NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 103, marzo de 2020, páginas 99-112

Estudio en el uso de las factorizaciones simultáneas para el cálculo del MCD y el mcm

Óscar Jesús Falcón Ganfornina
(Instituto de Educación Secundaria Chaves Nogales. España)

Fecha de recepción: 02 de noviembre de 2019
Fecha de aceptación: 09 de enero de 2020

Resumen Una de las primeras unidades didácticas en el currículo de Matemáticas en 1º y 2º de la Educación Secundaria Obligatoria en España es el de divisibilidad. Esta unidad incluye como objetivo el cálculo del máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Es corriente trabajar en estos cálculos con el método de factorizaciones por separado. En este artículo se propone otro método de factorizaciones simultáneas, el cual analizará sus ventajas y finalizará con un estudio de dicho método en función de una encuesta facilitada al alumnado.

Palabras clave Divisibilidad, común, divisor, múltiplo, factorización, educación secundaria.

Title **Study of simultaneous factorization method to obtain the value of HCF and LCM**

Abstract The Maths curriculum usually starts with divisibility in 1st and 2nd year of secondary school education in Spain. This topic includes the concept of Highest Common Factor (H.C.F.) and Least Common Multiple (L.C.M.). A common process is the method of separate prime factorizations. This research proposes another method of simultaneous factorizations which main aim is to analyze and study its benefits through a survey provided to students.

Keywords divisibility, common, divisor, multiple, factorizations, secondary school education.

1. Introducción

La dificultad en la comprensión de los conceptos de Máximo Común Divisor (MCD) y de mínimo común múltiplo (mcm) ha sido y está siendo objeto de estudio en múltiples investigaciones didácticas. Estos dos conceptos no aparecen en el currículo de manera aislada, sino que engloban otros muchos como la divisibilidad, los números primos, o la factorización, los cuales ya pueden suponer de por sí una determinada dificultad para el estudiante.

Según Bodí (2006), una de las causas que provocan en la comprensión esa dificultad es la enseñanza mecánica del cálculo del MCD y el mcm. El método de la factorización por separado es el más usual en la enseñanza de estos cálculos. Sin embargo, esto parece conllevar más desventajas que beneficios. Un alumno es capaz de obtener el MCD y el mcm, pero no entiende qué significado tienen estos resultados. Incluso es usual descubrir que un alumno se equivoca en los cálculos cuando toma factores que no son los convenientes.

EXPERIENCIAS DE AULA
Coordinadora: María del Carmen García González

El objetivo de este artículo es mostrar un método alternativo, que denominaremos de factorizaciones simultáneas, descubrir qué ventajas e inconvenientes puede tener, y, finalmente, testar al alumnado sobre qué opinión tienen de su uso. El trabajo está realizado en un grupo de 1º de ESO y otro de 2º de ESO. Las características de estos alumnos, sin entrar en demasiados detalles al considerarse no demasiado importante en el estudio, se resumen en indicar que se tratan de dos grupos heterogéneos, sin necesidades específicas, con alumnado que en su mayoría proviene de un barrio de clase media-baja. Esto contribuye a encontrarnos, en muchas de los casos, con alumnos poco motivados en sus estudios. De hecho, en los test realizados, que más adelante se detallarán, se tuvieron que descartar muchos de ellos al no aportar información relevante al análisis.

2. Diferentes métodos de obtención

Gómez, en su blog web, explica en su artículo tres métodos de cálculo del MCD. Para ilustrarlos, a continuación, se acompañará a cada método un ejemplo obtenido a partir del applet de GeoGebra que se encuentra en la web Matematicaula, cuyo enlace es:

http://matematicaula.com.es/nejercicio.php?ejercicio=calculoMCDmcm1

- Enumeración de todos los divisores y búsqueda del divisor mayor común. Suele ser el método utilizado en niveles de primaria. Tiene la ventaja de visualizar bien qué significa el MCD, pero se convierte en un método demasiado laborioso si los números requeridos tienen muchos divisores.

¿Cuál es el Máximo Común Divisor de 16 y 48?

Los divisores de 16 son {1, 2, 4, 8, 16}

Los divisores de 48 son {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48}

El mayor común a ambos es 16.

Figura 1. Primer método de obtención del MCD

- Factorización de los números por separado y cálculo del producto de los factores comunes al menor exponente. Se trata del método habitual en el cálculo del MCD en los libros de texto en Secundaria. Como comenta Gómez, se suele enseñar el método sin entrar en ningún razonamiento intermedio ni explicación de la relación entre los divisores y la factorización. Se puede decir que es una especie de recetario para que el alumno siga los pasos. Ese es el principal problema de este método. Consigue que el alumnado realice unos pasos de factorización sencillos, en principio, que les ofrecen una falsa seguridad. Esto se debe a que justo en el momento de decidir qué factores han de tomar para el cálculo final del MCD, al no haber una comprensión previa de la relación entre divisores y factores, el alumno suele errar en su decisión final.

