¿QUÉ HACEN Y QUÉ ENTIENDEN LOS ESTUDIANTES Y PROFESORES DE FÍSICA CUANDO USAN EXPRESIONES DIFERENCIALES?

López-Gay, Rafael[1] y Martínez Torregrosa, Joaquín[2]
[1] IES Nicolás Salmerón y Alonso. C/ Celia Viñas, s/n. 04007 Almería
[2] Departamento de Didáctica General y Didácticas Específicas. Universidad de Alicante
rlucio@ual.es
joaquin.martinez@ua.es

Resumen. En un trabajo previo realizamos una clarificación del uso del cálculo diferencial y determinamos un conjunto de indicadores de lo que sería una adecuada comprensión del concepto de *diferencial* en la física. Guiados por las conclusiones de ese trabajo, presentamos ahora el análisis que hemos realizado de la enseñanza habitual, más concretamente sobre lo que hacen y entienden los estudiantes y profesores cuando usan el cálculo diferencial en las aplicaciones físicas. Después de enunciar y fundamentar la hipótesis de partida, y de presentar el diseño experimental elaborado para someterla a prueba, se muestran y discuten los resultados más importantes que hemos obtenido al aplicar ese diseño con una amplia muestra de profesores de bachillerato y estudiantes de bachillerato y universidad. Esos resultados confirman la ausencia de todos los indicadores de comprensión de la diferencial, poniendo de manifiesto el uso meramente algorítmico del cálculo y las consecuencias negativas que ello tiene para el aprendizaje de la física.

Palabras clave. Cálculo diferencial, física y matemáticas, ideas de los profesores, ideas de los estudiantes, actitudes, análisis de la enseñanza.

What do physics teachers and students do and understand when they use differential expressions?

Summary. One of our previous works explained the use of differential calculus and determined a series of indicators of what could be considered as the appropriate understanding of the concept of differential in physics. Following the conclusions reached in the aforesaid work, this article now analyses common teaching, and more precisely what teachers and students do and understand when applying differential calculus in physics. The present work exposes and justifies our first hypothesis and presents the experimental design elaborated to test it, and then puts forward the most relevant results registered when applying that design on a large sample of secondary school teachers and secondary school and university students. Attained results prove the absence of all understanding indicators of the differential and highlight the merely logarithmical use made of calculus, as well as the negative impact it has on learning physics.

Keywords. Differential calculus, physics and mathematics, teachers'ideas, students'ideas, attitudes, analysis of teaching.

INTRODUCCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El cálculo diferencial empieza a usarse en la enseñanza de la física desde el bachillerato y se hace imprescindible en los cursos universitarios. Sin embargo, según nuestra experiencia docente, en ninguno de esos cursos se proporciona una verdadera comprensión de lo que se hace y por qué se hace cuando se usa el cálculo, provocando con ello importantes deficiencias y dificultades matemáticas que contribuyen a crear barreras para comprender la física y abordarla con una actitud positiva (Steinberg et al., 1996).

Aunque la enseñanza del cálculo diferencial ha merecido la atención de diversos investigadores en educación matemática, el problema de su introducción y utilización *en el contexto de la física* ha sido escasamente abordado, siendo obligado destacar el trabajo de un equipo pluridisciplinar y de nivel universitario sobre el concepto de *diferencial* (Artigue, 1986; Artigue y Viennot, 1987; Groupe Didactique du CNRS, 1989). Se echa en falta un estudio global sobre la introducción y el uso del cálculo diferencial en la enseñanza de la física, desde los primeros momentos en que se realiza, destinado a conocer la situación actual, las causas y consecuencias de las posibles deficiencias, así como a buscar posibilidades de mejora.

El trabajo que venimos realizando durante los últimos años pretende completar este vacío, pero… ¿en qué aspectos centrar nuestro análisis?, ¿qué debe entenderse por comprender y usar bien el cálculo en las aplicaciones físicas?, ¿qué aspectos debemos considerar indicadores de una adecuada comprensión? Existe tal grado de confusión en torno al uso del cálculo diferencial que ha sido necesario realizar previamente un estudio histórico y epistemológico que nos permita comprender los obstáculos que existen en la enseñanza y, al mismo tiempo, clarificar conceptualmente el significado de todo lo que se hace cuando se usa el cálculo diferencial. Teniendo en cuenta nuestro interés en el contexto físico, hemos tomado como punto de partida el concepto de *diferencial*, pero la clarificación realizada alcanza al conjunto del cálculo. Los resultados de ese estudio han sido presentados ya en otros trabajos (López-Gay et al., 2001, 2002; López-Gay, 2002; Martínez Torregrosa et al., 2002), cuyas conclusiones más importantes pasamos a resumir brevemente.

Hemos identificado dos concepciones históricas: la diferencial de Leibniz (s. XVII, aproximación infinitesimal) y la diferencial de Cauchy (s. XIX, instrumento formal subsidiario de la derivada). Y hemos constatado la incapacidad de ambas para clarificar el uso del cálculo en la física.

Una tercera concepción, la diferencial de Fréchet (s. XX, estimación lineal tangente) (Artigue, 1989, p. 34), pone el acento sobre lo que Dieudonné (1960, p. 145) considera la idea fundamental del cálculo: «la aproximación local de funciones por medio de funciones lineales». Hemos tomado esta concepción como punto de partida para realizar la clarificación buscada, cuya característica más relevante ha sido su *estructura problematizada*, dando respuesta a las siguientes preguntas: ¿cuál es el problema general que hace necesaria la diferencial en las aplicaciones físicas?, ¿qué estrategia utiliza el cálculo para resolver ese problema?, ¿cuál es el significado de los conceptos en los que se apoya dicha estrategia? (Cuadro 1).

Cuadro 1

Resumen de la clarificación del uso del cálculo diferencial en situaciones físicas. (Martínez Torregrosa et al., 2002)

1. ¿Cuál es el problema que hace necesario recurrir al cálculo diferencial? Encontrar la expresión *en forma de función* que relaciona dos magnitudes físicas: x e y, obteniendo así la *función incógnita*: $y(x)$. Si se conoce una condición inicial: $y(x_1) = y_1$, el problema es equivalente a averiguar el Δy producido por un cambio de variable desde x_1 hasta $x_1+\Delta x$.

2. ¿Qué estrategia utiliza el cálculo para hallar la relación funcional entre Δy y Δx?

2.1. Realizar una estimación del valor de Δy a partir de x_1, y para un incremento Δx, suponiendo que la función tiene un comportamiento lineal a partir de x_1 y en todo el intervalo Δx (¡que puede ser tan grande como se quiera!). Representaremos esta estimación lineal por $dy = k\cdot\Delta x$ (donde k es constante desde x_1 hasta $x_1 + \Delta x$).

2.2. El error cometido al realizar esta estimación ($\Delta y - dy = \Delta y - k\cdot\Delta x$) dependerá del valor de Δx (*en general*, para un valor dado de k, el error será menor cuanto menor sea Δx) y del valor de k (que puede ser cualquiera, es decir, es posible cualquier pendiente de la recta).

