UN INTERESANTE CASO PARTICULAR DEL MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES

Juan Carlos Cortés López
Gema Calbo Sanjuán

Juan Carlos Cortés López, Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia
Gema Calbo Sanjuán, Departamento de Matemáticas
I.E.S. Els Évols. L'Alcúdia (Valencia)

RESUMEN

En el presente artículo establecemos, a partir de condiciones de integrabilidad (que en la práctica son bastante generales) una sencilla fórmula basada en la integración por partes para calcular la primitiva de una familia de funciones definida por el producto de un polinomio y una función. Los resultados que aquí presentamos resultan muy útiles en la resolución de ciertas integrales específicas de la asignatura Matemáticas II de 2º Bachillerato, las cuales además aparecen con mucha frecuencia en las pruebas de acceso a la Universidad.

1. INTRODUCCIÓN

Quienes somos docentes de Matemáticas sabemos que existen determinadas situaciones en nuestra labor, en las cuales, -bien por obligación del guión (queremos decir de la programación), o bien por qué ocultarlo, porque nos viene como anillo al dedo- nos vemos "obligados" a utilizar fórmulas matemáticas para desarrollar los contenidos.

Nosotros somos partidarios de evitar el uso de fórmulas, siempre que se pueda, pero también es cierto que con una adecuada, -si es pertinente-, deducción de las mismas, podemos evitar razonamientos repetitivos y rutinarios, que nos regalan la posibilidad de ganar ese tiempo precioso que demandamos los actuales docentes de Matemáticas en cualquier nivel educativo, no para dar más temario, sino para impartirlo mejor. Cuando toda esta situación se da, creemos que merece la pena explotar el uso de las fórmulas. Esto tiene especial interés, en un curso terminal como el último curso de Bachillerato, donde, de momento, el tiempo apremia por la consabida Prueba de Acceso a la Universidad.

Lo que sigue de trabajo, pretende aportar una alternativa al desarrollo completo del método de integración por partes, que utilizamos tanto nosotros como nuestros alumnos, cada vez que tenemos que calcular un determinado tipo de integrales (que por otro lado, son utilizadas comúnmente en la labor docente en el último curso de bachillerato). Esta propuesta es susceptible de ser aprovechada para romper rutinas y ganar en tiempo creativo.

Desarrollaremos el trabajo, del mismo modo en que los autores lo hemos llevado al aula, para facilitar su posterior aprovechamiento.

2. EL MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES: AUTOMATIZACIÓN DE UN CASO PARTICULAR MUY FRECUENTE

Durante el rutinario, pero obligado (¿?) ejercicio de calcular primitivas a través del método de integración por partes en 2º B.C.N.S. (Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud) observamos una sencilla cadencia a partir de unos cuantos ejemplos que habíamos propuesto a nuestros alumnos:

$$\int \underline{x} \cdot \underline{\underline{\cos x}}\, dx = \underline{x} \cdot \underline{\underline{senx}} - \underline{1} \cdot \underline{\underline{(-\cos x)}} = xsenx + \cos x + C$$

$$\int \underline{x} \cdot \underline{\underline{e^x}}\, dx = \underline{x} \cdot \underline{\underline{e^x}} - \underline{1} \cdot \underline{\underline{e^x}} = (x-1)e^x + C$$

$$\int \underline{x^2} \cdot \underline{\underline{e^x}}\, dx = \underline{x^2} \cdot \underline{\underline{e^x}} - \underline{2x} \cdot \underline{\underline{e^x}} + \underline{2} \cdot \underline{\underline{e^x}} = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

$$\int \underline{x^2} \cdot \underline{\underline{\cos x}}\, dx = \underline{x^2} \cdot \underline{\underline{senx}} - \underline{2x} \cdot \underline{\underline{(-\cos x)}} + \underline{2} \cdot \underline{\underline{(-senx)}} = (x^2 - 2)senx + 2x\cos x + C.$$

Unos cuantos ejemplos más bastaron para formular una buena conjetura (que esperamos que el lector atento ya haya encontrado):

$$\int x^n f(x)dx = x^n f^{-(1)}(x) - nx^{n-1} f^{-(2)}(x) + \ldots + (-1)^n n!\, f^{-(n+1)}(x) + C \qquad \textbf{(1)}$$

donde $f^{-(k)}(x), k \geq 1$ denota la operación de integrar k veces la función $f(x)$. Así por ejemplo, si $f(x)=e^{3x}$ entonces:

$$f^{-(1)}(x) = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C, \ldots, f^{-(i)}(x) = \int \frac{1}{3^{i-1}} e^{3x} dx = \frac{1}{3^i} e^{3x} + C, \quad i \geq 1 .$$

