NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 104, julio de 2020, páginas 75-82

Optimización en Bachillerato: el problema de Herón

José Antonio Sánchez Pelegrín
(Universidad de Granada. España)
Daniel de la Fuente Benito
(Universidad de Oviedo. España)
Alfonso Zamora Saiz
(Universidad Politécnica de Madrid. España)

Fecha de recepción: 24 de octubre de 2019
Fecha de aceptación: 22 de marzo de 2020

Resumen En este artículo presentamos un problema de optimización: el problema de Herón; poniendo énfasis en los beneficios derivados de las distintas formas de afrontarlo para su resolución. Se muestran tres aproximaciones al problema, mediante métodos analíticos y gráficos, así como la introducción del uso de GeoGebra en la resolución del mismo.

Palabras clave Geometría, problema de Herón, optimización, cálculo diferencial, GeoGebra.

Title **Optimization in high school: Heron's problem**

Abstract In this article we present an optimization problem: Heron's problem; emphasizing the benefits derived from the different approaches that can be used to solve it. We discuss the approach using analytic and graphical methods as well as introduce the use of GeoGebra to solve it.

Keywords Geometry, Heron's problem, optimization, differential calculus, GeoGebra.

1. Introducción

En este artículo tratamos con un problema de optimización que se puede resolver usando diferentes métodos accesibles a estudiantes de Bachillerato en España y universitarios de primer curso en un grado de ciencias experimentales o sociales. Desde nuestra experiencia docente, hemos encontrado que cuando afrontan un problema, los estudiantes tienden a usar automáticamente las herramientas matemáticas que se les han enseñado durante las clases teóricas de una forma mecánica. Sin embargo, sería deseable que los estudiantes se acostumbrasen a pensar en la mejor estrategia para afrontar un problema antes de hacer cálculos, dado que ésta será la clave para resolver problemas más avanzados (Pólya, 1945).

En particular, los problemas de optimización son una de las opciones más comunes en Matemáticas para ilustrar las numerosas aplicaciones del cálculo diferencial. Los alumnos encuentran estos problemas muy motivadores dado que aparecen en una gran variedad de campos, como la Mecánica, la Óptica o la Economía, y el ser capaces de resolverlos tiene, a buen seguro, un impacto positivo en el desarrollo de sus carreras.

Históricamente, los problemas de optimización han llamado la atención de matemáticos ilustres, dado que se requiere una cierta dosis de creatividad para resolverlos y las soluciones a los mismos, con frecuencia, dan lugar a un mejor conocimiento del campo en el que ha sido propuesto dicho problema. En efecto, uno de los primeros problemas de optimización es el llamado “problema isoperimétrico”, que consiste en encontrar de entre todas las curvas cerradas del plano, de perímetro fijo, aquélla que maximiza el área de la región que encierra. Este problema es también conocido como el problema de Dido, debido a que como narra Virgilio en La Eneida, la leyenda cuenta que la ciudad de Cartago fue fundada por la reina Dido dentro del área máxima que ésta pudo encerrar en una tira formada con la piel de un toro. El problema isoperimétrico no fue completamente resuelto hasta 1927, cuando Weierstrass utilizó el cálculo de variaciones para hallar la solución del mismo (Weierstrass, 1927).

Además, uno de los resultados más destacables en optimización se conoce como el “principio de Fermat” y establece que el camino óptico que sigue un rayo de luz (definido como la longitud del trayecto físico seguido por dicho rayo, multiplicada por el índice de refracción del material por el que se propaga) entre dos puntos es estacionario con respecto a las variaciones del camino (Born y Wolf, 1980). Este problema pertenece a la rama del Análisis Matemático conocida como Cálculo de Variaciones, cuya finalidad es obtener puntos críticos de ciertos funcionales. Esta área de estudio comienza con el “problema de la braquistócrona”, propuesto por Johann Bernoulli. Este problema de optimización tiene como objetivo encontrar la forma de la curva que une dos puntos, tal que un cuerpo partiendo del reposo en el primer punto, y sólo acelerado por la gravedad, se deslizará por esta curva sin fricción hasta el punto final, en el menor tiempo posible (Courant y Hilbert, 1953).

