

## Analizando el lenguaje asociado a la estimación de la proporción en libros de texto de bachillerato

Juan Jesús Ortiz de Haro<sup>1</sup>  
Felipe Castro Lugo<sup>2</sup>

(<sup>1</sup>Universidad de Granada. España)

(<sup>2</sup>Instituto Tecnológico de Sonora. México)

---

### Resumen

En este artículo analizamos el lenguaje utilizado en el tema de la estimación de la proporción en tres libros de texto españoles de bachillerato. Entre las diferentes perspectivas teóricas para abordar el análisis de libros de texto, hemos optado por el Enfoque Onto-semiótico (EOS), por la importancia que otorga al lenguaje. Los resultados muestran la gran riqueza y diversidad de expresiones verbales, tanto del lenguaje ordinario usadas con sentido específico, como específicas de estadística y probabilidad. Hay predominio de lenguaje algebraico y lenguaje simbólico complejo y variado. El lenguaje numérico contempla todos los conjuntos numéricos y se encuentra también amplio uso de representaciones tabulares y gráficas. Algunas diferencias en los libros indican el importante papel del profesor al seleccionar y usar estos libros en la enseñanza.

### Palabras clave

Inferencia estadística, Estimación proporción, Libros de texto, Bachillerato

---

### Title

Analyzing the language linked to the estimation of the proportion in high school textbooks

### Abstract

In this paper we analyze the language used in the estimation of the proportion in three Spanish high school textbooks. Among the different theoretical perspectives, we selected the Onto-semiotic Approach (OSA), due to the importance it gives to language. The results show the great richness and diversity of verbal expressions, both of ordinary language used with specific meaning, and terms specific of statistics and probability. There is a predominance of algebraic language and complex and varied symbolic language. The numerical language includes all the numerical sets and there is also extensive use of tabular and graphical representations. Some differences in the books indicate the important role of the teacher in selecting and using these books in teaching.

### Keywords

Statistical inference, Estimation proportion, Textbooks, High school

---

## 1. Introducción

La inferencia es un tema fundamental en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, en segundo curso de bachillerato en España (17 - 18 años), debido a la importancia que tiene la inferencia en la sociedad actual (Batanero y Borovcnik, 2016) y en particular en las carreras que cursarán los estudiantes de bachillerato de Ciencias Sociales. Uno de los temas considerados para esta asignatura en el currículo es la estimación, en el que se trata de determinar en forma aproximada el valor de un parámetro poblacional, a partir de los datos obtenidos en una muestra. De hecho el



muestro y la inferencia conectan la estadística con la probabilidad, por lo que se consideran ideas fundamentales en estadística (Burrill y Biehler, 2011).

En la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, en el *Bloque 4. Estadística y probabilidad* se incluye el estudio de la estimación puntual y por intervalos de confianza, tanto para la media, como la proporción. En este trabajo nos centramos en la estimación de la proporción, que se estudia en el citado curso de bachillerato con los siguientes contenidos:

Distribución de la media muestral y de la proporción muestral en el caso de muestras grandes. Estimación por intervalos de confianza. Relación entre confianza, error y tamaño muestral. Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución de modelo desconocido y para la proporción en el caso de muestras grandes". (MECD, 2015, p. 389).

Más específicamente nos interesamos por los libros de texto dirigidos a estos estudiantes, que se han editado recientemente, debido al cambio de directrices curriculares en España. El libro de texto es uno de los principales recursos educativos, ya que muchas decisiones de los profesores sobre las tareas a realizar por los estudiantes están mediadas por los mismos (Stylianides, 2009). Desde el currículo pretendido al implementado en el aula, una fase importante es el currículo escrito y la forma en que lo interpretan los profesores, a través de los libros de texto (Herbel-Eisenmann, 2007).