Para hallar el MCD y el mcm de 36 y 180, factorizamos:

36	2	180	2	
18	2	90	2	
9	3	45	3	
3	3	15	3	
1	1	5	5	
1		1		

$\longrightarrow 36 = 2^2 3^2$

$\longrightarrow 180 = 2^2 3^2 5$

Para obtener el MCD(36,180) tomamos los factores comunes al menor exponente.

$$\mathrm{MCD}(36, 180) = 2^2 3^2 = 36$$

Figura 2. Segundo método de obtención del MCD

- Uso del algoritmo de Euclides. Gómez defiende el uso del algoritmo de Euclides a partir de 2º de ESO como una extensión natural de los dos métodos anteriores, así como ser la antesala a otros conceptos matemáticos como son, por ejemplo, las ecuaciones diofánticas. Para trabajar este método, se puede utilizar el applet de GeoGebra cuyo enlace es:

http://matematicaula.com.es/nejercicio.php?ejercicio=algoritmoeuclides

MCD(450,216) = 18

$$\begin{array}{r|l} 450 & 216 \\ \hline 18 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 216 & 18 \\ \hline 0 & 12 \end{array}$$

Figura 3. Tercer método de obtención del MCD

No obstante, el algoritmo de Euclides es únicamente útil cuando se quiere calcular el MCD de dos números. Si se desea hallar el mcm de esos números, tenemos que realizar operaciones aritméticas (pues debemos multiplicar los dos números y dividirlos por el MCD). Pero lo que realmente lo hace ineficaz es que, si se desea obtener el MCD de más de dos números, el método de Euclides requiere encadenar varias veces el algoritmo.

En este artículo vamos a proponer un método intermedio. Este procedimiento permitirá obtener el MCD y el mcm mediante la factorización simultánea de los valores, tal como se explica en el siguiente apartado.

3. Método de factorización simultánea

Pues bien, supongamos que necesitamos calcular MCD(48,168). Colocamos ambos números uno al lado del otro, trazamos un segmento vertical a la derecha de ambos y comenzamos el algoritmo. Al igual que en el proceso de factorización por separado, comenzamos preguntándonos si es posible dividir las cifras entre 2, el primer número primo. En caso de que ambos puedan dividirse, colocamos el 2 a la derecha del segmento y procedemos a la división. Se repite este paso hasta que uno de ellos no permita la división por ese número primo, y probemos con el siguiente. El método finaliza cuando ya no es posible dividir ambas cantidades por un mismo número primo. A continuación, se refleja un ejemplo.

48	168	2
24	84	2
12	42	2
6	21	3
2	7	

Figura 4. Algoritmo inicial de factorizaciones simultáneas

Observemos que el producto de los números de la derecha del segmento será el MCD buscado.

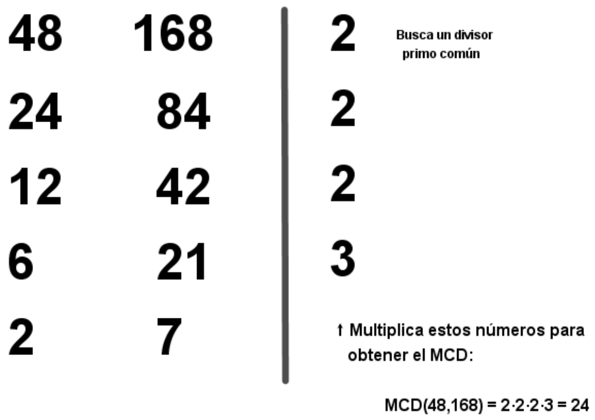

Figura 5. Cálculo final del MCD del ejemplo anterior

Finalmente, el producto del MCD por los dos números que nos han quedado en la parte inferior de la izquierda del segmento resultará el mcm.

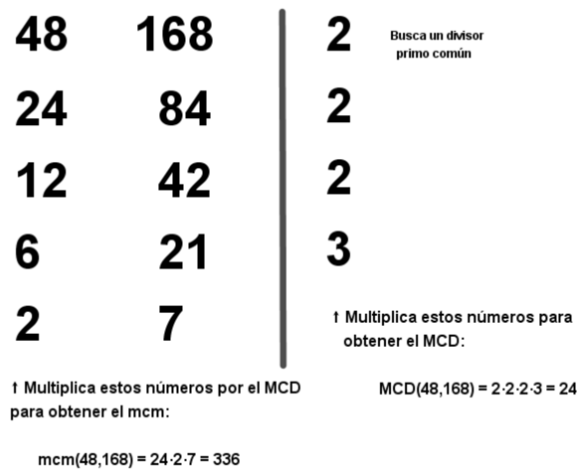

Figura 6. Cálculo final del mcm del ejemplo anterior

Con este ejemplo realizado, debemos hacer dos observaciones antes de pasar al algoritmo del método de factorizaciones simultáneas con más de dos números.