Tal como se recoge en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de ESO y Bachillerato, la resolución de problemas es un eje fundamental del proceso de aprendizaje de las matemáticas, desarrollando la habilidad de plantear, resolver y discutir soluciones desde diferentes puntos de vista, así como la utilización de herramientas tecnológicas para ello. En la asignatura Matemáticas II, de segundo de Bachillerato, uno de los contenidos del Bloque 3: Análisis, es precisamente la aplicación de la derivación a problemas de optimización, cuyo estándar de aprendizaje evaluable es el planteamiento de estos problemas relacionados con diferentes ciencias, su resolución y su interpretación. Es por ello que el problema de Herón representa un excelente ejemplo de caso de optimización, que admite soluciones empleando técnicas analíticas y gráficas, que ofrecen a los estudiantes una perspectiva global de la modelización y resolución de este tipo de problemas. Además, se puede usar un potente y sencillo software de visualización, como es el caso de GeoGebra.

2. Formulación del problema

El problema que proponemos aquí está conectado con el “problema de Herón”, que surgió cuando Herón de Alejandría estudió la reflexión de la luz en un espejo en su Catoptrica. Así, Herón fue capaz de probar la igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión como consecuencia del principio aristotélico de que “la naturaleza no hace nada en vano”. Esto es, obtuvo que la luz sigue el camino más corto cuando viaja de una fuente a un espejo y, después, a un observador. Resultado que, a día de hoy, podemos obtener como una consecuencia del principio de Fermat.

En conexión con el “problema de Herón”, Henry E. Dudeney (1926) propone el siguiente problema, que acostumbra a fascinar a los estudiantes por el gran número de formas diferentes en que puede ser resuelto:

Problema: Una mosca se posa en la superficie exterior de un vaso cilíndrico y debe caminar por la superficie del vaso para llegar hasta una gota de miel situada en la superficie interior del mismo. Encuentra el camino más corto posible (sin tener en cuenta el grosor del vaso).

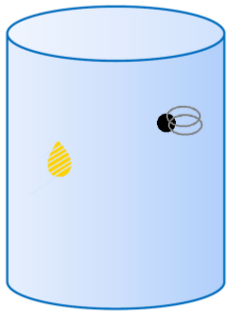

Figura 1: Ejemplificación del problema de la mosca y la gota de miel en el vaso

Denotamos la posición de la mosca y de la gota de miel por A y B, respectivamente. Si ambos puntos se encuentran en la misma generatriz, la solución es obvia. Si asumimos que esto no ocurre, Podemos "desarrollar" el cilindro de la Figura 1 para obtener un rectángulo como en la Figura 2, donde a, b y c son longitudes estrictamente positivas.

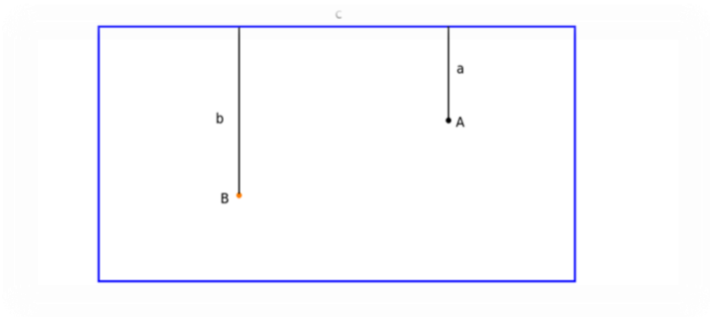

Figura 2: Posiciones en el vaso (cilindro) desarrollado

Usando la Figura 2 podemos observar que para resolver el problema debemos encontrar un punto C en el borde del rectángulo (Figura 3), tal que la suma de los caminos de A a C, y de C a B, es la mínima posible.