En este trabajo pretendemos analizar el lenguaje en el tema de estimación de la proporción en tres libros de texto españoles, de segundo curso de bachillerato de Ciencias Sociales, publicados según la nueva normativa. La finalidad es comparar los resultados con otros estudios previos y las directrices curriculares citadas. A continuación se describe el marco teórico y la metodología, se presenta el análisis y discusión de los resultados, finalizando con las conclusiones.

## **2. Marco teórico y metodología**

Entre los diversos enfoques para analizar los libros de texto, hemos optado por el Enfoque Onto-semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), por el importante papel que otorga al lenguaje matemático, al que considera mediador de las prácticas personales o institucionales en la resolución de problemas, por su carácter representacional y operativo. Este marco teórico permite analizar a los objetos matemáticos desde dos facetas (institucional o personal), centrándonos en este trabajo en el punto de vista institucional o epistémico. Dicho marco considera la actividad matemática como un conjunto de prácticas realizadas en la resolución de problemas. El significado que se le atribuye a un objeto matemático sería el sistema de prácticas asociadas a él y éste puede ser caracterizado desde dos vertientes: significado institucional (aceptados por una institución) o personal (relativos a una persona). Tales prácticas matemáticas se caracterizan por los objetos matemáticos primarios que intervienen en ellas, considerándose el lenguaje como uno de estos elementos.

En este marco teórico es también fundamental la idea de conflicto semiótico, que puede surgir al interpretar el lenguaje matemático (Godino et al., 2007). Los autores consideran el problema que surge al interpretar la variedad de representaciones utilizadas en el trabajo matemático, utilizando la idea de función semiótica como correspondencia entre una expresión y un contenido, siguiendo una regla de correspondencia. El conflicto semiótico se produce al realizar una interpretación de una función semiótica no acorde con la pretendida por el que la ha producido, lo que genera una discordancia entre el significado institucional y personal de una expresión matemática.

Finalmente, nos apoyamos en el estudio de los símbolos utilizados en los niveles iniciales de algebrización definidos por Godino y sus colaboradores (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Echegaray y Lasa, A, 2015). Los autores se basan para definir sus niveles de algebrización, tanto en la actividad que realiza el sujeto que resuelve una tarea matemática, como en el grado de generalidad de los objetos que se utilizan, además de los procesos matemáticos involucrados y el tipo de lenguaje.

La muestra está constituida por tres libros de texto, de segundo curso de bachillerato de Ciencias Sociales, publicados en 2016, que se eligieron por ser editoriales de gran prestigio a nivel nacional. Al ser un estudio exploratorio, se trata de una muestra intencional, sin pretensiones de extender las conclusiones. Sus referencias se incluyen como anexo y se denotan con un código en el trabajo. En estos libros se ha realizado un análisis de contenido del capítulo dedicado a inferencia estadística y estimación de la proporción, estudiando las variables determinadas en Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013), que permiten lograr el objetivo de este estudio: a) expresiones verbales, según tipología; b) expresiones numéricas; c) símbolos; d) representaciones tabulares y gráficas. Las categorías de cada una de estas variables se determinan mediante sucesivas revisiones de los textos de un modo cíclico e inductivo.

### **3. Algunos antecedentes**

El lenguaje es una de las características importantes del libro de texto de matemáticas, por ser un instrumento necesario en la representación y la actividad de matematización y por reflejar la complejidad conceptual de un tema. Son por ello muchos los autores que han analizado el lenguaje asociado a diferentes temas de estadística, que puede representar un reto para los estudiantes (e.g., Dunn, Carey, Richardson y McDonald, 2016; Kaplan, Rogness y Fisher, 2012). Todos ellos sugieren la necesidad de prestar atención al lenguaje matemático, que además debe conectarse con el lenguaje conocido por los estudiantes de antemano.