- El alumno debe entender bien cuándo se finaliza el método, ya que, al contrario de la factorización por separado, no se termina siempre cuando aparece el 1 al final. Observemos que así ocurre en el ejemplo mostrado. Se hará hincapié que el método además puede finalizar cuando aparezca un número primo y el otro valor no sea divisible por dicho primo. Además, de esta forma se puede reforzar el concepto de números primos entre sí, pues así son los dos últimos números que aparecen en la parte izquierda del algoritmo.
- Es inmediato observar que el procedimiento que estamos llevando a cabo es exactamente el mismo que se sigue en la simplificación de fracciones. Lo cual es lógico, ya que en dicha simplificación se utiliza el MCD para obtener la fracción irreducible en un único paso.

No obstante, mientras que podríamos seguir el mismo algoritmo para obtener el MCD de más de dos números, este procedimiento no es, por norma general, válido si queremos obtener el mcm en dicho caso. Se detalla a continuación cómo se deben variar los pasos finales del algoritmo.

Veamos un ejemplo. Se pretende obtener el MCD y mcm de 72, 168 y 252. Para el cálculo del MCD, el algoritmo, como se acaba de indicar, no varía. Buscamos divisores comunes a los tres números dados, hasta que no haya ningún número primo con el que podamos dividir los tres simultáneamente.

$$\begin{array}{ccc|l}
72 & 168 & 252 & 2 \\
36 & 84 & 126 & 2 \\
18 & 42 & 63 & 3 \\
\hline
6 & 14 & 21 & \rightarrow \mathrm{MCD} = 2\cdot 2\cdot 3 = 12
\end{array}$$

Figura 7. Cálculo final del mcm del ejemplo anterior

Una vez que se ha obtenido el MCD se reinicia la búsqueda de divisores desde el primer número primo. Si alguno de ellos se puede dividir por 2, se coloca este primo a la derecha del segmento y se realizan las divisiones exactas posibles. Si uno de ellos no permite la división, ese número se arrastra a la fila inferior sin modificarlo. Cuando ya ningún número sea divisible por 2, se repite el proceso con los restantes números primos. Ahora sí, el proceso si debe finalizar cuando en todas las columnas hayamos obtenido el valor 1. El producto de todos los números colocados a la derecha del segmento se corresponde con el mcm.

$$\begin{array}{ccc|l}
72 & 168 & 252 & 2 \\
36 & 84 & 126 & 2 \\
18 & 42 & 63 & 3 \\
\hline
6 & 14 & 21 & 2 \quad \rightarrow \mathrm{MCD} = 2\cdot 2\cdot 3 = 12 \\
3 & 7 & 21 & 3 \\
1 & 7 & 7 & 7 \\
 & 1 & 1 & \mathrm{mcm} = 12\cdot 2\cdot 3\cdot 7 = 504
\end{array}$$

Figura 8. Cálculo del mcm con más de dos números

2. Valoraciones del trabajo realizado

La sensación final, tras proporcionarle al alumnado distintos métodos de cálculo del MCD y mcm, es positiva. Aquellos alumnos con una competencia matemática aceptable, están abiertos al uso de las factorizaciones simultáneas. Sin embargo, los alumnos con más dificultades en nuestra materia, tienen más seguridad utilizando las factorizaciones separadas.

A continuación, podemos apreciar un examen en el que un alumno utiliza ambos métodos de factorización en dos problemas continuos. Ambos lo realizan de forma correcta. Desafortunadamente no suele ser lo habitual.

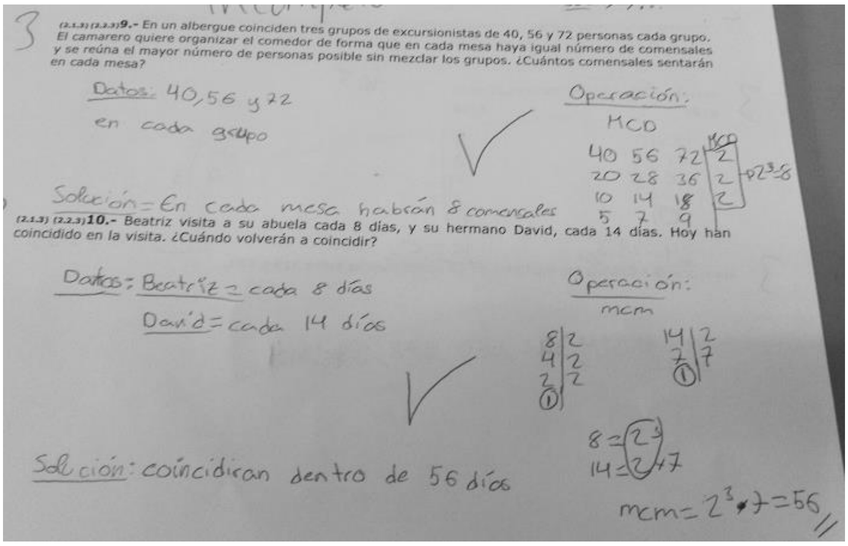

Figura 9. Ejemplo de examen resuelto con ambos métodos

En los siguientes apartados del artículo se estudiarán los resultados de una encuesta realizada posteriormente al alumnado. Con esos datos se pueden sacar algunas conclusiones. En cualquier caso, debemos conseguir que cada alumno pueda decidir qué método de resolución utilizar, dependiendo de los datos o el problema.