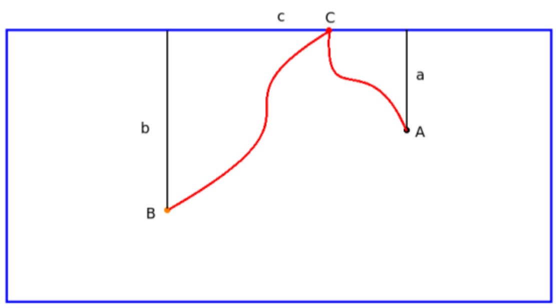

Figura 3: Posible camino de la mosca A a la gota de miel B

Por tanto, dado que la curva de longitud mínima en el plano (es decir, la geodésica) es la línea recta, el camino que la mosca debe seguir será el descrito en la Figura 4, debiendo ahora buscar el punto C en el borde del vaso que minimiza la longitud de este camino. Podemos encontrar este punto siguiendo dos métodos.

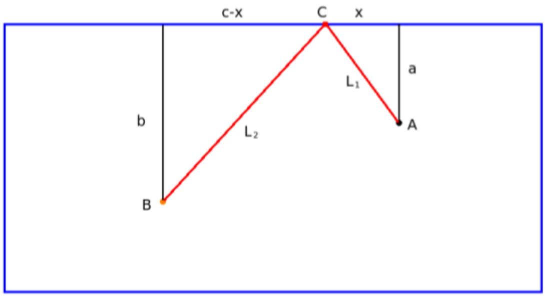

Figura 4: Camino con geodésicas al punto C

3. Primera aproximación usando GeoGebra

Utilizando el software GeoGebra se puede hacer ver a los alumnos la existencia de este punto que minimiza esta suma de longitudes. Para ello, se varía el punto C de sitio para unos valores concretos a, b y c. Se observa cómo al mover este punto la distancia va cambiando, pudiendo encontrar de manera heurística la posición de C que minimiza el camino (Figura 5).