Son pocos los trabajos centrados en el análisis de temas de probabilidad o muestreo en los libros de texto. Entre ellos encontramos a Ortiz, Serrano y Batanero (2001), quienes estudiaron el lenguaje en dos libros de texto de Educación Secundaria, distinguiendo entre el lenguaje del azar y de la probabilidad, observando en uno de los textos una mayor riqueza del lenguaje empleado respecto al azar así como un vocabulario más rico respecto a la probabilidad, con gradaciones cualitativas, presentando las concepciones subjetivas y frecuencial y conectando con el estudio de la estadística. Gómez et al. (2013) analizaron el lenguaje utilizado en probabilidad en dos series de libros de texto españoles de Educación Primaria, encontrando una gran riqueza y diversidad de expresiones verbales y predominio de lenguaje coloquial frente al formal; el lenguaje se asocia a diversos significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, frecuencial y axiomático).

Ortiz, Albanese y Serrano (2016) analizaron el lenguaje de la probabilidad en tres libros de texto españoles de Educación Secundaria publicados en 2015. Los resultados muestran la gran riqueza y diversidad de expresiones verbales y predominio de lenguaje coloquial frente al formal; el lenguaje se asocia a diversos significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, frecuencial y axiomático). El lenguaje numérico se desarrolla conforme a la introducción de diferentes sistemas numéricos en la enseñanza y se encuentra un amplio uso de representaciones tabulares y gráficas. García y García (2009) realizaron un estudio detallado de los términos específicos sobre la inferencia estadística. Concluyen que el contexto de trabajo es determinante en el significado de los términos y que, en ocasiones, la definición de estos términos que aparece en los libros de texto no corresponde a la propia del contexto matemático, sino más bien a la del contexto cotidiano, lo que según los autores no es



adecuado ya que el libro de texto debe presentar al estudiante los conceptos matemáticos de forma correcta.

Nuestro trabajo pretende contribuir a este tema centrándonos en la estimación, tema que aún no ha sido explorado en los libros de texto. Con ello se pretende concienciar al profesor de la dificultad que implica el tema para los estudiantes y ayudarles a planificar la enseñanza.

#### **4. Resultados y discusión**

A continuación, se resumen los resultados de nuestro estudio diferenciando el tipo de lenguaje empleado en los textos analizados.

##### **4.1. Expresiones verbales**

Siguiendo a Shuard y Rothery (1984), se han diferenciado tres tipos de términos o expresiones: a) aquellas que se utilizan en el lenguaje cotidiano, pero que se usan en el texto con un significado específico que no coincide con el anterior. Por ejemplo, el término *proporción* en inferencia se refiere a un parámetro poblacional o a un estadístico que es la razón entre el número de elementos con una característica y el total de la población o muestra. Pero en otras ramas de la matemática una proporción es la igualdad de dos razones. Estas palabras del lenguaje cotidiano, que se usan en el texto con sentido diferente al cotidiano, es lo que puede crear problemas de ambigüedad al aplicarlas con un sentido diferente al conocido anteriormente por el estudiante (Barwell, 2005, Kaplan et al., 2012).

Las palabras o expresiones específicas son las que no se suelen utilizar en la vida cotidiana; por ejemplo, *intervalo de confianza o distribución normal*. Dentro de ellas, y siguiendo a Gómez et al. (2013), hemos diferenciado las que se refieren a juegos de azar, como *azar o suerte*. Otro grupo son específicas de la probabilidad, como *variable aleatoria, distribución de la variable aleatoria*. Finalmente el último grupo son propias de la inferencia estadística, como *parámetro, muestra o muestreo* (Tabla 1).

<b>Tipo</b>	<b>[T1]</b>	<b>[T2]</b>	<b>[T3]</b>
<b>Expresiones cotidianas</b>	14	12	8
<b>Específicas probabilidad</b>	21	14	12
<b>Específicas estadística</b>	42	27	35
<b>Juegos de azar</b>	3	4	0

