

Grafos y su enseñanza¹

Teresa Claudia Braicovich

(Universidad Nacional del Comahue. Argentina)

1. Introducción

En este trabajo, que surge en el marco del Proyecto de Investigación “Teoría de Grafos”, del cual soy Directora, se presenta el recorrido de investigación realizado durante más de dos décadas a fin de analizar la factibilidad de incluir algunos conceptos del tema grafos en los currículos de los distintos niveles educativos. Las tres líneas de investigación que coexisten en el proyecto mencionado son: Algebrización de Grafos (se trabaja con las representaciones matriciales, el espectro y las energías de los grafos), Aplicaciones de Grafos (se estudian redes relacionadas con salud y también con las relaciones humanas) y Grafos y su enseñanza, siendo esta última la que da origen a esta presentación. En un principio los grafos formaban parte de la Topología pero en la actualidad no hay duda que son una rama dentro de la Matemática Discreta.

A pesar del gran auge que ha tenido la teoría de grafos en las últimas décadas, no se encuentra demasiado material referido al tema como asunto de enseñanza y menos aún si esa enseñanza es llevada a cabo mediante el apoyo de herramientas computacionales y es sumamente importante enseñar temas de punta de la matemática, se cita en este sentido a Claudi Alsina (2013): “*El camino de la educación debe permitir una formación de calidad para todos y asegurar también la actualidad de todo lo que se explica y aplica. No es posible que los currículos oficiales queden anclados en temas milenarios o de hace siglos y que no sean permeables a temáticas que siendo formativas tratan problemas de la máxima actualidad*”.

2. Inclusión de conceptos de Teoría de Grafos en niveles primario y secundario

Hay muchas dificultades que pueden ser observadas en los estudiantes: les resulta difícil proponer razonamientos propios y además en muchas ocasiones no logran resolver sencillos problemas que pueden presentarse en la vida cotidiana y que tienen relación con la matemática. Probablemente, esta situación esté relacionada con un modelo cultural que busca reproducir el conocimiento más que producirlo, podemos tomar de Braicovich, Cognigni y Reyes (2008) las palabras de Moisés Coriat: “*No es tan importante saber muchas cosas como saber cómo aprender cosas nuevas*”.

Frente a esta problemática identificada se realizaron investigaciones y creemos que los grafos constituyen una buena herramienta para conceptualizar situaciones, para extraer pautas y entender esquemas y lograr transferirlos a situaciones nuevas. Como no hay necesidad de ser un experto en el tema para usarlos con cierta soltura, vemos que el introducir algunos conceptos de grafos resulta útil

¹ Artículo solicitado a la autora por el Comité Editorial para su publicación en el Volumen 100 de la Revista Números y que por diversos motivos ajenos a este Comité Editorial no pudo ser incluido en el citado volumen.



para despertar el interés por la matemática, para ayudar al desarrollo lógico y a la visión espacial, por otro lado, también actúa como formador de la intuición y sostén del razonamiento abstracto.

2.1. Nivel Primario

En este nivel se pueden trabajar las propiedades topológicas, con juegos y se pueden usar los grafos para representar situaciones concretas. El pensamiento atomizado del niño de esta edad hace que perciba cada problema individualmente, sin aún captar las regularidades, pero se sugiere enfrentarlos a una gran variedad de situaciones diferentes y entretenidas, que irán desarrollando la intuición, base “fértil” para futuras generalizaciones y comprensión de propiedades. Trabajar con grafos que representen situaciones cotidianas, poniendo la mirada en clasificaciones sencillas y en la definición de los elementos del grafo, para estimular la búsqueda de regularidades, discutir sus propias conjeturas y obtener conclusiones. Se dan aquí los primeros pasos hacia la argumentación y formulación de hipótesis, aunque luego la manera de verificarlas o refutarlas siga siendo la realización reiterada de la experiencia. También es interesante proponerles el trabajo con coloreo de grafos, de manera que ellos busquen sus propias estrategias y/o algoritmos, se encuentran secuencias para el trabajo con coloreo en Braicovich y Cognigni (2011)

2.2. Nivel Medio

En esta etapa se producen cambios cognitivos en los alumnos, ellos pueden acceder a un mejor nivel de abstracción y representación que en los años anteriores. Por lo tanto, en este nivel, podrán plantearse los problemas de grafos como tales, sin necesidad de estar ligados a un problema concreto, realizando razonamientos propios de la matemática discreta. Se deben proponer actividades que les permitan explorar, intuir, descubrir, plantear conjeturas, justificando las mismas de manera adecuada, e incluso llegar, tal vez, a realizar demostraciones formales.

Los alumnos de este nivel están en condiciones de enunciar propiedades y trabajar con los recorridos, por ejemplo, con una planificación previa del camino a seguir, descartando ya el ensayo y error. En esta etapa se dan los primeros pasos hacia un pensamiento lógico-formal, de manera que estimular la capacidad de conjeturar, hacer uso de las propiedades ya conocidas, realizar justificaciones, descubrir algoritmos (como los necesarios para encontrar árboles minimales y maximales), enfrentarse a un problema abierto (como el de los recorridos hamiltonianos), constituyen la riqueza de contenidos apropiados para este nivel.