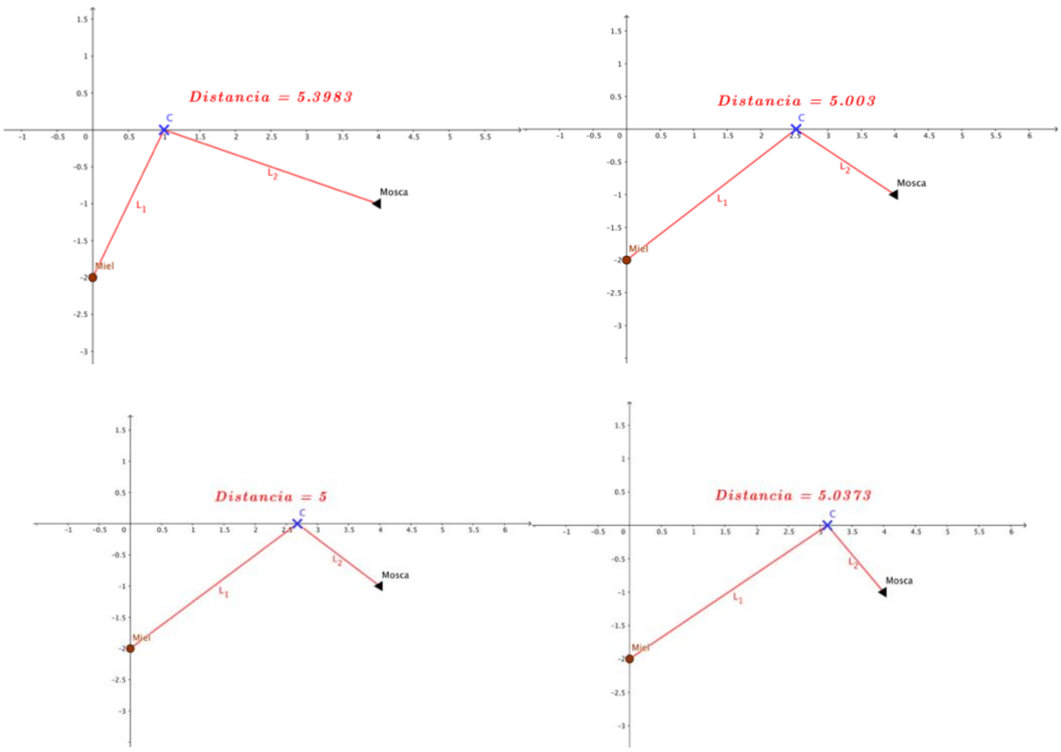

Figura 5: Minimización de la distancia con un deslizador en GeoGebra

3. Segunda aproximación usando derivadas

El objetivo es minimizar la suma de las longitudes de L_1 y L_2 de la Figura 4. Usando el Teorema de Pitágoras, sabemos que esas longitudes satisfacen

$$L_1^2 = a^2 + x^2 \qquad \text{y} \qquad L_2^2 = b^2 + (c-x)^2$$

Por tanto, la función que tenemos que minimizar es

$$L(x) = L_1 + L_2 = \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+(c-x)^2}$$

Para minimizar L(x), primero obtenemos sus puntos críticos (i.e. aquellos puntos donde la derivada es cero) y estudiamos cuál de ellos es el mínimo absoluto. La derivada de L(x) está dada por

$$L'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}} = \frac{x\sqrt{b^2+(c-x)^2} - (c-x)\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{(a^2+x^2)(b^2+(c-x)^2)}}$$

Esta derivada será igual a cero si, y solo si, el numerador de esta fracción se anula. Por tanto, los puntos críticos de L(x) serán los que satisfacen:

$$(c-x)^2(a^2+x^2) = x^2[\mathrm{b}^2 + (c-x)^2]$$

Y el único punto crítico viene dado por

$$x_0 = \frac{ac}{a+b}$$

Estudiando el signo de L'(x) podemos ver que este punto crítico es un mínimo de la función L(x). En efecto, se trata del mínimo global de L(x). En resumen, el camino más corto es el que une a, x_0 y b, y la longitud total de este camino es:

$$L(x_0) = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$$

El mínimo de la función L(x) es global si la función es convexa. Esta convexidad de la función se puede observar con ayuda de GeoGebra (véase Figura 5). Al mover el deslizador del punto C en el borde del vaso se ve cómo la longitud del camino $L_1 + L_2$ varía de forma convexa, es decir, siendo mayor en los extremos y minimizándose hacia el centro. Precisamente el punto donde esa longitud es mínima es el mínimo global x_0 que obtenemos analíticamente.

4. Tercera aproximación usando el método de Herón

Otra forma posible de abordar este problema es usando el llamado principio de reflexión de Herón. Consiste en reflejar el punto B por el borde del cilindro en B', como en la Figura 6, y observar (tal como hizo Herón al estudiar la reflexión de la luz en el espejo) que la longitud el camino más corto uniendo A y B es igual a la longitud del camino mínimo de A a B'.

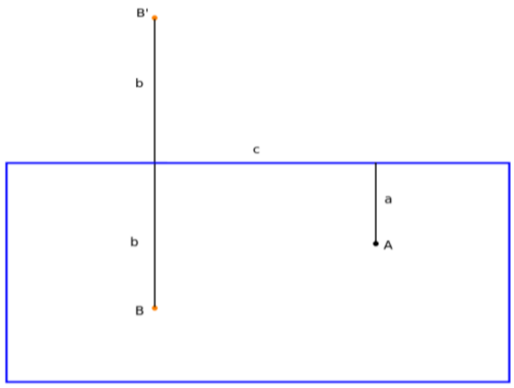

Figura 6. Simetrización del punto B

Se encuentra fácilmente que la curva más corta uniendo A y B' es la línea recta dibujada en la Figura 7.