**Tabla 1.** Expresiones distintas y frecuencia en los libros de texto según categoría.

En esta tabla observamos un gran número de términos diferentes; esta abundancia se debe a que encontramos palabras que se usan para indicar resumidamente un procedimiento (por ejemplo, *tipificación*) o hacen alusión a conceptos o propiedades de estadística o probabilidad (*media, proporción, parámetro, muestra, etc.*). El mayor número de expresiones diferentes son las específicas de estadística y probabilidad, siendo muy escasas las referidas a juegos de azar, al contrario que en el estudio de Gómez et al. (2013) con textos de primaria, y en Ortiz et al. (2016) con textos de secundaria, lo que es comprensible, puesto que el tema se centra específicamente en inferencia. Observamos un aumento en la formalización y variedad del lenguaje en bachillerato en comparación con los anteriores estudios. No obstante, todavía hay una gran variedad de expresiones del lenguaje

ordinario usadas con sentido específico, lo que puede ocasionar conflictos semióticos (Godino et al., 2007), debido a problemas de ambigüedad (Barwell, 2005; Kaplan et al., 2012).

Entre las específicas de probabilidad, las expresiones más utilizadas están relacionadas con el cálculo de probabilidades (*probabilidad de obtener un valor*), variable aleatoria (*variable aleatoria discreta o continua*), las distribuciones normal y binomial (*esperanza matemática, distribución*) y las distribuciones muestrales (*convergencia, simetría*). La distribución de las proporciones muestrales y la estimación, junto con el correspondiente vocabulario se trata en los tres textos. El texto [T3], es el único que destaca la idea de incertidumbre como una característica de los estudios sobre poblaciones. Respecto al estudio de Ortiz et al. (2001), con textos de secundaria dirigido a alumnos de 14 años, el lenguaje ha variado bastante ya que aparecen conceptos más complejos.

Los términos específicos de estadística son muy variados, destacando los conceptos de población y muestra (*población normal, muestra aleatoria*), estimación de la proporción (*estimación puntual, estimación por intervalos de confianza*), inferencia estadística e intervalos de confianza (*Calcula un intervalo de confianza para la proporción*), que aparecen en los tres textos. En ningún texto se da una definición explícita del concepto de inferencia estadística que es fundamental para comprender la estimación. Lo que hacen, los textos [T1] y [T3], es utilizar la palabra inferir como sinónimo de deducir, lo que, según García y García (2009), está más relacionado con el contexto cotidiano, ya que en matemáticas son dos términos opuestos con significados distintos, pues la inferencia estadística no es un razonamiento deductivo, lo que puede generar obstáculos en el aprendizaje del alumnado.

Al comparar el contenido de los textos con las indicaciones del currículo, se observa que por ejemplo, el texto [T1] trata los test de hipótesis (T1, p.316), concepto no contemplado en los documentos curriculares. Otros textos omiten contenidos que sí están incluidos en el currículo, como el análisis de los elementos de una ficha técnica en un estudio estadístico, siendo el texto [T3] el único que lo trata. En el texto [T2] no se hace ninguna referencia a expresiones relacionadas con las tecnologías y la simulación tal y como se recomienda en dichos documentos.

#### 4.2. Lenguaje numérico

En los tres libros de texto aparecen los mismos tipos de conjuntos numéricos representados, por lo cual no incluimos una tabla comparativa de los mismos. En los textos encontramos abundante uso de los números enteros que suelen expresar el tamaño de la muestra o el valor de los parámetros de la distribución binomial, así como números decimales y fracciones que a veces aparecen en la misma expresión: " $p = \frac{30}{150} = 0,2$ " (T3, p.303).

Los porcentajes se utilizan para expresar probabilidades, lo que puede originar un conflicto semiótico, ya que un porcentaje es una razón sobre 100 y una probabilidad una razón sobre 1. Igualmente se utilizan para indicar el nivel de confianza, usualmente el 95%, lo cual de nuevo puede inducir el conflicto anterior, ya que el nivel de confianza es una probabilidad. Los números irracionales pueden aparecer en el cálculo del error máximo admisible en la estimación de la proporción o en la fórmula de la desviación típica de la distribución de las proporciones muestrales (T2, p.290), al contrario que en Ortiz et al. (2016) que no se presentaban.



