulares que estos pueden cumplir con algunas de las condiciones exigidas para la regularidad y otras no.

En general los estudiantes llaman cuadrado y cubo a las mismas figuras. Vemos que esta bebida que nombran "triangulito", denominación de una figura plana en matemática, corresponde a un tetraedro que es una figura tridimensional. Consideramos apropiado destacar que estas y otras denominaciones pueden afianzar la formación distorsionada de los conceptos matemáticos.

Si bien estos estudiantes se encuentran en el contexto extraescolar con experiencias que muestran poliedros que teniendo sus caras iguales no son regulares se pone de manifiesto que la imagen prevalece a la definición (Vinner, 1991). Es función del docente poner de manifiesto estas particularidades y de este modo tratar que las representaciones de los poliedros estén asociadas a las propiedades relevantes que este concepto involucra.

Se deben proponer situaciones en las que el resultado de su resolución sea inesperado o contra-intuitivo, de modo que como sostiene Arcavi (2008) la sorpresa generada cree una diferencia con las predicciones explicitadas por los estudiantes. Esto puede generar en los alumnos la necesidad de re analizar su conocimiento y sus conjeturas, brindando esto una oportunidad para un aprendizaje significativo. Debe también tenerse en cuenta que la herramienta tecnológica en sí misma es de poco valor si no se la acompaña de una propuesta de problemas que permitan un uso significativo de los conceptos matemáticos que involucra.

Gutiérrez y Jaime (1992) plantean la enseñanza de la geometría en tres contextos principales: el físico, el informático y el impreso. Este planteo favorece el desarrollo integral de las habilidades y procesos de visualización y razonamiento espacial de los estudiantes. En este trabajo se utilizan simultáneamente algunos de estos contextos y el pasaje de información de uno a otro. Por ejemplo, se utiliza el modelo físico partiendo de 2D a 3D para armar un tetraedro no regular con caras iguales plegando una hoja A4. De 3D a 2D dado que se despliega el envase de la bebida. Este modelo físico se utiliza como trampolín para pasar al modelo con un SGD. Si bien la representación impresa no es objeto de esta propuesta consideramos que este contexto (desde los libros de texto) influye notoriamente en la imagen conceptual de los estudiantes.

Bibliografía

Alba Alejos, F. (2012). *Dificultades de interpretación y de uso de los arrastres en cabri 3d por estudiantes de eso* (Tesis de maestría). Universitat de València. Recuperado el 10 de febrero de 2016, de
http://roderic.uv.es/bitstream/handle/10550/25780/Alba%2cF.J.28201229.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Alsina (2015). Conferencia Educación matemática y vida cotidiana en la I jornadas de iberciencia realizada en Buenos aires 17 y 18 de Julio de 2014. Recuperado el 25 de abril de 2017, de https://www.youtube.com/watch?v=lkNB7XXOwpk.

Arcavi, A. (2008). Modelling with graphical representations. *For the Learning of Mathematics*, *28*, 2-10.

Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *EMA*, *3(3)*, 193-220.

Gutiérrez, A. (2007). Geometría, demostración y ordenadores, Proceedings of the 13as JAEM. Recuperado el 6 de marzo de 2017, de http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/textos.html

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1992). Desarrollo de destrezas de visualización y representación de cuerpos geométricos espaciales. *En Guillén, G. (Directora) Memoria final del proyecto de investigación: La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B.* Recuperado el 13 de agosto de 2016, de http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/GutOtr92.pdf

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA*, *9(2)*, 53-83.

Hölzl, R. (1996). How does 'dragging' affect the learning of geometry, *International Journal of Computers for Mathematical Learning 1(2)*, 169- 187.

Parzyzs, B. (1991). Representations of space and student's conceptions at high school level. *Educational Studies in Mathematics*, *22(6)*, 575- 593.

Puig Adam, P. (1960). *La matemática y su enseñanza actual*. Madrid: Publicaciones de la Dirección General de Enseñanza Media.

Ryu, H., Chong, Y. y Song, S.H. (2007). Mathematically gifted students' spatial visualization ability of solid figures. En Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. V. 4*, 137-144.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in Teaching and Learning of Mathematicas. En Tall, D. (ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Marcela Evangelina Götte. Profesora de las cátedras Geometría Euclídea Espacial y Matemática Discreta I y II en el Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Argentina. Docente investigadora en temas referidos a la enseñanza de la matemática en distintos niveles del sistema educativo que ha realizado publicaciones sobre la temática en distintas revistas especializadas nacionales e internacionales. Dirección Electrónica: marcelagotte@gmail.com

Ana María Mántica. Profesora de la cátedra Didáctica de la Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Argentina. Docente investigadora en temas referidos a la enseñanza de la matemática en distintos niveles del sistema educativo que ha realizado publicaciones sobre la temática en distintas revistas especializadas nacionales e internacionales.
Dirección Electrónica: ana.mantica@gmail.com