Podemos, pues, mejorar la aproximación al Δy dividiendo el intervalo Δx en N subintervalos, de valor: $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, calculando una estimación lineal del Δy_i correspondiente ($dy_i = k_i\cdot\Delta x_i$) ($k_i$ se mantiene constante entre x_i y $x_i+\Delta x_i$), y sumando las estimaciones lineales parciales para obtener una estimación total: $\Delta y\approx\sum dy_i$. Si el error cometido en cada subintervalo es $\varepsilon_i=\Delta y_i-dy_i=\Delta y_i-k(x_i)\cdot\Delta x_i$, tendremos:

$$\Delta y=\sum_{i=1}^{N}\Delta y_i=\sum_{i=1}^{N}(dy_i+\varepsilon_i)=\sum_{i=1}^{N}dy_i+(\text{error total})=\sum_{i=1}^{N}k(x_i)\cdot\Delta x_i+(\text{error total}).$$

La *calidad* de esa aproximación aumenta disminuyendo el valor de cada Δx_i, es decir, aumentando el valor de N. Para poder realizar la estimación para cualquier N, hemos de disponer de un valor de k para cada x, pasando así de un conjunto discreto de k_i a una función: $k(x)$. La calidad de la aproximación dependerá del valor de N y de la $k(x)$ elegida.

2.3. Cambiando el valor de N se obtiene una serie de estimaciones totales del Δy, y una serie de errores totales. El límite de la serie de estimaciones, cuando $N\rightarrow\infty$, será exactamente Δy si, y sólo si, el límite de la serie de errores totales, cuando $N\rightarrow\infty$, es cero. Es decir:

$$\underset{N\to\infty}{\text{lím}}\sum_{i=1}^{N}dy_i=\underset{N\to\infty}{\text{lím}}\,k(x_i)\cdot\Delta x_i=\Delta y_i \qquad \text{si, y sólo si:} \qquad \underset{N\to\infty}{\text{lím}}\sum\varepsilon_i=0.$$

Esto no ocurrirá *necesariamente* para cualquier función $k(x)$, aunque $\Delta x_i\rightarrow 0$ (éste era el error que llevaba a resultados absurdos en la concepción de Leibniz). Pero, ***si podemos*** encontrar la función $k(x)$ que hace que eso ocurra, el problema quedará resuelto: habremos obtenido la función incógnita $y = f(x)$ a partir del límite de una suma de estimaciones lineales de pendiente $k(x)$.

2.4. Cuando se aplica esa estrategia, se llega a la conclusión de que el error total se hace cero si y sólo si la función $k(x)$ coincide con la función derivada (y').

3. Recapitulación. Así pues, la diferencial de la magnitud y respecto a otra magnitud x es una estimación del Δy, lineal respecto al Δx: $dy = k(x)\cdot dx$. Entre las muchas estimaciones lineales posibles, la diferencial es la única que permite llegar al resultado exacto (Δy) vía integral. Para ello, la pendiente de la estimación lineal: $k(x)$, es decir, el cociente dy/dx, tiene que coincidir con la derivada: $y'(x)$.

En la mayoría de las situaciones, la expresión diferencial de partida (dy) es una hipótesis que se apoya en el análisis y el conocimiento físico de la situación. Su validez sólo puede afirmarse contrastando la de la función a la que conduce vía integral.

La clarificación realizada confirma la enorme importancia del cálculo para avanzar en la física y, en particular, la importancia clave del concepto de *diferencial* para aplicar con éxito esa estrategia y dotar de significado a los distintos conceptos. También permite identificar, cuáles serían los indicadores de una comprensión adecuada del concepto de *diferencial* en el campo de la física, sea cual sea la concepción que se utilice (Cuadro 2).

Estos indicadores de comprensión nos han servido de guía para analizar el uso del cálculo en la enseñanza habitual de la física. En este artículo presentamos el diseño experimental que hemos elaborado para realizar ese análisis y las conclusiones más relevantes que hemos obtenido, en concreto sobre lo que hacen y entienden los estudiantes y profesores cuando usan el cálculo diferencial en las aplicaciones físicas.

JUSTIFICACIÓN Y ENUNCIADO DE LA HIPÓTESIS

La información acumulada a través de nuestra experiencia docente es tan evidente, y coincidente con la de muchos compañeros, que tenemos pocas dudas sobre la extensión generalizada del tratamiento algorítmico y superficial del cálculo en los textos y apuntes, las dificultades de los alumnos cuando lo usan y la ausencia de preguntas explícitas que reflejen su interés por entenderlo bien.

La reflexión sobre esta experiencia acumulada, a la luz del estudio histórico que hemos realizado, nos conduce a creer que los estudiantes identifican la diferencial con cualquier aproximación infinitesimal y adquieren una sensación de comprensión basada en la idea intuitiva, aparentemente correcta, de que, aunque sea una aproximación, como es muy... muy pequeña, el error es *prácticamente* cero, de forma que la suma de infinitos trozos infinitamente pequeños dará como resultado el incremento exacto. Sin embargo, ya hemos mostrado (Martínez Torregrosa et al., 2002) que se trata de una idea errónea, pues el resultado exacto no se deriva del carácter infinitesimal de esos trozos sino de su carácter de estimación lineal tangente.

Pero no se trata sólo de una impresión personal: la investigación en educación matemática ha mostrado la existencia de importantes deficiencias en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo, lo que se agrava por el hecho de tratarse de un contenido de otra asignatura que se utiliza en las clases de física.

En efecto, los resultados de distintos trabajos han puesto de manifiesto la pobre comprensión conceptual de los estudiantes en la asignatura de cálculo (Artigue y Viennot, 1987; Ferrini-Mundy y Gaudard, 1992; Ferrini-Mundy y Geuther, 1991; Labraña, 2001; Orton, 1983*a*, 1983*b*; Porter y Masingila, 2000; Schneider, 1991, 1992; Tall, 1985 y 1992; Thompson, 1994) y señalan el enfoque meramente algorítmico de la enseñanza como el origen de esas deficiencias. No en vano, un amplio sector del profesorado de matemáticas y de educación matemática asumen de forma explícita una visión instrumentalista de la matemática (Moreno, 2001; Mura, 1993, 1995), visión que trasladan a sus alumnos, quienes llegan a pensar que hacer matemáticas se reduce a realizar operaciones puntuales sobre símbolos sin significado (Porter y Masingila, 2000).

El trabajo de Nagy y otros (1991) confirma el enfoque algorítmico de la enseñanza del cálculo: después de analizar las sesiones dedicadas al estudio del cálculo, incluyendo los exámenes, se observa un claro predominio de la categoría de «técnicas» en detrimento de otras categorías relacionadas con el significado de los conceptos, cuándo y por qué deben usarse, etc. El análisis de esta situación y del alarmante fracaso de los alumnos universitarios ha provocado en EEUU un movimiento de reforma del cálculo basado en un enfoque conceptual y más cercano a problemas reales, promovido por la National Sciencie Foundation (Johnson, 1995; Ostebee y Zorn, 1997).

Cuadro 2

Indicadores de una comprensión adecuada de la diferencial en la física.