### 4.3. Lenguaje simbólico

Una característica específica de la matemática es el uso del lenguaje simbólico, que supone una gran precisión y economía al indicar las operaciones con diferentes objetos matemáticos. En los tres textos se muestra la gran riqueza y complejidad del lenguaje simbólico, como en el trabajo de Ortiz et al. (2016), pero con mayor complejidad, indicador del alto grado de formalización que se pretende alcancen los estudiantes del bachillerato y del nivel de algebrización requerido en el trabajo con el tema. En los tres textos, en primer lugar, aparecen los símbolos que corresponden a las operaciones aritméticas, igualdades y desigualdades, tanto en el cálculo de diversos estadísticos, como en la tipificación de los valores utilizando su media y desviación típica. En este caso, las operaciones son simplemente aritméticas y supone un bajo nivel de algebrización 1 o 2 (Godino et al., 2014), según el grado de generalidad que se dé a las operaciones y resultados.

Otro segundo tipo de símbolos que diferencian a los estadísticos (como la *media muestral*  $\bar{x}$ ) y (la *media poblacional*  $\mu$ ), lo que indica que se está trabajando con *parámetros*, y se considera un nivel de algebrización 4 según Godino et al. (2015), mientras en los niveles anteriores se utilizan únicamente variables, funciones e incógnitas. Hacemos notar que la tipificación supone, adicionalmente un trabajo a nivel de algebrización 5, según Godino et al. (2015), pues los parámetros se emplean dentro de operaciones. En el siguiente ejemplo, se opera con la proporción muestral, que es un estimador del parámetro poblacional, para tipificar la variable.

$$"P [p \in (pr - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}, pr + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}] = 1 - \alpha" \text{ (T1, p.314)}$$

La notación conjuntista se presenta en todos los textos excepto en [T3] en dos formas diferentes: por un lado, el símbolo de inclusión de una serie  $\{ \}$  sirve para presentar los elementos de un conjunto, como en el caso de: "*Si*  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  *es una muestra*" (T2, p. 290). Por otro lado, el símbolo de pertenencia  $\in$ , aunque también es un símbolo de inclusión, suele servir para expresar la probabilidad de que un parámetro pertenezca a un intervalo de confianza, con nivel de confianza dado  $(1-\alpha)$ , como se ve en el ejemplo anterior. Nótese la complejidad de esta expresión que combina operaciones con parámetros, pertenencia a un intervalo y expresión de una probabilidad. Además, no se diferencia claramente la proporción poblacional y muestral en la fórmula, lo que puede inducir conflictos semióticos en los estudiantes que, con frecuencia confunden estos dos conceptos (Schuyten, 1991). Así pues, si consideramos el valor de  $p$  como proporción muestral y el valor de  $pr$  como parámetro poblacional, la fórmula correcta sería la siguiente: " $P [pr \in (p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}] = 1 - \alpha$ "

El símbolo de equivalencia  $\sim$  se emplea para indicar que una distribución binomial se aproxima a una normal " $B(n, p) \sim N(np, \sqrt{npq})$ " (T1, p.312), lo cual de nuevo puede confundir al estudiante, que encuentra este símbolo como sinónimo de igualdad en otros temas matemáticos. Por supuesto la convergencia no implica igualdad, ya que el límite solo se alcanza teóricamente. Otra simbolización es el uso del símbolo  $\equiv$  para indicar que la distribución de la proporción muestral  $\hat{P}$  sigue una distribución normal (T2, p. 290) y los símbolos de implicación suelen indicar cálculos encadenados.

En la Tabla 2 resumimos los resultados del análisis de esta variable, observando diferencias entre los textos, predominando el lenguaje conjuntista en los textos [T1] y [T2]. Es muy amplia la presencia de símbolos en todos los textos, aunque no siempre con el rigor adecuado e indicando una complejidad algebraica muy alta del tema.