3. Inclusión de conceptos de Teoría de Grafos en algunas carreras de grado en el Nivel Universitario

En este punto se presentan las carreras para las cuales se analizó la factibilidad de incluir algunos conceptos de grafos y lo realizado en términos de investigación, haciendo especial hincapié en la concienciación de la existencia de problemas abiertos, en las múltiples aplicaciones y en la búsqueda permanente de nuevos modelos.

3.1. Profesorado en Matemática y Profesorado Universitario en Matemática

En la asignatura *Modelos Matemáticos* del actual Plan de *Profesorado Universitario en Matemática* de la UNCo., vigente desde el año 2014, hay numerosos contenidos de Teoría de Grafos, entre ellos

recorridos eulerianos, recorridos hamiltonianos, árboles y planaridad y coloreo. Fue un logro del grupo de investigación que se incluyan estos temas en el nuevo plan, en ocho de las dieciséis semanas que dura el cursado se trabaja en la temática grafos.

Cabe aclarar que en el plan anterior de *Profesorado en Matemática* solo se daban algunas definiciones y la representación matricial de grafos en la asignatura *Matemática Discreta*. Debido a esto se ofrecía desde el equipo de investigación un curso de esta temática en el marco de la asignatura *Seminario de la Enseñanza*, la que se aprobaba mediante obtención de créditos. El curso “*Grafos y su enseñanza*” fue dictado en varias oportunidades y siempre contó con una cantidad importante de estudiantes que lo aprobaron. Los temas eran los que actualmente se dan en la cátedra de Modelos Matemáticos.

3.2. Licenciatura en Matemática

En el plan de la Licenciatura en Matemática de la UNCo2 no se encuentra el tema grafos, por lo que desde el equipo de investigación se ofrecen dos materias optativas, “Teoría de Grafos” y “Aplicaciones de Grafos a temas de salud”, siendo requisito para cursar esta última tener aprobada la primera. Ambas asignaturas tienen una carga semanal de seis horas y la duración es de dieciséis semanas.

3.3. Distintas orientaciones de Ingeniería

Es importante dar a los estudiantes herramientas para su futuro desarrollo profesional, de manera que es fundamental mostrar algunas de las numerosas aplicaciones que la Teoría de Grafos tiene en carreras de Ingeniería, se presentan a continuación en particular las referidas a las seis orientaciones que se dictan en la Facultad de Ingeniería de la UNCo.:

- **Ingeniería Química:** Según J. M. Amigó et al. (2007) la Topología molecular es un capítulo que interesa a la Química y que aplica Teoría de Grafos a la descripción de las estructuras de moléculas orgánicas, esto se utiliza en investigación de nuevos fármacos.
- **Ingeniería Civil:** En diseño arquitectónico, en determinados problemas que tienen que ver con la conectividad de locales y/o ambientes, por ejemplo, se utilizan grafos, ya que los mismos permiten visualizar las conexiones espaciales, que pueden ser tanto de comunicación física como visual, acústica o de adyacencias (Noguera Cuenca, 2009).
- **Ingeniería en Petróleo:** Las redes de proceso de las refinerías son complejas y el esquema de las mismas es tratado con teoría de grafos para un mejor manejo de los datos. Benavidez Vázquez, L. (2013)
- **Ingeniería Mecánica:** En Rodríguez Puente et al. (2012) se encuentran varios algoritmos de reducción de grafos para dar solución a determinados problemas y se pueden encontrar aplicaciones en lo que se refiere a redes de work-flow y en redes de computadoras.
- **Ingeniería Eléctrica y Electrónica:** En Piedra Hernández y Paternostro Movilla (2009) se encuentran aplicaciones de grafos para el diseño de complejos circuitos y también en el ámbito de las redes de comunicaciones móviles, desde las líneas telefónicas hasta registros de e-mails se utiliza Teoría de Grafos.

Para concluir en la recomendación de la inclusión del tema grafos en carreras de Ingeniería se mantuvieron encuentros de trabajo y se realizaron entrevistas y encuestas a docentes y estudiantes de dichas carreras (Cognigni, Alfonso y Braicovich, 2017).



4. Formación de Recursos Humanos en la temática Grafos

“La teoría de grafos permite modelar de forma simple cualquier sistema en el cual exista una relación binaria entre ciertos objetos y por esto su ámbito de aplicación es muy general y cubre muchas áreas diversas...” José Antonio Pacheco Gago (2003)

4.1. Docentes de Matemática

Muchos docentes de matemática desconocen el tema grafos, otros sólo tienen un mínimo conocimiento del mismo e incluso algunos, aún cuando manejan más conceptos de esta temática, no saben cómo presentarlo a sus alumnos. Debido a esto, el objetivo del dictado de cursos y talleres es transferir el tema, haciendo hincapié en las actividades y metodología a utilizar de acuerdo con las edades que tienen con quiénes se trabaje.