1. Saber cuándo y por qué se hace necesario su uso, es decir, conocer cuál es el problema que hace insuficiente el cálculo ordinario. En concreto, saber que es necesario recurrir a la diferencial cuando queremos hallar el Δy producido en un Δx, y la relación entre Δy y Δx no es lineal ($\Delta y/\Delta x$ no es constante).

2. Conocer la estrategia que utiliza el cálculo para resolver ese problema y comprender el sentido de los distintos pasos que se recorren. En concreto:

- Saber explicar con precisión y sentido físico el significado de las expresiones diferenciales, reconocer sin ambigüedad que la diferencial puede tomar valores numéricos e interpretar el significado de los mismos.
- Conocer y justificar la relación que existe entre la diferencial ($\mathrm{d}y$) y la derivada (y'): $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, y aceptar sin ambigüedad los razonamientos en los que se utiliza esa relación.
- Conocer el significado de la integral y saber justificar el denominado *teorema fundamental*, es decir, por qué la integral definida requiere el cálculo de *antiderivadas* o funciones primitivas.
- Utilizar con sentido esa estrategia en situaciones y problemas en los que se domine el contenido físico de los mismos.

3. Ser consciente de la naturaleza hipotética, tentativa, en casi todas las situaciones físicas, de la expresión diferencial de partida, y saber que la validez de esa hipótesis no puede ser contrastada directamente sino a través del resultado al que conduce.

4. Valorar positivamente el papel de la diferencial en el aprendizaje de la física. Este componente axiológico debería ser una consecuencia natural cuando se comprende el papel crucial que juega la diferencial en el tratamiento de situaciones físicas de interés.

Esta falta de dominio y comprensión de las matemáticas que se usan en la física obliga a los estudiantes a aplicar reglas y razonamientos que no comprenden, lo que afecta, sin duda, al ámbito de sus actitudes: ansiedad, falta de confianza, rechazo, desinterés… (Aghadiuno, 1992; Lavaly, 1990; Martin y Coleman, 1994; Monk, 1994; Rice-Evans, 1994).

Por otra parte, razones históricas vienen a confirmar esta constatación de una enseñanza deficiente. La ruptura producida entre física y matemáticas en el siglo XIX, en especial en lo referente al cálculo diferencial, se mantiene en la enseñanza actual (Aghadiuno, 1992; Artigue, 1986; Artigue y Viennot, 1987; González U., 1991; Monk, 1994): el estatus y significado de los conceptos básicos (diferencial, derivada e integral) y las relaciones entre ellos no son los mismos para ambas disciplinas, lo que provocará lógicamente problemas de transferencia favoreciendo el uso de técnicas sin sentido. Se produce así la «*situación imposible*» que describe Freudenthal (1973, p. 553): «[…] que el matemático enseñe unas matemáticas que no pueden ser aplicadas y el físico aplique unas matemáticas que no pueden ser enseñadas por el matemático».

Al ser el concepto de *diferencial* un concepto alejado del interés y experiencia espontáneas de los alumnos, no tendría sentido dedicar un estudio únicamente dirigido a analizar cómo ellos lo entienden y utilizan. Desde nuestro punto de vista parece lógico suponer que las posibles deficiencias en la comprensión de la diferencial por los alumnos tienen su origen en el ámbito escolar y que, por tanto, dichas deficiencias constituirán un indicador de su enseñanza, es decir, podrán ser consideradas como un reflejo de aquello que los libros y profesores saben y dicen (Artigue y Viennot, 1987). La hipótesis, pues, desde la que hemos realizado nuestro análisis afirma:

«[…] la enseñanza habitual del concepto de diferencial (introducción y utilización del mismo) adolece de varias carencias que afectan a su comprensión por los alumnos en el contexto de la física, generando actitudes negativas hacia la física y su aprendizaje».

Las deficiencias que se presuponen en esta hipótesis no se refieren al desconocimiento de la concepción de diferencial que hemos presentado en nuestra clarificación, sino a todos y cada uno de los indicadores de una adecuada comprensión que hemos formulado en el cuadro 2.

DISEÑO EXPERIMENTAL

La metodología utilizada para someter a prueba la hipótesis se apoya en la derivación de numerosas consecuencias contrastables y en una multiplicidad de diseños experimentales, pues pensamos que, en la investigación educativa, lo más relevante es la riqueza del diseño y su potencialidad para explorar diversas facetas e implicaciones de la hipótesis. Por otra parte, en educación interesan, en general, las grandes diferencias, lo que evidentemente reduce las exigencias de tamaño de las muestras para considerar que dichas diferencias sean estadísticamente significativas (Hayman, 1981; Wilson et al., 1986). Nuestra intención no es, pues, obtener resultados representativos de toda una población sino abordar el problema con profundidad utilizando distintas formas de contrastación, con el objeto de mostrar la coherencia de los resultados obtenidos. Por supuesto, ello plantea el problema de la generabilidad que, como es lógico, hay que buscar fundamentalmente en la replicación de las investigaciones realizadas por otros autores.

El primer paso que hemos dado para someter a prueba la hipótesis ha sido descomponerla en tres grandes derivaciones. Así, la ausencia de los indicadores de una adecuada comprensión de la diferencial debería reflejarse: *a*) en los *libros de texto; b*) y *c*)en la forma de actuar, y en lo que saben y dicen *profesores* y *estudiantes*. El siguiente paso ha sido relacionar cada derivación con cada uno de los indicadores, lo que nos ha proporcionado un total de veinte consecuencias de nuestra hipótesis, que son directamente contrastables. Ya que en este artículo nos centraremos en las derivaciones referidas a estudiantes y profesores, en el anexo 1 hemos enunciado las siete consecuencias referidas a profesores y otras tantas a estudiantes.

Para contrastar las consecuencias del anexo 1 hemos diseñado una amplia variedad de instrumentos, tanto cualitativos como cuantitativos:

– *Once cuestiones* cerradas o semiabiertas, algunas comunes a estudiantes y profesores y otras específicas para cada grupo. Las cuestiones se refieren a la justificación y el significado de expresiones diferenciales, a razonamientos de uso frecuente relacionados con la derivada y la integral, o se refieren a la actitud y opinión de los entrevistados, medida mediante una escala tipo *likert*. En el anexo 2, a modo de ejemplo, se presentan dos cuestiones junto con el estadillo diseñado para analizar las respuestas.

– *Cuatro problemas* con notas aclaratorias, que deben resolver realizando comentarios cada vez que usan el cálculo diferencial. En el anexo 3 se presenta uno de estos problemas junto con el estadillo diseñado para analizar la resolución.

– *Un problema ejemplificador* que los profesores deben resolver como si estuviesen impartiendo una clase de COU o 2º de bachillerato con especial atención al uso del cálculo diferencial. El estadillo de análisis es similar al de los restantes problemas (Anexo 3).

– *Una entrevista individual semiestructurada* para estudiantes, realizada sobre la resolución de un problema –escrita por un hipotético alumno–, en la cual hemos realizado una serie de marcas numéricas. Al comienzo de la entrevista se muestra la resolución hasta la primera marca y se formulan preguntas; después se destapa hasta la segunda marca, y así sucesivamente. Las preguntas pretenden profundizar en las respuestas de los estudiantes a los cuestionarios escritos. Los extractos nos permitirán ilustrar y confirmar la interpretación de los resultados obtenidos con los otros instrumentos.