Tipo	[T1]	[T2]	[T3]
Igualdad y desigualdad ( $=, <$ )	X	X	X
Operaciones aritméticas	X	X	X
Conjuntos ( $\in$ )	X	X	
( $\equiv$ )		X	
( $\sim$ )	X		X
Implicación	X	X	X
Sumatoria			X
Símbolos literales	X	X	X

Tabla 2. Tipos de símbolos y operaciones incluidos en los libros de texto.

#### 4.4. Lenguaje tabular

La representación tabular es frecuentemente empleada en estadística, tanto para registrar y organizar los datos, como ayuda de cálculo y para resumir una distribución. A pesar de su aparente sencillez, el trabajo con diferentes tipos de tablas también implica distintos tipos de algebrización, debido al número de objetos matemáticos involucrados en su interpretación (Pallauta, Gea y Batanero, 2020). El empleo de lenguaje tabular es muy escaso en este tema de estimación de la proporción. El único texto que presenta dos tablas es el [T1]: La primera es una tabla que resume una serie de niveles de confianza dados y los intervalos de confianza obtenidos en un problema (Figura 1.a). Se trata en este caso simplemente de una tabla de resumen de cálculos. La segunda tabla presenta un conjunto de datos de diferentes proporciones en la población y tamaño de la muestra (Figura 1.b), también como datos de un problema. Ambas tablas aparecen en la sección de ejercicios y se trata de tablas de muy bajo nivel de algebrización, ya que son tablas de datos. En los otros dos textos hay algunas tablas, pero ninguna específica de estimación de la proporción. Destacar que la presencia de tablas es casi nula, al contrario que en Ortiz et al. (2016), donde sí se encontró una gran variedad de lenguaje tabular.

RESUMEN							
NIVEL DE CONFIANZA	INTERVALO DE CONFIANZA	a)	b)	c)	d)	e)	f)
a) 90 %	(0,54; 0,70)						
b) 95 %	(0,525; 0,715)						
c) 99 %	(0,495; 0,745)						

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
PROPORCIÓN, $p$ , EN LA POBLACIÓN	0,5	0,6	0,8	0,1	0,05	0,15
TAMAÑO, $n$ , DE LA MUESTRA	10	20	30	50	100	100

a. Tablas de resultados (T1, p.317)

b. Tabla de datos (T1, p.320)

Figura 1. Ejemplos de tablas en los textos analizados, tomados de Colera, Oliveira y Colera (2016).

#### 4.5. Lenguaje gráfico

Se ha analizado igualmente el tipo de gráficos empleados en el tema, debido a la importancia que las representaciones gráficas tienen para ayudar a los estudiantes al reconocimiento de los conceptos introducidos (Cooper y Shore, 2010). Las gráficas de la normal, de la binomial y sobre la aproximación de la distribución binomial a la normal aparecen en los tres textos, aunque en [T2] y [T3] en un capítulo previo al de la estimación de la proporción, que introduce estas dos distribuciones que posteriormente se utilizarán en inferencia. Específicamente sobre la estimación de la proporción, solo hemos encontrado dos gráficas en los textos analizados. En el texto [T1] se representa para un ejemplo, la determinación del intervalo de confianza para la proporción, con un nivel de confianza (1-