3. Primeras valoraciones del método en alumnos de 2º de ESO

Tal como se ha mencionado en los apartados anteriores, cada uno de los métodos tienen sus ventajas y desventajas. Para valorarlos, se decidió realizar un pequeño cuestionario al alumnado. El grupo de 2º de ESO está compuesto por 19 alumnos que, al tratarse de un desdoble, proceden de tres grupos distintos. Los desdobles se compusieron para que cada uno de ellos fuese similar, formando así agrupaciones heterogéneas.

El cuestionario consta de dos partes. La primera de ella muestra los tres métodos trabajados (no aparece el algoritmo de Euclides, pues solo se ha mencionado de pasada en clase).

Recuerda los tres métodos de obtención del MCD:

Método 1

¿Cuál es el Máximo Común Divisor de 16 y 48?

Los divisores de 16 son {1, 2, 4, 8, 16}

Los divisores de 48 son {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48}

El mayor común a ambos es 16.

Método 2

Para hallar el MCD y el mcm de 72 y 180, factorizamos:

72	2
36	2
18	3
6	3
2	2
1	

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$\rightarrow 72 = 2^3 3^2$

$\rightarrow 180 = 2^2 3^2 5$

Método 3

48	168	2
24	84	2
12	42	2
6	21	3
2	7	

Figura 10. Primera parte del cuestionario entregado

Observamos que el primer método, consistente en la obtención de todos los divisores, viene desarrollado y resuelto el MCD. Los otros dos métodos, que utilizan la factorización por separado y simultánea, solo aparecen desarrollados, pero sin la solución.

A continuación, se les pedía que respondiesen a cuatro cuestiones.

Responde:

1. ¿Cuál es el método que prefieres utilizar?

◯ Método 1 ◯ Método 2 ◯ Método 3

2. Observando los ejemplos, obtén el MCD. Luego ordénalos según la dificultad que hayas encontrado.

◯ Método 1 ◯ Método 2 ◯ Método 3

3. Observando los ejemplos, obtén ahora el mcm. Luego ordénalos según la dificultad que hayas encontrado.

◯ Método 1 ◯ Método 2 ◯ Método 3

4. Elige uno de los ejemplos e inventa un problema de texto para ese cálculo del MCD.

Figura 11. Segunda parte del cuestionario entregado

Al ser un grupo heterogéneo, algunos de ellos aún son incapaces de comprender cómo rellenar el cuestionario de manera adecuada, o, por supuesto, de realizar los cálculos correctos. Esto es debido a la falta de motivación en cuanto a completar unas preguntas que no van a ser contadas para nota, o directamente por no haber adquirido los conocimientos mínimos de la unidad trabajada. Algunos ejemplos son:

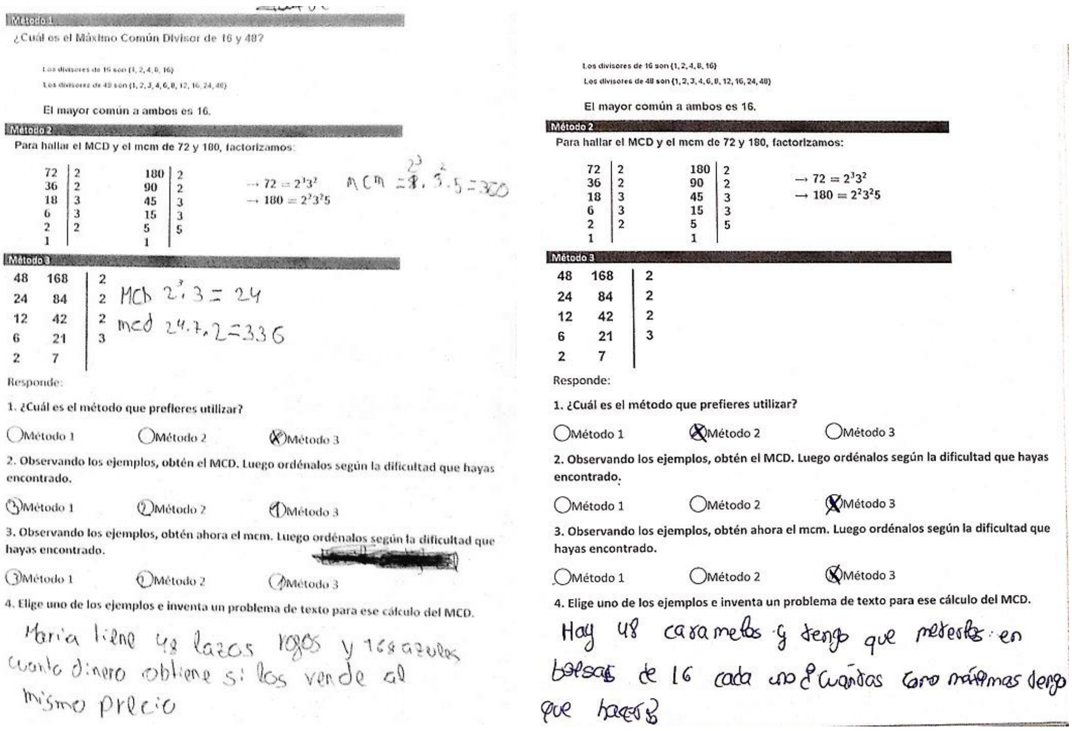

Figura 12. Cuestionarios rellenos en 2º de ESO

Antes de mostrar los resultados obtenidos, nos vamos a detener en cómo el alumnado resuelve el cálculo del MCD y mcm en cada uno de los métodos. Se han elegido dos respuestas de alumnos que sí han podido responder de forma acertada.

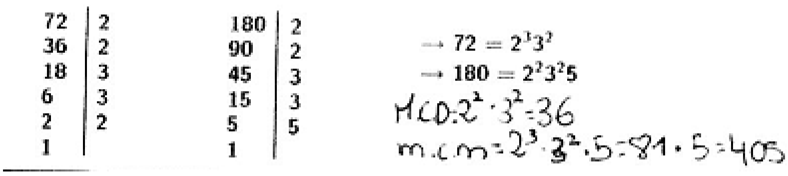

Figura 13. Respuestas con el método de factorizaciones separadas

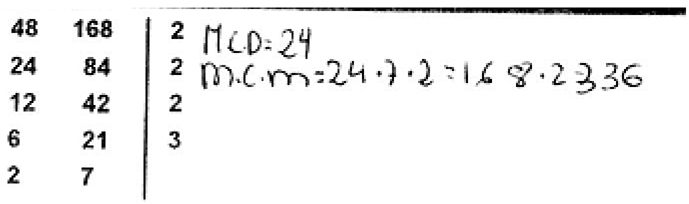

Figura 14. Respuestas con el método de factorizaciones simultáneas

Por último, resumimos los resultados obtenidos al recopilar la información proporcionada por los cuestionarios mediante una batería de gráficos. En cuanto a la primera de las preguntas, se muestra la preferencia del método utilizado a la hora de los cálculos del MCD y el mcm.

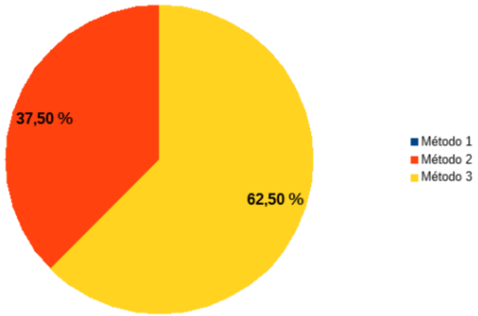

Figura 15. Elección del método preferido en 2º de ESO

La gráfica nos indica como ninguno de los alumnos ha elegido el primer método. Además, a pesar de haber sido un método explicado por primera vez, y habiéndose habituado en cursos anteriores al segundo método, un 62,5% de los alumnos elige el método nuevo.

Para la segunda pregunta, se muestra el porcentaje de alumnos que decide el nivel de dificultad de cada uno de los métodos:

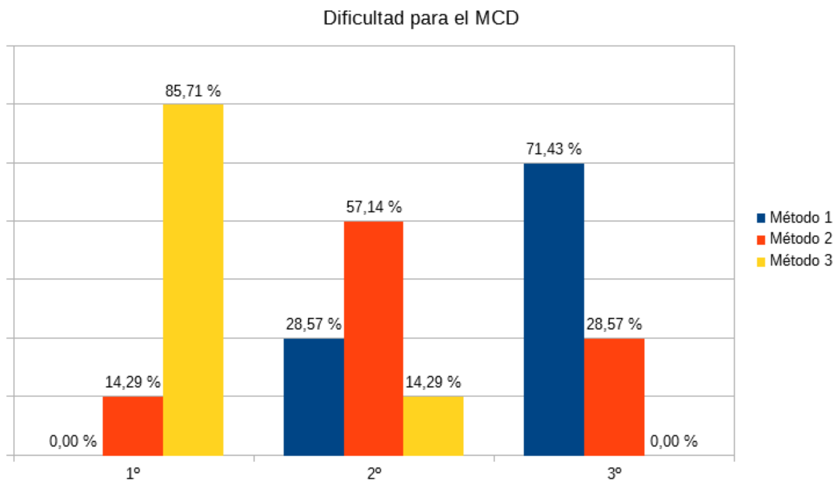

Figura 16. Elección del método más complejo para el MCD en 2º de ESO

Este gráfico nos muestra que el alumnado considera el método primero como el más sencillo para calcular el MCD. Se debe tener en cuenta que, en el cuestionario, los divisores de ambos números vienen dados, incluyendo la respuesta del MCD. Ellos no han tenido que obtener los divisores, sino que basta ver directamente cuál es el mayor divisor común e interpretar la respuesta que aparece. En cuanto a los otros dos métodos, se observa claramente que lo alumnos consideran más complicado utilizar el método de las factorizaciones simultáneas.

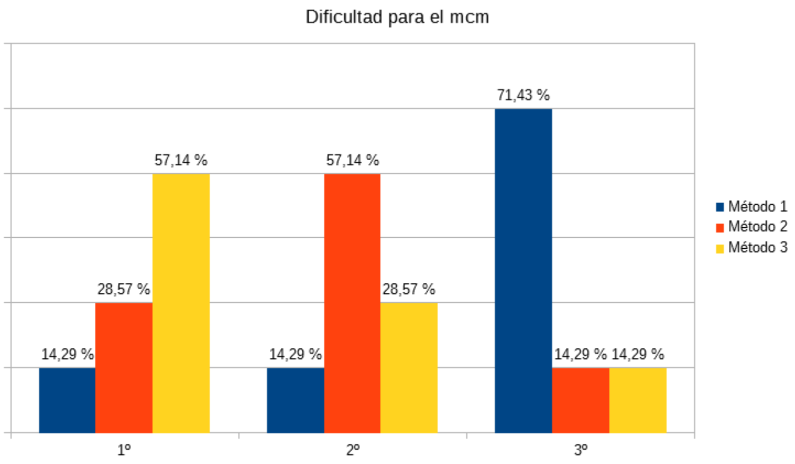

Figura 17. Elección del método más complejo para el mcm en 2º de ESO

Y en las respuestas sobre la dificultad en el cálculo del mcm, se observa que los porcentajes varían respecto a los resultados del MCD. Ocurre que, revisando todos los cuestionarios, realmente ningún alumno calcula el mcm en el ejemplo del primer método. Esto hace que por la inercia de la pregunta anterior elijan de nuevo como método más sencillo el primero. Dejando el primer método a un lado, ellos vuelven a elegir como método más complejo el de las factorizaciones simultáneas.

Debido a que esto no se corresponde con las respuestas de la primera pregunta del cuestionario, se duda de la comprensión real de las preguntas por parte del grupo. Es por ello que se modifica la estructura del mismo, y se repite el estudio en 1º de ESO.

4. Segundas valoraciones del método en alumnos de 1º de ESO

En esta nueva ronda, el cuestionario se cambia ligeramente para ayudar tanto a su realización, como a la recogida y muestra de los resultados. El grupo de 1º de ESO al que está dirigido está compuesto por 20 alumnos. No se trata de un desdoble, como en 2º de ESO, pero igualmente es un grupo heterogéneo en el que aparece alumnado con distintos niveles de competencia matemática.

Las modificaciones del cuestionario son varias. En primer lugar, se incluyen dos casillas donde indicar el MCD y el mcm en cada uno de los métodos. Se consigue con esto que el alumnado sea consciente que se están pidiendo esos dos valores, y encuentran un lugar donde colocar las respuestas.

Recuerda los tres métodos de obtención del MCD:

Método 1	MCD	mcm
¿Cuál es el Máximo Común Divisor de 16 y 48? Los divisores de 16 son {1, 2, 4, 8, 16} Los divisores de 48 son {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48} **El mayor común a ambos es 16.**		
Método 2	**MCD**	**mcm**
Para hallar el MCD y el mcm de 72 y 180, factorizamos: 72 | 2; 36 | 2; 18 | 3; 6 | 3; 2 | 2; 1 180 | 2; 90 | 2; 45 | 3; 15 | 3; 5 | 5; 1 $\rightarrow 72 = 2^3 3^2$ $\rightarrow 180 = 2^2 3^2 5$		
Método 3	**MCD**	**mcm**
48 168 | 2 24 84 | 2 12 42 | 2 6 21 | 3 2 7		

Figura 18. Nueva primera parte del cuestionario

La segunda parte del cuestionario se modifica para que el alumnado no se pierda a la hora de indicar los métodos que consideran más sencillos o más complejos. Aun así, se debe explicar con claridad a muchos de los alumnos qué se debe hacer en los pequeños círculos de cada una de las preguntas.

Responde:

1. ¿Cuál es el método que prefieres utilizar?