Por último, cabe agregar que además se busca generar en los asistentes la inquietud de profundizar en el estudio de esta teoría en el futuro y movilizarlos a enseñar el mismo a sus alumnos. También se trabaja con el software GeoGebra que en el paquete de Matemática Discreta hay varios temas de grafos, en particular temas muy actuales y con numerosas aplicaciones, como son los grafos de Voronoi y de Delaunay.

4.2. Profesionales de otras disciplinas

Se dictaron cursos y talleres a profesionales de la salud, de administración y de contabilidad, esto fue realizado con el fin de mostrar las aplicaciones de la teoría de grafos en distintos ámbitos y por otro lado, trabajar en forma conjunta en las cuestiones que pudieran surgir, para hallar de manera colaborativa posibles soluciones que lleven a una mayor eficiencia, tal vez producto de una mejora en la coordinación y uso de los recursos, lo que puede reducir costos y mejorar la economía.

5. Conclusión y Proyección a Futuro

A modo de conclusión se puede transcribir textualmente el texto de Hernández Villanueva. (2014): *“La solución de problemas en la actualidad, requiere de la implementación de acciones al menor costo y pérdida de tiempo posible. En este sentido, la Teoría de Grafos ha sido una de las herramientas que ha contribuido a dar respuesta a las necesidades de la sociedad contemporánea”*.

A esto se agrega la necesidad de formación continua, de la actualización de programas de los distintos niveles educativos y de los planes de estudios de carreras universitarias. Como proyección a futuro se seguirá la línea emprendida hace más de dos décadas, es decir, continuar con los trabajos de investigación en todos los ámbitos educativos y de formación, ampliando a otros temas de grafos y también a otras carreras universitarias.

Bibliografía

- Amigó, J.; Falcó Montesinos, A.; Galvez, J.; Villar, V. (2007) La Topología Molecular. Dpto. de Físico Qca. Universidad Politécnica de Valencia. Dpto. de Matemática Aplicada. Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n° 39. Pag.135-149.
- Alsina, C. (2013) Mapas del metro y redes neuronales. Ed. Rodesa. Villatuerta, Navarra

- Benavidez Vázquez, L.; Águeda Ríos Solís, Y. (2013) Detección de pérdidas en la industria petrolera. *Memorias arbitradas del VIII Congreso de Ingeniería Industrial y de Sistemas*. Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. Nueva León. México.
- Braicovich, T.; Cognigni, R.; Reyes, C. (2008). Recorriendo grafos a lo largo de la educación general básica. *Revista de Educación Matemática de la Unión Matemática Argentina* 23. 109-125. Universidad Nacional de Córdoba.
- Braicovich, T.; Cognigni, R.; (2011). Coloreando la geografía desde el plano al toroide. *Revista Números*. Vol 76. 135-148. Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemática.
- Cognigni, R; Alfonso, L; Braicovich, T. (2017) *Libro de actas: XX Encuentro Nacional y XII Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería*. Vol I. pp. 225-230. Universidad Nacional de Santiago del Estero. Santiago del Estero, Argentina.
- Hernández Villanueva, G. (2014) FIME. Disponible en:
http://www.fime.uanl.mx/noticia_planti.php?newId=541
- Noguera Cuenca, I. (2009) Aplicaciones Arquitectónicas de la Teoría de Grafos. Valencia, España.
- Pacheco Gago (2003) Evolución de indicadores asociados a la medición de la conectividad y utilidad de las redes de transporte. Disponible en:
https://ccuc.csuc.cat/search~S23*cat?/apacheco+gago/apacheco+gago/1%2C1%2C3%2CB/
- Paenza, A. (2008). *Matemática...¿estás ahí? episodio* 100. Siglo XXI Editores Argentina S.A. Buenos Aires.
- Piedra Hernández, V.; Paternostro Movilla, C. (2009). Aplicaciones de la Teoría de Grafos en la Informática. Pontificia Universidad Javeriana. Bogotá, Colombia.
- Rodríguez Puente, R.; Marrero Osorio, S.; Lazo Cortés, M. (2012) Aplicación de un algoritmo de reducción de grafos al Método de los Grafos Dicromáticos. *Revista electrónica: Ingeniería Mecánica*. Vol.15. N° 2. Pág. 158-168.

Teresa Claudia Braicovich. Docente del Departamento de Matemática, de la Facultad de Economía y Administración de la Universidad Nacional del Comahue (UNCo.), Patagonia Argentina. Ingeniera Civil (UNCo.) y Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas con Orientación en Matemática (UNCo.). Cuenta con presentaciones en congresos nacionales e internacionales en modalidad conferencia, mesa redonda, panel y comunicaciones científicas y en educación matemática. También cuenta con publicaciones y ha dictado numerosos cursos y talleres. Email: teresabraicovich@gmail.com