Cada consecuencia ha sido sometida a prueba con más de uno de estos instrumentos, y cada instrumento extrae información sobre más de una consecuencia, lo que ha permitido estudiar la coherencia de los resultados.

Aunque no era la base de nuestra metodología, lo dilatado en el tiempo de este trabajo nos ha proporcionado muestras de gran tamaño, lo que afianza al máximo los resultados, algo importante dada la novedad del estudio. En total, la muestra ha estado formada por 210 profesores de física de bachillerato en activo y 732 estudiantes que cursan la asignatura de física (270 de COU, 283 de 1º curso universitario, 184 de 2º a 5º curso universitario). Los profesores asistían todos a cursos de formación sobre el cálculo diferencial en la física que hemos impartido en seis provincias distintas. Para la elección de la muestra de estudiantes hemos procurado que exista suficiente diversidad tanto en el origen de los alumnos como en el profesor que imparte la asignatura, y pertenecen a seis institutos y cuatro universidades, de distintas carreras científico-técnicas. Por último, la entrevista se ha realizado con siete estudiantes de COU de *alto rendimiento*, seleccionados por sus profesores, y cuatro licenciados voluntarios que realizaban el curso de formación inicial para la docencia de la física y la química (CAP).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En lugar de presentar los resultados obtenidos con cada instrumento particular, se presentarán agrupados en torno a cada uno de los indicadores de una adecuada comprensión de la diferencial en la física. Sólo distinguiremos entre los resultados de los distintos problemas o de los distintos grupos de estudiantes cuando las diferencias entre ellos sean estadísticamente significativas. En el caso de las entrevistas, en lugar de realizar transcripciones completas, se incluirán fragmentos literales para ilustrar algunos de los resultados.

En este artículo sólo se incluyen los resultados más relevantes. Puede encontrarse una exposición completa y un análisis más exhaustivo en López-Gay (2002).

Resultados sobre cuándo y por qué es necesario usar la diferencial

Dos cuestiones cerradas y el análisis de los problemas resueltos se referían a este indicador. En la tabla 1 se muestran los resultados más importantes.

Estos resultados muestran con rotundidad la falta de comprensión de los profesores y estudiantes sobre las razones que obligan a usar expresiones diferenciales, y la falta de atención que prestan a este aspecto cuando enseñan, aunque se trate de niveles en los que se inicia el uso de cálculo. Los siguientes extractos de entrevistas ilustran esta falta de comprensión:

Extracto 1. María, profesora en formación

M: Ha convertido los incrementos en diferenciales, y no sé por qué hace ese paso. Lo que yo no entiendo es por qué un incremento directamente no lo sustituye. Ha pasado de incrementos a diferencial... No sé por qué pasa a diferenciales.

Extracto 2. Javier, profesor en formación

E: ¿Por qué pasa a diferenciales?
J: Para hacer la integral.

Resultados sobre el significado de las expresiones diferenciales

La experiencia de cualquier profesor de física le permite reconocer que la concepción de la diferencial que se utiliza es la de Leibniz, es decir, la identificación más o menos precisa entre diferencial e incremento muy pequeño (infinitesimal). Ésta es la única concepción que aparece en las respuestas a las cuestiones que hemos pasado.

Sin embargo, esta concepción no se hace explícita con la frecuencia que cabría esperar. Más del 90% de los profesores (N = 94) y de cualquier grupo de estudiantes (57 de COU, 95 de 1º curso universitario, 105 de cursos superiores) no dedica ni una sola frase a explicar el significado de las expresiones diferenciales que utilizan cuando resuelven problemas en los que se piden comentarios explicativos, y más del 59% de los profesores (N = 63) tampoco lo hace ni siquiera cuando está resolviendo el problema *ejemplificador* (tal como lo harían en una clase de COU o 2º de bachillerato).

Tabla 1
Resultados sobre cuándo y por qué es necesario usar la diferencial.

	Estudiantes % (sd)	**Profesores** % (sd)
No señalan que la razón que obliga a pasar de la expresión $\Delta v = a \cdot \Delta t$ a esta otra $dv = a \cdot dt$ (Anexo II) es que la aceleración depende del tiempo	(N = 331) 93,7 (1,3)	(N = 160) 88,8 (2,5)
No saben distinguir en qué ecuaciones del movimiento es imprescindible usar el cálculo diferencial para averiguar la rapidez instantánea (*Respuesta correcta:* ecuaciones *e-t* no lineales)	(N = 249) 87,6 (2,1)	---
No incluyen comentarios (a pesar de la petición expresa), sean correctos o incorrectos, para justificar el uso de expresiones diferenciales cuando resuelven problemas	(N = 257) 97,3 (1,0)	(N = 94) 90,4 (3,1)
No intentan justificar, sea correcta o incorrectamente, el uso de expresiones diferenciales cuando resuelven el problema *ejemplificador*, como lo harían en una clase de COU o 2º de bachillerato	---	(N = 63) 65,1 (6,1)

Podría pensarse que esta falta de explicación se debe al hábito mecánico con que se resuelven los problemas, pero las respuestas a las cuestiones que preguntan directamente por el significado de expresiones diferenciales, después de contextualizar cada una de ellas, muestran que no es sólo un hábito. En concreto, a los estudiantes se les ha preguntado por la expresión relativa a las desintegraciones nucleares $dN = -\lambda \cdot N \cdot dt$, y a los profesores, por la expresión relativa al campo magnético creado por corrientes: $dB = \mu \cdot I \cdot \text{sen}\theta / 4\pi r^2$. Tan sólo el 29% de los estudiantes (N = 122) y el 34% de los profesores (N = 44) expresan, aunque sea de forma imprecisa, la concepción de Leibniz. Como estamos convencidos del predominio de dicha concepción en la enseñanza de la física, hemos interpretado estos resultados como una muestra de la inseguridad de profesores y estudiantes, fruto de la falta de reflexión, que impide que esas concepciones se traduzcan en conocimiento declarativo: si es posible recurrir al uso de reglas, más vale no expresar algo débilmente asumido.

Los siguientes extractos de entrevistas muestran que la concepción de diferencial como cantidad infinitesimal coexiste con una actitud mecánica que se resiste a declarar o precisar tal concepción.

Extracto 3. Juan, alumno de COU de *alto rendimiento*

J: [...dm] son trocitos muy «chiquitillos» de la...
J: [...] Cada vez que usamos diferenciales, mi profesor dice: «para estudiar esta curva vamos tomando rectas tan pequeñas como queramos...».
J: No lo tengo muy claro... La verdad, yo sé hacer integrales, pero no me he quedado muy bien con lo que son las diferenciales que aparecen, lo veo escrito pero no sé lo que son... Y para qué voy a preguntar si me van a decir: «esto son los trocitos chiquititos...».