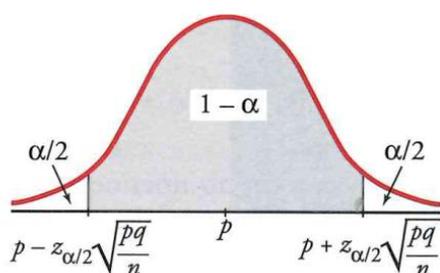


## Analizando el lenguaje asociado a la estimación de la proporción en libros de texto de bachillerato

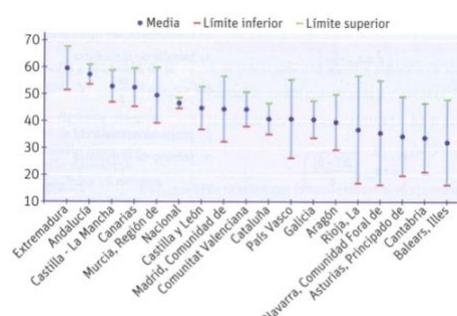
J. J. Ortiz de Haro y F. Castro Lugo

$\alpha$ ) construido con una muestra de tamaño  $n$  (Figura 2.a). Dicha gráfica representa la función de densidad de la distribución normal, en la cual se ha sombreado las áreas centrales (probabilidad igual a  $1 - \alpha$ ) y extremas (probabilidad  $\alpha/2$  cada una) para destacar el significado del nivel de confianza. Se añaden una serie de símbolos para representar como áreas estas probabilidades y las operaciones necesarias para calcular los extremos del intervalo.

Por otro lado, en el texto [T3], en la sección de aplicaciones, se presenta una gráfica donde se muestra el intervalo de confianza para la proporción poblacional de parados en las diferentes comunidades autónomas durante el tercer trimestre de 2015 (Figura 2.b). En dichos intervalos se marca con un punto el valor de la proporción de parados en cada autonomía. Hacemos notar que, aunque el nivel de confianza es siempre el mismo, no lo es el ancho del intervalo, lo que se debe a que la varianza de la proporción muestral depende del valor de dicha proporción que es diferente en cada comunidad.



a. Intervalo de confianza proporción (T1, p. 314)



b) Intervalos de confianza (T3, p. 327)

**Figura 2.** Ejemplos de gráficos en los textos, tomados de Colera y cols. (2016) y de Sanz y cols. (2016).

En la Tabla 3 se observan algunas diferencias entre los libros de texto.

Tipo	[T1]	[T2]	[T3]
<b>Diagrama de barras</b>	X		X
<b>Diagrama de barras agrupados</b>			X
<b>Gráfica binomial</b>	X	X	X
<b>Gráfica normal</b>	X	X	X
<b>Aproximación binomial por normal</b>	X	X	X
<b>Gráfico intervalos de confianza</b>	X	X	X
<b>Fotos matemáticos</b>	X		X
<b>Fotos e imágenes</b>	X	X	X

**Tabla 3.** Tipos de gráficos incluidos en los libros de texto.

El texto [T3] es el que presenta una mayor variedad de lenguaje gráfico, el libro [T1] presenta los mismos gráficos excepto el diagrama de barras agrupado y ya con menor variedad está el [T2]. En resumen, son pocas las gráficas utilizadas para apoyar la comprensión de la estimación de la proporción. En este sentido, el empleo de gráficas disminuye con respecto al estudio de la probabilidad en textos de niveles inferiores (Ortiz et al., 2016). Sin embargo, los gráficos utilizados son de mayor complejidad, como es esperable en este nivel educativo.

## 5. Conclusiones

Los resultados, aunque en modo exploratorio, muestran la gran riqueza y diversidad de lenguaje en los textos analizados, y, detrás de esta diversidad, la variedad de objetos matemáticos involucrados en el trabajo con la estimación de la proporción e incluso el alto razonamiento algebraico requerido en algunas partes del tema, como la tipificación. Resaltamos también la formalización del lenguaje, que se pone de manifiesto en el mayor número de expresiones verbales específicas de la estadística y probabilidad, que cotidianas o sobre juegos azar respecto al estudio de Ortiz et al. (2016) y también como se ha comentado en el complejo lenguaje simbólico. Es importante que el profesor tenga en cuenta esta complejidad, para valorar la dificultad que supone para los alumnos y estar alerta de posibles conflictos semióticos, como los que hemos señalado en nuestro análisis. Como también ocurrió en el trabajo Ortiz et al. (2001), a esta dificultad se añade el uso de algunas palabras del lenguaje cotidiano, con significado diferente al cotidiano e incluso al de otras partes de la matemática, en este tema.