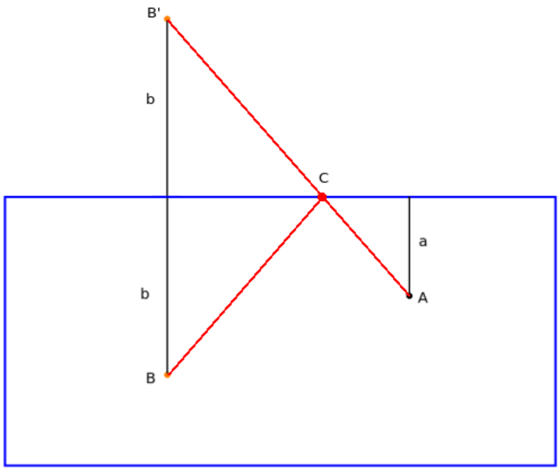

Figura 7. Solución gráfica usando la simetrización del punto B

Más aún, para obtener la longitud de esta línea recta sólo se necesita usar el Teorema de Pitágoras para encontrar la hipotenusa del triángulo cuyos lados son c y a+b. Por ello, se obtiene que la longitud del camino más corto entre A y B', y por tanto de A a B, es:

$$L_0 = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$$

Finalmente, se puede dibujar en la Figura 7 el camino más corto que la mosca puede seguir para alcanzar la gota de miel, usando el principio de reflexión de Herón, camino que verifica que es igual al obtenido previamente usando cálculo diferencial. De hecho, se puede ver en la Figura 8 cómo obtener el camino mínimo si representamos gráficamente el método de simetrización de Herón mediante GeoGebra.