◯ Método 1 ◯ Método 2 ◯ Método 3

2. Observando los ejemplos, obtén el MCD. Luego ordénalos según la dificultad que hayas encontrado.

Método más difícil ◯ Método más sencillo ◯

3. Observando los ejemplos, obtén ahora el mcm. Luego ordénalos según la dificultad que hayas encontrado.

Método más difícil ◯ Método más sencillo ◯

4. Elige uno de los ejemplos e inventa un problema de texto para ese cálculo del MCD.

Figura 19. Nueva segunda parte del cuestionario

De nuevo, algunos ejemplos de encuestas rellenas son las que aparecen a continuación. Se observa cómo la resolución de cada uno de los métodos es más estructurada, que las respuestas son más fáciles de entender, y que, efectivamente, no queda claro aún qué deben hacer en esos pequeños círculos.

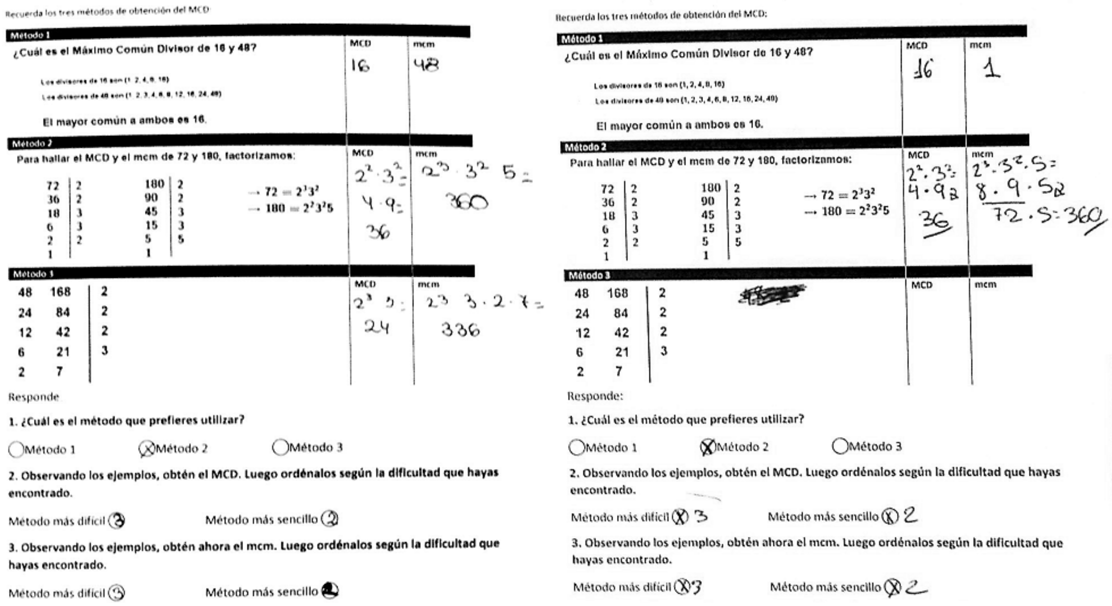

Figura 20. Cuestionarios rellenos en 1º de ESO

Los resultados en cuanto a la preferencia del método a utilizar vienen dados por el siguiente gráfico:

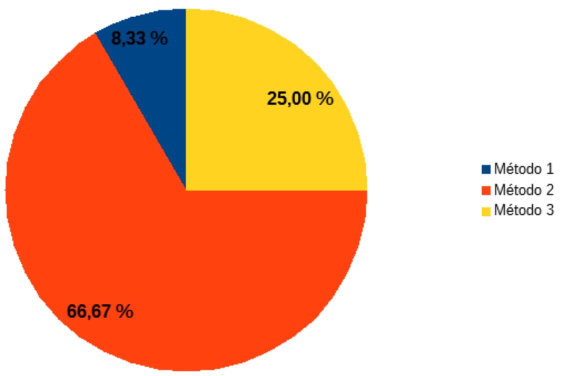

Figura 21. Elección del método preferido en 1º de ESO

Son resultados similares a los obtenidos en 2º de ESO. En esta ocasión, el método de las factorizaciones separadas ha sido más veces elegido. Se les pregunta qué causa esto, y responden que no llegan a entender del todo bien el método de las factorizaciones simultáneas, que no les da suficiente confianza como para elegirlo.