Para que los estudiantes consoliden un lenguaje matemático más avanzado, los profesores deben cuidar el lenguaje formal que se utiliza en el aula así como vigilar el lenguaje utilizado en los libros de texto utilizados en clase, evitando las definiciones incompletas o incorrectas que no se corresponden con el significado matemático y que pueden generar obstáculos en el aprendizaje del alumnado (García y García, 2009). Dada la importancia del tema se considera necesario ampliar el estudio con otros textos, lo que se piensa hacer en investigaciones futuras.

## Agradecimientos

Proyecto PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033 y Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

## Bibliografía

- Barwell, R. (2005). Ambiguity in the mathematics classroom. *Language and Education*, 19(2), 118-126.
- Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education* (pp. 57-69). Springer, Dordrecht.
- Cooper, L. L. y Shore, F. S. (2010). The effects of data and graph type on concepts and visualizations of variability. *Journal of Statistics Education*, 18(2), 1-16. DOI:10.1080/10691898.2010.11889487.
- Dunn, P. K., Carey, M. D., Richardson, A. M. y McDonald, C. (2016). Learning the language of statistics: Challenges and teaching approaches. *Statistics Education Research Journal*, 15(1), 8-27.
- Herbel-Eisenmann, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the "voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(4), 344-369.
- García, I. y García, J. A. (2009). Enseñanza de la estadística y lenguaje: un estudio en bachillerato. *Educación Matemática*, 21(3), 95-126.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.



- Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 32(1), 199-219.
- Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L. P., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117 -142
- Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión*, 35, 75-91.
- Kaplan, J. J., Rogness, N. T. y Fisher, D. G. (2012). Lexical ambiguity: Making a case against spread. *Teaching Statistics*, 34(2), 56-60.
- MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deportes.
- Ortiz, J. J., Albanese, V. y Serrano, L. (2016). El lenguaje de la estadística y probabilidad en libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 397-406). Málaga: SEIEM.
- Ortiz, J. J., Serrano, L., Batanero, C. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma*, 38, 5-14.
- Pallauta, J. D., Gea, M. M. y Batanero, C. (2020). Un análisis semiótico del objeto tabla estadística en libros de texto chilenos. *Zetetiké*, 28, 1-18, e020001.
- Schleppegrell, M. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading and Writing Quarterly*, 23, 139-159.
- Schuyten, G. (1991). Statistical thinking in psychology and education. En D. Vere-Jones (Ed.) *Proceeding of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 486-490). Otago, Nueva Zelanda: International Statistical Institute).
- Shuard, H. y Rothery, A. (Eds.). (1984). *Children reading mathematics*. London: Murray.
- Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical thinking and learning*, 11(4), 258-288.

**ANEXO: Textos empleados en el análisis.**

- [T1]. Colera, J., Oliveira, M. J., Colera, R. (2016). *Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales II.2º Bachillerato*. Madrid: Anaya.
- [T2]. Gámez, J., Marín, S., Martín, A., Pérez, C. y Sánchez, D. (2016). *Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales II. 2º Bachillerato*. Madrid: Santillana.
- [T3]. Sanz, L., Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M. y Serrano, E. (2016). *Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales II. 2º Bachillerato*. Madrid: SM.

**Juan Jesús Ortiz de Haro.** Facultad de Ciencias de la Educación y del Deporte, Universidad de Granada, es doctor en Matemáticas. Su línea de investigación es la Educación Estadística, tema sobre el que ha codirigido una tesis y tiene numerosas publicaciones en revistas internacionales y nacionales y en actas de congresos internacionales y nacionales. Email: [jortiz@ugr.es](mailto:jortiz@ugr.es)

**Felipe de Jesús Castro Lugo.** Instituto Tecnológico de Sonora, México. Es Ingeniero Industrial por el Instituto Tecnológico de Sonora y Maestría en Ciencias con especialidad en Matemáticas Educativa por la Universidad de Sonora. Está realizando su tesis en la Universidad de Granada. Ha publicado en revistas internacionales y en actas de congresos nacionales e internacionales. Email: [felipe.castro@itson.edu.mx](mailto:felipe.castro@itson.edu.mx)