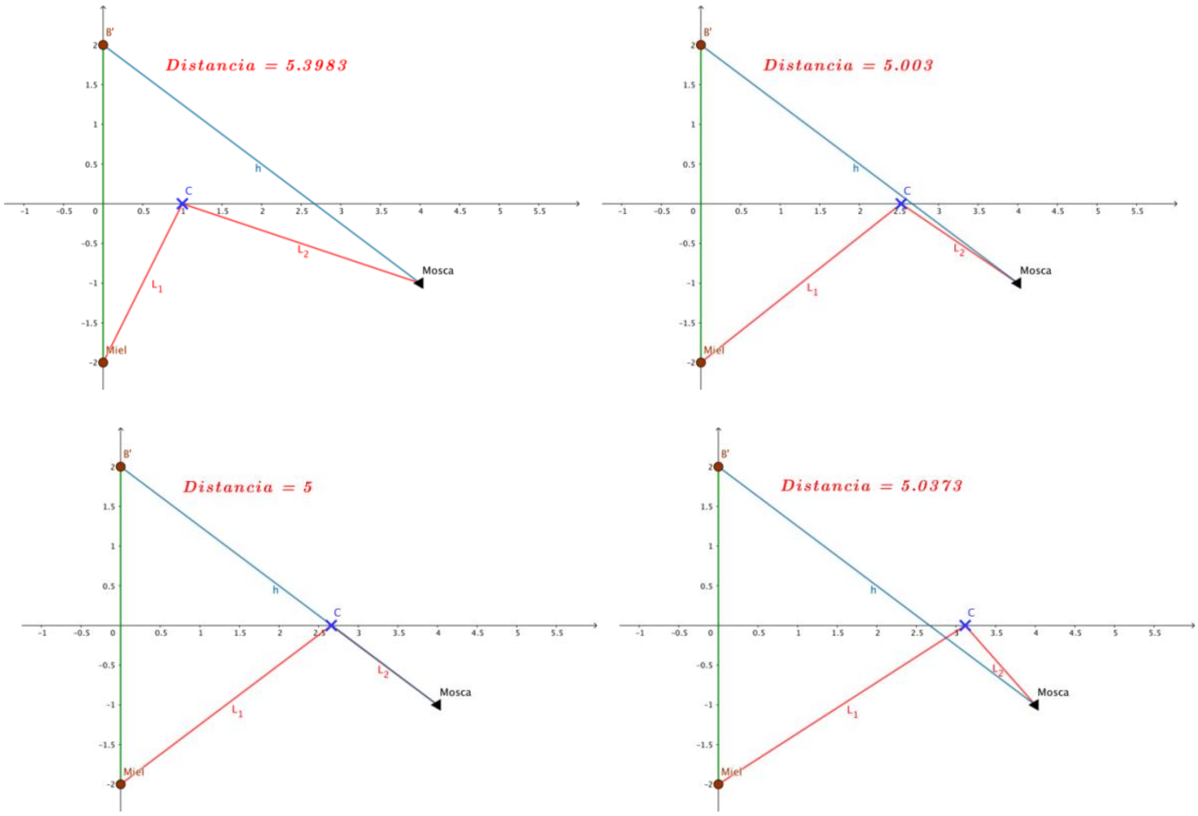

Figura 8. Minimización de la distancia con GeoGebra usando la simetrización

5. Conclusiones

Para concluir, nos gustaría enfatizar el interés académico de este problema desde diferentes perspectivas. Primero, se trata de un problema altamente estimulante debido a su formulación simple y a las consecuencias prácticas que se pueden deducir de él. Además, es un problema de gran importancia histórica que ayuda a entender mejor la naturaleza geométrica del mundo y que puede hacer que los estudiantes entiendan mejor la importancia de resolver problemas de optimización. Más aún, como nos muestra la experiencia docente, cuando tratamos con este problema los estudiantes tienden a seguir el primer método para resolverlo una vez se han familiarizado con el cálculo diferencial.

Sin embargo, el interés del problema también reside en la variedad de formas que se pueden usar para resolverlo. Así, por ejemplo, Figueiras y Deulofeu (2005) indican la importancia de las construcciones visuales en el problema de Herón. Es por esto que creemos que los estudiantes se beneficiarán tanto de la modelización del mismo usando GeoGebra como de la resolución usando el principio de reflexión de Herón. Esto les hará reflexionar acerca de la importancia de tomarse el tiempo de pensar cómo resolver un problema antes de comenzar a realizar cálculos. De hecho, el problema de Herón es un buen ejemplo de cómo el usar un método adecuado para abordar un problema puede ayudarnos de forma crucial para evitar muchos cálculos tediosos (en los cuales incrementamos las posibilidades de cometer errores). También puede estimular a los estudiantes a buscar una forma creativa de abordar los problemas a los que se enfrenten.

Bibliografía

Born, M. y Wolf, E. (1980). *Principles of optics* (6th Ed.), Pergamon Press: Oxford.
Courant, R. y Hilbert, D. (1953). *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I, Interscience Publishers: New York.
Dudeney, H. E. (1926). *Modern Puzzles: And how to Solve Them*, C. A. Pearson Limited: London.
Figueiras, L. y Deulofeu, J. (2005). Visualising and conjecturing solutions for Heron's problem, *Proceedings of the CERME 4 International Conference*, 420-427.
Pólya, G. (1945). *How to solve it*, Princeton University Press: New Jersey.
Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de ESO y Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado,* 3, pp. 169-546. Recuperado el 28 de junio de 2020 de: https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf
Weierstrass, K. (1927). *Mathematische Werke*. Vol. 7. Vorlesungen über Variationarechnung.

José Antonio Sánchez Pelegrín es doctor en Geometría por la Universidad de Granada. Actualmente trabaja en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. E-mail jpelegrin@ugr.es. Dirección: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, 18071, Granada, España.

Daniel de la Fuente Benito es doctor en Geometría por la Universidad de Granada. Actualmente trabaja en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Oviedo en Gijón. E-mail fuentedaniel@uniovi.es. Dirección: Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo, 33003, Gijón, España.

Alfonso Zamora Saiz es doctor en Geometría por la Universidad Complutense de Madrid. Actualmente trabaja en el Departamento de Matemática Aplicada a las TIC de la ETSI Informáticos de la Universidad Politécnica de Madrid. E-mail alfonso.zamora@upm.es. Dirección: Departamento de Matemática Aplicada a las TIC, ETSI Informáticos, Universidad Politécnica de Madrid, 28660, Madrid, España.