Pero antes de intentar probar (1) observemos que si en lugar de x^n, ponemos un polinomio genérico, $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ el resultado también es válido:

$$\int (x^2 - 5x + 6)\cos x dx = (x^2 - 5x + 6)senx - (2x - 5)(-\cos x) + 2(-senx) + C$$

$$\int (5x^2 - 2x - 1)e^x dx = (5x^2 - 2x - 1)e^x - (10x - 2)e^x + 10e^x + C.$$

Por lo que enunciamos la siguiente conjetura, más general que la anterior:

$$\int p_n(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k p_n^{(k)}(x)f^{-(k+1)}(x)\,, \qquad \textbf{(2)}$$

es decir:

$$\int p_n(x)f(x)dx = p_n(x)f^{-(1)}(x) - p_n^{(1)}(x)f^{-(2)}(x) + \ldots + (-1)^n p_n^{(n)}(x)f^{-(n+1)}(x),$$

donde $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, y $f(x)$ es una función $n+1$ veces integrable en el sentido especificado anteriormente, y ahora $p_n^{(k)}(x)$ denota la derivada de orden k del polinomio $p_n(x)$.

Para la demostración de (2) utilizaremos la conocida fórmula de integración por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du\,.$$

Utilizando la notación $f^{(k)}(x)$ antes introducida, se tiene:

$$\int p_n(x)f(x)dx = \begin{Bmatrix} u = p_n(x) & \Rightarrow & du = p_n^{(1)}(x)dx \\ dv = f(x)dx & \Rightarrow & v = f^{-(1)}(x) \end{Bmatrix}$$

$$= p_n(x)f^{-(1)}(x) - \int p_n^{(1)}(x)f^{-(1)}(x)dx = \begin{Bmatrix} u = p_n^{(1)}(x) & \Rightarrow & du = p_n^{(2)}(x)dx \\ dv = f^{-(1)}(x)dx & \Rightarrow & v = f^{-(2)}(x) \end{Bmatrix}$$

$$= p_n(x)f^{-(1)}(x) - \left(p_n^{(1)}(x)f^{-(2)}(x) - \int p_n^{(2)}(x)f^{-(2)}(x)dx\right)$$

$$= p_n(x)f^{-(1)}(x) - p_n^{(1)}(x)f^{-(2)}(x) + \int p_n^{(2)}(x)f^{-(2)}(x)dx$$

$$= \begin{Bmatrix} u = p_n^{(2)}(x) & \Rightarrow & du = p_n^{(3)}(x)dx \\ dv = f^{-(2)}dx & \Rightarrow & v = f^{-(3)}(x) \end{Bmatrix}$$

$$= p_n(x)f^{-(1)}(x) - p_n^{(1)}(x)f^{-(2)}(x) + p_n^{(2)}(x)f^{-(3)}(x) - \int p_n^{(3)}(x)f^{-(3)}(x)dx = \cdots$$

reiterando este proceso $n+1$ veces, y considerando que la integral que aparecerá en el paso $n+1$ será:

$$\int p_n^{(n+1)}(x)f^{-(n+1)}(x)dx = 0 \quad ,$$

ya que, $p_n^{(n+1)}(x)=0$ (al ser $p_n(x)$ un polinomio de grado n), se deduce (2).

Desde el punto de vista práctico, la fórmula (2) tiene dos cualidades excelentes: es fácil de recordar y es muy sencilla de aplicar. Para manifestar esta última característica, a continuación la aplicaremos para resolver de un modo inmediato dos ejercicios aparecidos en las últimas convocatorias de la P.A.U (Prueba de Acceso a la Universidad):

$$\int (3x^2 - 5x + 4)e^{5x}dx = (3x^2 - 5x + 4)\left(\frac{1}{5}e^{5x}\right) - (6x - 5)\left(\frac{1}{25}e^{5x}\right) + 6\left(\frac{1}{125}e^{5x}\right) + C$$

$$\int 5x^2\, cos(x+3)dx = 5x^2\, sen(x+3) - 10x\,(-cos(x+3)) + 10(-sen(x+3)) + C.$$

Para comprender mejor la potencia práctica del método que proponemos, sugerimos al lector que calcule las integrales anteriores por el método usual, esto es, aplicando el método de integración por partes tantas veces como sea necesario.

3. CONCLUSIONES

Como se ha subrayado anteriormente, nosotros no somos partidarios de que nuestros alumnos utilicen sistemáticamente fórmulas, como si de recetas culinarias se tratasen, y desde luego la aplicación de esta fórmula de integración por partes que proponemos, puede parecer que invita a este tipo prácticas. Sin embargo , creemos que su utilización, después de su sencilla deducción en el aula, tiene el mismo carácter que cualquiera de los usos que los alumnos de este nivel educativo le dan -porque nosotros así se lo enseñamos- a las fórmulas geométricas para calcular distancias, ángulos, etc, entre rectas y planos. Además del considerable ahorro de tiempo en el cálculo de integrales que acaban siendo rutinarias para el alumno, pensemos que este método permite comprobar de un modo sencillo los resultados que obtienen al aplicar el método “usual” de integración por partes, lo cual pensamos es en sí mismo valioso.