En cuanto al método preferido para los cálculos del MCD se obtienen los siguientes resultados:

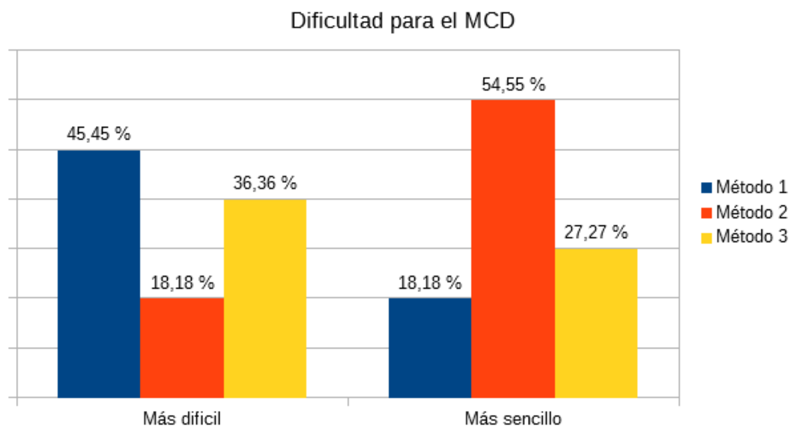

Figura 22. Elección del método más complejo para el MCD en 1º de ESO

Al cambiar la encuesta, el gráfico utilizado se simplifica. Revisando aquellos cuestionarios que responden como método más sencillo el primero de ellos, nos hace plantearnos si hubiesen respondido lo mismo en el caso de que la resolución no apareciese, o realmente piensan que es el mejor método para ello. Si nos centramos en los otros dos métodos, comprobamos que se repite esa preferencia a utilizar el método de las factorizaciones separadas.

Para finalizar las valoraciones, observamos los resultados para el cálculo del mcm.

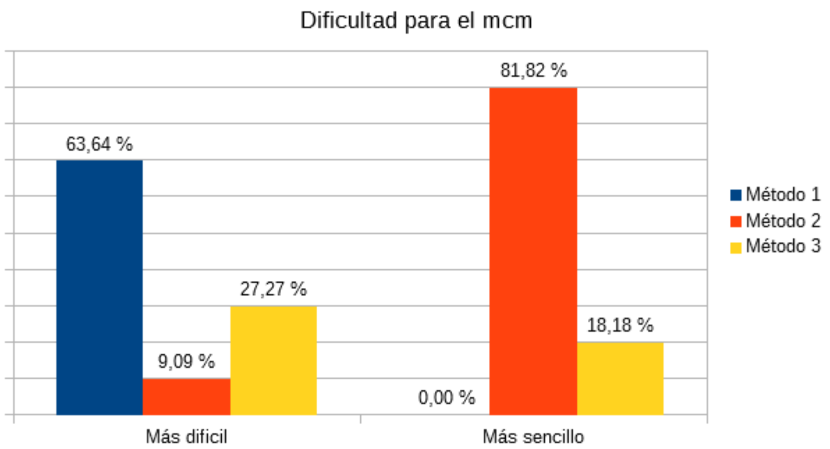

Figura 22. Elección del método más complejo para el mcm en 1º de ESO

Enlazando con lo indicado antes, es interesante ver en este último gráfico como ningún alumno elige el primer método como el más sencillo, pero sí el más complicado. Al igual que ocurría antes, el método considerado más fácil de aplicar es el método de las factorizaciones separadas, siendo el método nuevo poco elegido en ambos sentidos.

5. Conclusiones

Siempre ha de ser interesante tener información retroactiva del alumnado. En algunas actividades concretas, un método siempre será mejor que otro. Pero lo que realmente es importante es conseguir que sea el alumno el que decida con cuál de ellos se siente más cómodo.

El objetivo de nuestra materia no puede ser únicamente la realización de cálculos, sino plantearles retos e inquietudes. Los resultados del cuestionario muestran que el alumnado se suele inclinar al uso del primer método efectivo que se les enseña (en este caso, el de las factorizaciones separadas). Pero mientras que haya algunos alumnos que nos permiten ahondar en su competencia matemática y adentrarles en nuevos algoritmos de cálculo, no debemos estancarnos en métodos tradicionales. Son estos casos los que nos deben animar a introducir esas nuevas herramientas, que, en el caso de este artículo, han sido las factorizaciones simultáneas.

Bibliografía

Bodí, S. (2006). *Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los números naturales.* Tesis doctoral. Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante.

Gómez, P. (blog web). *Del máximo común divisor y su enseñanza.* http://www.webpgomez.com/ciencias/matematicas/357-del-maximo-comun-divisor-y-su-ensenanza

Martínez, S., González-Calero, J.A., Sotos, M.A. (2015). *Resultados preliminares de una investigación para el estudio de las dificultades en problemas de M.C.D. y M.C.M*. ENSAYOS, Revista de la Facultad de Educación de Albacete, 30(1).

Óscar Jesús Falcón Ganfornina. Nací en Sevilla el 20 de diciembre de 1986. Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla y Doctorado en la misma universidad. Profesor de Educación Secundaria en el IES Chaves Nogales, de Sevilla, en el curso 2019-20. El estudio de este artículo se realizó el curso anterior en el IES San Pablo, de Sevilla. Autor de la web Matematicaula.
Email: matematicaulaweb@gmail.com