Extracto 4. Isa, alumna de COU de *alto rendimiento*

I: Yo sé que haciendo la integral se quita la *d*, pero no sé ningún significado ahora.

Por otra parte, la respuesta correcta que se desprende de la clarificación realizada, es decir, la explicación de la diferencial como estimación lineal del incremento, está prácticamente ausente en las respuestas de profesores y estudiantes.

Resultados sobre la relación entre derivada y diferencial

Aunque en matemáticas se enseña la derivada como el *límite de un cociente incremental* y se simboliza por y', en las clases de física se interpreta la derivada como un *cociente diferencial* y se simboliza por: dy/dx (interpretación esta última que, como hemos mostrado en la clarificación realizada, es una exigencia para que la diferencial conduzca al resultado exacto «vía integral»). Sin embargo, pensamos que este cambio de interpretación se produce habitualmente sin ninguna reflexión o explicación previa, de forma que se aprende a través de la repetición mecánica de reglas que responden al esquema $y' = L \Rightarrow dy = L \cdot dx$, o bien $dy = L \cdot dx \Rightarrow y' = L$, lo que llevará a usarlas en un contexto operativo pero sin comprender lo que se hace.

Hemos preparado una cuestión de opción múltiple dividida en dos partes: no se entregaba la segunda hasta haber recogido la primera. En cada parte tenían que señalar aquellas afirmaciones con las que estaban de acuerdo. En la tabla 2 se presentan los resultados de mayor interés.

En el contexto operativo de la segunda parte consideran correcta una idea que no habían considerado correcta en la primera parte. Interpretamos esta inconsistencia como un reflejo del predominio del operativismo frente a la comprensión: al enfrentarse con un razonamiento que se repite con frecuencia en los textos y clases de nivel universitario, contestan aceptando implícitamente la derivada como cociente; sin embargo, no aceptan esa misma idea cuando se les pregunta sin referencia directa a una regla mecánica.

El siguiente extracto de entrevista ilustra esta contradicción y la toma de conciencia del propio entrevistado:

Extracto 5. David, alumno de COU de *alto rendimiento*

E: ¿Puedes leer esta expresión con tus propias palabras: dm/dV =...?
D: Diferencial de masa con respecto al volumen, a la variación del volumen... No dividido entre el diferencial de volumen; no, no, eso no es así.

Tabla 2
Resultados sobre la lectura de la derivada como cociente diferencial.

	Est. 1º Univ. (N = 50) % (sd)
[1a. parte] Dada la expresión: $\mathbf{d}\boldsymbol{R}/\mathbf{d}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{z}$ «Una lectura correcta de esa expresión es: *la diferencial de R entre la diferencial de z es igual a L multiplicado por z*»…	12,0 (4,6)
[2a. parte] Dado el razonamiento: $\mathbf{d}\boldsymbol{R}/\mathbf{d}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{z}$, **despejando d*R* se obtiene:** $\mathbf{d}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{z}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{z}$ «Es un razonamiento correcto y la ecuación que se obtiene se lee: *la diferencial de R es igual a L multiplicado por z y por la diferencial de z*»	76,0 (6,0)

E: ¿Está bien despejar d*m*?
D: Pues sí, está bien
E: Pero, ¿no acabas de decir que d*m*/d*V* no es una división?
D: ¡Ah, bueno, pero eso no quiere decir nada! Eso de ahí [despejar dm...] lo verifica la división, y el producto es igual.
E: Pero entonces, ¿esta expresión es d*m* entre d*V* o no?
D: ¡Ah! ¡Ya! Ahora sí, es verdad, me has pillado. No debería, pero no sé...

Estos resultados muestran que los estudiantes usan de forma operativista y sin comprensión la relación entre diferencial y derivada.

Resultados sobre la integral y su cálculo mediante *antiderivadas*

Nuestra experiencia docente nos ha mostrado que, en las clases y textos de física, se identifica la integral con una *suma de muchos términos*, una versión poco rigurosa de la *integral de Riemann* en la que no se destaca suficientemente que, en realidad, *es el límite* de una serie de sumas, y *no es* ninguno de los términos de esa serie. Sin embargo, cuando hemos analizado los problemas resueltos por profesores y estudiantes –desde COU hasta los últimos cursos universitarios–, sólo en casos aislados intentan explicitar esta concepción de integral, y sólo el 50% de los profesores lo intenta cuando resuelve un problema *ejemplificador* en situación de clase. Igual que al discutir los resultados sobre el significado de la diferencial, hemos interpretado esta ausencia como un reflejo del uso operativo del cálculo, poco preocupado por el significado de lo que se está haciendo.

¿Por qué esa *suma de muchos términos* se calcula mediante la técnica inversa a la del cálculo de derivadas? Ningún estudiante ni profesor consigue argumentar una respuesta, ya sea resolviendo problemas o en el problema *ejemplificador* en situación de clase. Tampoco lo hacen al contestar a una cuestión en la que se les planteaba directamente esa misma pregunta (Anexo 2); en el mejor de los casos, un porcentaje inferior al 9% de profesores ($N = 34$) llega a identificar el producto $f(x)\cdot dx$ con dP, cuando aún quedaría por demostrar que la integral de dP es precisamente ΔP.

El argumento más frecuente –y erróneo– que, según nuestra experiencia docente, se utiliza para justificar esa igualdad ($\int dP = \Delta P$) consiste en afirmar que *la suma de muchos incrementos muy pequeños (aproximados) acabará dando un incremento exacto*. Este argumento se apoya en la concepción de Leibniz de la diferencial, y constituye un razonamiento prototípico erróneo pero que intuitivamente parece correcto. Se trata de suponer que, si la diferencial es un incremento aproximado de valor infinitesimal, la suma de infinitos trozos infinitesimales dará lugar al incremento macroscópico de la función, desapareciendo el carácter de aproximación, sin importar la forma de dichos trozos infinitesimales. Esta creencia, tan fácil de materializar para nuestra mente, es la que, posiblemente, produzca la *sensación de comprensión* de alumnos y profesores, aunque, como le ocurrió al propio Leibniz, vaya acompañada también de una *sensación de inseguridad*.

Así pues, los resultados que hemos obtenido nos permiten afirmar que profesores y estudiantes utilizan la integral en las clases de física como *suma de muchos términos*, aunque la actitud fuertemente operativista oculta esta idea bajo un conjunto de algoritmos. Además, no saben por qué el cálculo de esas *sumas* se realiza mediante reglas inversas a las de derivación. Los siguientes extractos de entrevistas ilustran esta afirmación:

Extracto 6. Javier, profesor en formación

J: Una integral es una suma de diferenciales, suma de todas las pequeñas masas...
E: [Después de mostrarle la resolución de la integral] ¿Por qué sale este resultado?
J: Por la fórmula.
E: ¿Por qué el cálculo de una suma se realiza con esa fórmula?
J: Había algo de una inversa de la derivada...
E: ¿Por qué la suma de muchas cosas se reduce al cálculo de la inversa de la derivada?
J: Nunca he sabido por qué.

Extracto 7. David, alumno de COU de *alto rendimiento*

E: ¿Qué significa esa integral? [Le señala: ∫dm]
D: Estamos sumando cosas pequeñas... esa cosa pequeña que es la diferencial.
E: [Después de mostrarle el resultado de la integral] ¿Por qué para calcular la integral busco algo que al derivar me da el integrando? ¿Por qué la suma de muchos $h\cdot dh$ es algo que al derivarlo me da h?
D: La pregunta la entiendo, yo la respuesta la tengo clara pero no tengo ningún argumento teórico, no sé explicarlo sino que es un «mecanicismo».
E: ¿Qué relación hay entre el concepto de *suma* y esa regla mecánica que tú dices?
D: No sé decirlo, no sé...

Extracto 8. Juan, alumno de COU de *alto rendimiento*

E: Pero, ¿por qué?
J: No lo sé, porque son así las matemáticas. No sé lo que es una integral, pero sé resolverla.

Resultados sobre el uso sin sentido del cálculo, como aplicación mecánica de reglas

Los resultados que se han presentado hasta aquí muestran con claridad que el uso del cálculo se limita a la aplicación mecánica de reglas. El análisis de los problemas resueltos por profesores y estudiantes (Tabla 3), con la petición expresa de comentarios y aclaraciones, muestra la ausencia generalizada de explicaciones o justificaciones, sean éstas correctas o incorrectas.

Todo ello afecta, lógicamente, a las expectativas sobre las posibilidades de entender y usar con seguridad el cálculo, al menos ésa es la opinión ampliamente compartida por los profesores de física de bachillerato (Tabla 4). Por su parte, la mayoría de los estudiantes capta esa falta de expectativas en sus profesores y adopta una actitud mecánica (Tabla 5).

Tabla 3
Uso del cálculo diferencial para resolver problemas de física.

	Est. COU (N = 57) % (sd)	Est. Univ. (N = 200) % (sd)	Profesores (N = 94) % (sd)
Intenta justificar el uso del cálculo diferencial	1,8 (1,8)	3,5 (1,3)	13,8 (3,6)
Asigna algún significado a la diferencial	0 (-)	6,5 (1,7)	8,5 (2,9)
Intenta explicar la integral como *sumas de Riemann*	0 (-)	4,5 (1,5)	5,3 (2,3)
Intenta justificar el teorema fundamental	0 (-)	0 (-)	0 (-)

Tabla 4
Expectativas de los profesores sobre el uso del cálculo diferencial.

	Acuerdo % (sd)	Desacuerdo % (sd)
Los alumnos de COU presentan graves deficiencias cuando usan el cálculo diferencial (N = 92)	90,2 (3,1)	1,1 (1,1)
Los profesores no dominan con seguridad suficiente el cálculo diferencial (N = 103)	56,3 (4,9)	11,7 (3,2)

Tabla 5
Actitud de los estudiantes ante el uso del cálculo diferencial (N = 287).

	Acuerdo % (sd)	Desacuerdo % (sd)
El profesor no espera que entendamos el cálculo diferencial	50,9 (3,0)	30,7 (2,7)
Cuando el profesor lo usa, no presto atención pues sé de antemano que no me voy a enterar y atiendo solamente a la fórmula que se obtiene al final	54,7 (2,9)	28,9 (2,7)

Interpretamos estos resultados como el reflejo de un acuerdo tácito: aunque el cálculo diferencial se usa, el profesor no espera que sus alumnos lo entiendan, ni ellos aspiran a comprenderlo.

La respuesta de una profesora en formación durante la entrevista refleja claramente la actitud adoptada durante sus estudios cuando se usaba el cálculo diferencial:

Extracto 9. Julia, profesora en formación

J: Me enteraba de cómo se realizaba el cálculo; pero de lo que era no. Nunca me he enterado.

Resultados sobre la valoración del papel de la diferencial en el aprendizaje de la física

Dadas las condiciones y la forma en que se usa el cálculo diferencial, no debe extrañar que el 84% de los profesores (N = 90) y el 71% de los estudiantes de COU o 1º curso universitario (N = 224) reconozcan claramente o admitan que el uso del cálculo es una importante fuente de rechazo hacia la física, y que el 63% de los profesores y el 65% de esos mismos estudiantes admitan que el cálculo obstaculiza la comprensión de la física.

Resulta así que lo que debería acudir en ayuda de la comprensión acaba convirtiéndose –debido al uso incorrecto que habitualmente se hace– en un obstáculo generador de rechazo y actitudes negativas. Los siguientes extractos de entrevistas ilustran esta afirmación:

Extracto 10. María, profesora en formación

M: Yo creo que sí [que influye] en contra, pues había integrales difíciles de resolver que no sabías la derivada... y, además, no sabía lo que era una integral.
E: ¿Crees que tus compañeros entendían ese lenguaje?
M: Yo creo que no. Sabían lo que se estaba escribiendo, pero no sabían en realidad lo que era eso. A mí me pasaba lo mismo...

Extracto 11. Isa, alumna de COU de *alto rendimiento*

I: Sí, influye bastante porque lo ven bastante difícil.
E: ¿Y les gusta menos?
I: Sí, les gusta menos. Yo creo que no entienden. A mí me pasa igual...

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

Nuestra propia experiencia como docentes y las conclusiones de distintos trabajos sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo nos habían llevado a formular nuestra hipótesis sobre la existencia de importantes carencias en la enseñanza habitual del concepto de *diferencial*, carencias que afectan a la comprensión y actitudes de los estudiantes hacia la física. Para someter a prueba esa hipótesis hemos realizado un diseño experimental caracterizado por su riqueza y capacidad de estudiar múltiples facetas, guiados por la clarificación previa que habíamos realizado sobre lo que se hace y por qué se hace cuando se usa el cálculo diferencial en las aplicaciones físicas.

En este trabajo hemos presentado las consecuencias de la hipótesis directamente contrastables que se refieren a estudiantes y profesores, así como los instrumentos experimentales diseñados para su contrastación.

Los resultados globales que se han obtenido validan –de forma rotunda en la mayoría de los casos– todas y cada una de esas consecuencias. Puede afirmarse que existe un uso mecánico y algorítmico del cálculo en la enseñanza de la física, despreocupado por la comprensión y el sentido de lo que se hace. Recordemos algunos resultados llamativos:

– el 89% de los profesores y el 94% de los estudiantes no saben explicar por qué una expresión que relaciona incrementos se escribe en forma diferencial;

– más del 90% de estudiantes y profesores no explica el significado de las expresiones diferenciales que utiliza para resolver problemas (aunque se les pida expresamente);

– aunque el 76% de los estudiantes considera correcto operar con la derivada como cociente diferencial, sólo el 12% reconoce explícitamente que la derivada es un cociente diferencial;

– casi la totalidad de los estudiantes y el 91% de los profesores son incapaces de justificar, aunque sea intuitivamente, por qué la integral considerada como *suma de muchos términos* se calcula mediante la técnica inversa a la del cálculo de derivadas.

Los resultados obtenidos muestran, además, que ese uso algorítmico y sin significado del cálculo provoca una falta de confianza en su uso y un claro rechazo al mismo.

Esta situación, a pesar de la existencia de un acuerdo tácito entre profesores y estudiantes, pensamos que sería difícilmente sostenible sin la existencia de dos ideas fundamentales:

– la idea *intuitiva* –y errónea– de que la suma de infinitos trozos infinitesimales aproximados acabará dando siempre un resultado correcto, sin importar la forma concreta de esos trozos tan pequeños, amparados en que, al final, el error será despreciable;

– la apariencia de rigor y de que *funciona*, con tal de aplicar correctamente las reglas de cálculo, aspecto que merece la atención exclusiva en el uso habitual del cálculo, lo que sirve para ocultar la escasa comprensión de lo que se hace e impide que se cuestione cómo se eligen las expresiones de partida.

Estas conclusiones, rotundas en la mayoría de los casos, ponen de manifiesto la necesidad de formular propuestas alternativas para la introducción y uso del cálculo diferencial que promuevan una mejora en todos y cada uno de los indicadores de comprensión. Aunque en ocasiones se opta por evitar el uso de la diferencial, realizando rodeos y buscando soluciones particulares para llegar a los mismos resultados, pensamos que esto no hace sino retrasar el problema. La cuestión principal no es que se introduzcan antes o después, sino que se haga bien cuando se empiece a usar el cálculo diferencial, y también cuando se continúe usando, ya sea en el bachillerato o en la universidad. Con esta intención, estamos trabajando en el diseño y puesta en práctica de esa propuesta alternativa, que será presentada, junto con los resultados más importantes, en próximos trabajos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGHADIUNO, M.C.K. (1992). Mathematics: history, philosophy and applications to science. *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology,* 23(5), pp. 683-690.

ARTIGUE, M. (1986). The notion of differential for undergraduate Students in Science. *Proceedings of the Xth Annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* pp. 229-234. Londres.

ARTIGUE, M. (1989). Le passage de la différentielle totale à la notion d'application linéaire tangente, en Groupe Didactique du CNRS. *Procedures différentielles dans les enseignements de mathematiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire (Annexe I).* Université Paris 7: IREM et LDPES.

ARTIGUE, M. y VIENNOT, L. (1987). Some aspects of students' conceptions and difficulties about differentials. *Proceedings of the Second International Seminar: Misconceptions and Educational Strategies in Sciences and Mathematics* (vol. III). Cornell, Ithaca, EEUU: Cornell University.

DIEUDONNÉ, J. (1960). *Fundamentos de análisis moderno.* Barcelona: Reverté.

FERRINI-MUNDY, J. y GAUDARD, M. (1992). Secondary school calculus: preparation or pitfall in the study of college calculus? *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1), pp. 56-71.

FERRINI-MUNDY, J. y GEUTHER GRAHAM, K. (1991). An Overview of the Calculus Curriculum Reform Effort: Issues for Learning, Teaching and Curriculum Development. *The American Mathematical Monthly,* 98(7), pp. 627-635.

FREUDENTHAL, M. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht-Holland: D. Reidel Publishing Company.

GONZÁLEZ URBANEJA, P.M. (1991). Historia de la matemática: integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias,* 9(3), pp. 281-289.

GROUPE DIDACTIQUE DU CNRS (1989). *Procedures différentielles dans les enseignements de mathematiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire*. Université Paris 7: IREM et LDPES.

HAYMAN, J.L. (1981). *Investigación y educación*. Barcelona: Paidós.

JOHNSON, K. (1995). Harvard Calculus at Oklahoma State University. *The American Mathematical Monthly*, 102(9), pp. 794-797.

LABRAÑA, A. (2001). «Evaluación de las concepciones de los alumnos de COU y bachillerato acerca del significado del cálculo integral». Reseña de tesis doctoral. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3), pp. 481-482.

LAVALY, A. (1990). Do students find physics easier to learn without mathematical problems? *Physics Education,* 25, pp. 202-204.

LÓPEZ-GAY, R. (2002). «La introducción y utilización del concepto de *diferencial* en la enseñanza de la física. Análisis de la situación actual y propuesta para su mejora». Tesis doctoral inédita. Universidad Autónoma de Madrid.

LÓPEZ-GAY, R., MARTÍNEZ TORREGROSA, J. y GRAS MARTÍ, J. (2001). What is the meaning and use of this expression: $dN=\alpha \cdot N \cdot t^2 \cdot dt$? *International Conference Physics Teacher Education Beyond 2000. Selected Contributions*. Pintó, R. y Surinach, S. (eds.). París: Elsevier Editions.

LÓPEZ-GAY, R., MARTÍNEZ TORREGROSA, J. y GRAS MARTÍ, J. (2002). Análisis de la utilización y comprensión del cálculo diferencial en la enseñanza de la física, en *Educación abierta. Aspectos didácticos de Física y Química (Física)*, 10, pp. 113-157. ICE de la Universidad de Zaragoza.

MARTIN, D. y COLEMAN, J. (1994). Mathematics for mature student acces to HE courses in physics: The Coventry perspective. *Physics Education*, 29, pp. 20-22.

MARTÍNEZ TORREGROSA, J., LÓPEZ-GAY, R., GRAS MARTÍ, A. y TORREGROSA, G. (2002). La diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de *diferencial* y su clarificación en la enseñanza de la física. *Enseñanza de las Ciencias*, 20(2), pp. 271-283.

MORENO, M. (2001). «El profesor universitario de matemáticas: estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales». Reseña de tesis doctoral en la UAB. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3), pp. 479-480.

MONK, M. (1994). Mathematics in physics education: a case of more haste less speed. *Physics Education*, 29(4), pp. 209-211.

MURA, R. (1993). Images of Mathematics Held by University Teachers of Mathematical Sciences. *Educational Studies in Mathematics,* 25(4), pp. 375-385.

MURA, R. (1995). Images of Mathematics Held by University Teachers of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics,* 28(4), pp. 385-399.

NAGY, P., TRAUB, R.E., MACRURY, K. y KLAIMAN, R. (1991). High School Calculus: comparing the content off assignments and tests. *Journal for Research in Mathematics Education,* 22(1), pp. 69-75.

ORTON, A. (1983a). Students'understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics,* 14, pp. 1-18.

ORTON, A. (1983b). Students'understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics,* 14, pp. 235-250.

OSTEBEE, A. y ZORN, P. (1997). Pro Choice. *The American Mathematical Monthly*, 104(8), pp. 728-730.

PORTER, M.K. y MASINGILA, J.O. (2000). Examining the effects of writing on conceptual and procedural knowledge in calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 42(2), pp. 165-177.

RICE-EVANS, P. (1994). BSc in Natural Philosophy: a fresh proposal. *Physics Education*, 29(1), pp. 23-25.

SCHNEIDER, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des «découpages infinis» des surfaces et des solides. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(23), pp. 241-294.

SCHNEIDER, M. (1992). A propos del l'apprentissage du taux de variation instantane. *Educational Studies in Mathematics*, 23, pp. 317-350.

STEINBERG, R.N., WITTMANN, M.C. y REDISH, E.F. (1996). Mathematical Tutorials in Introductory Physics. *The International Conference on Undergraduate Physics Education (ICUPE)*. College Park, Maryland. (Proceedings to be published by the American Institute of Physics Redish, E. y Ridgen, J. (eds.). En línea: http://www.physics.umd.edu/perg/papers/redish/index.html.

TALL, D. (1985). Understanding the calculus. *Mathematics Teaching*, 110, pp. 49-53.

TALL, D. (1992). Current difficulties in the teaching of mathematical analysis at university: an essay review of «Yet another in introduction to analysis». *ZDM*, 24(2), pp. 37-42.

THOMPSON, P.W. (1994). Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26, pp. 229-274.

WILSON, R.E. et al. (1986). *Research methods in education and the social sciences*. Colección de 8 volúmenes. Reino Unido: Open University Press.

[Artículo recibido en septiembre de 2004 y aceptado en febrero de 2005]

ANEXO 1

Consecuencias de la hipótesis directamente contrastables, referidas a profesores y estudiantes

Una adecuada comprensión y uso de la diferencial supondría...	**CONSECUENCIAS: Sin embargo, profesores y estudiantes...**
Saber cuándo y por qué se hace necesario su uso.	**P1-E1.** Escriben directamente expresiones diferenciales cuando resuelven problemas, sin justificar su uso, y aplican mecánicamente el cálculo incluso en situaciones en las que no es necesario hacerlo. Tampoco saben identificar, ante situaciones físicas concretas, la causa que obliga a pasar de una expresión incremental a la expresión diferencial.
Saber explicar con precisión y sentido físico el significado de las expresiones diferenciales, reconocer que la diferencial puede tomar valores numéricos e interpretar el significado de los mismos.	**P2-E2.** No explican el significado de las expresiones diferenciales que ellos mismos escriben cuando resuelven problemas de física y, cuando se les pregunta directamente por el significado de expresiones diferenciales, no le asignan un significado específico, tan sólo en ocasiones las identifican con un incremento *muy pequeño*, sin mencionar la idea de estimación. **P3-E3.** Tienen dificultades para calcular valores numéricos concretos de la diferencial, e incluso para admitir distintos valores numéricos. No saben explicar el significado de algún valor numérico concreto de la diferencial.
Conocer y justificar la relación que existe entre la diferencial y la derivada $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ y aceptar sin ambigüedad los razonamientos en los que se utiliza esa relación.	**P4-E4.** Aunque han usado con frecuencia razonamientos en los que interviene la idea de la derivada como cociente de diferenciales, tienen dificultades para reconocer verbalmente esta relación e incluso para aplicarla en el cálculo de diferenciales a partir de un valor conocido de la derivada.
Conocer el significado de la integral y saber justificar por qué se calcula mediante *antiderivadas* o funciones primitivas.	**P5-E5.** Aunque conocen el concepto de *integral* como «sumas de Riemann», cuando lo usan se limitan a su mecánica de cálculo, evitando así justificar por qué el cálculo de las *sumas* se realiza mediante *antiderivadas*. Cuando se les pide directamente esa justificación, no aportan ningún argumento, tan sólo enuncian supuestas *evidencias*.
Utilizar con sentido la estrategia del cálculo en situaciones y problemas en los que domine el contenido físico de los mismos.	**P6-E6.** El uso del cálculo en la física se limita a la aplicación mecánica de reglas, lo que provoca dificultades para utilizarlo en situaciones novedosas y da lugar a unas bajas expectativas sobre la posibilidad de que el cálculo sea usado con sentido.
Valorar positivamente el papel de la diferencial en el aprendizaje de la física.	**P7-E7.** Perciben el uso del cálculo diferencial como un obstáculo más que como una ayuda y lo identifican como una fuente de actitudes negativas hacia la física.

ANEXO 2

Ejemplos de cuestiones comunes a profesores y estudiantes, y sus correspondientes estadillos para el análisis de las respuestas

1. En un texto sobre cinemática se llega a la siguiente expresión: $\Delta v=a\cdot\Delta t$. A continuación se escribe de la siguiente manera: $dv=a\cdot dt$. Señala (✓) cuál de las siguientes razones te parece que justifica con mayor precisión la necesidad de hacer este paso. Califica de 0 a 10 el grado de seguridad en tu respuesta.

Grado de seg. (0-10)

☐ Porque estamos considerando tiempos infinitamente pequeños _______

☐ Porque la velocidad depende del tiempo _______

☐ Porque la aceleración depende del tiempo _______

☐ Porque nos interesa concluir en una derivada o una integral _______

☐ No lo sé _______

☐ Otra respuesta: ____

Explica brevemente el significado físico de la expresión: d*v* = *a*·d*t*.

ESTADILLO para analizar el significado físico de la expresión: d*v*=*a*·d*t*
1) **Respuesta correcta:** Explicación en términos de estimación (lineal) del Δv
2) **Respuesta incorrecta, pero que muestra las ventajas del uso de la diferencial:** la diferencial como cantidad infinitesimal o muy pequeña, pero explican que así se puede suponer constante la aceleración
Respuestas incorrectas que no muestran ventaja alguna de la diferencial:
3) Describen la diferencial como una cantidad infinitesimal o muy pequeña, sin comentario explicativo
4) Se limitan al uso de palabras y frases hechas sin especificar su significado
5) No contestan: respuesta en blanco, comentarios superfluos, lectura literal...
6) Otra respuesta

2. El teorema fundamental del cálculo integral nos permite calcular el valor de una integral definida y, como ya sabrás, se utiliza muy a menudo en la resolución final de muchos desarrollos y problemas de física. Podemos resumir dicho teorema en la siguiente expresión:

$$\int_A^B f(x)dx=P(B)-P(A), \text{ siendo } P'(x)=f(x)$$

Aunque se trata de un resultado muy importante, es poco probable que recuerdes una demostración estricta del mismo. Pero, **¿puedes dar argumentos gráficos o analíticos o bien razonamientos intuitivos que muestren que es lógico y comprensible este resultado (en particular, el hecho de que aparezca la función primitiva *P(x)*)? Explica esos argumentos.**

ESTADILLO para analizar los argumentos utilizados:
Ofrecen argumentos que podrían relacionarse con una justificación:
1) Justifican claramente la relación: $P'(x) = f(x)$ aunque sea de forma intuitiva, usando argumentos gráficos o analíticos
2) Identifican el producto $f(x)\cdot dx$ con dP
3) Otras ideas
No se ofrecen argumentos:
4) Se limitan a recordar el concepto de *integral* como área bajo la curva $f(x)$
5) Por definición, derivar e integrar son operaciones inversas
6) Dejan la respuesta en blanco, parafrasean el enunciado o frases sin sentido

ANEXO 3

Ejemplo de enunciado de problema y su correspondiente estadillo para el análisis de las respuestas

Resuelve el siguiente problema aportando las explicaciones que consideres necesarias cada vez que hagas uso de algún concepto o regla del cálculo diferencial.

Sabemos que la densidad del aire (ρ) *disminuye con la altura (h) de acuerdo con la siguiente ecuación:* $\rho = 1{,}29\cdot(1 - 0{,}000125\cdot h)$. *Esa ecuación está escrita para el sistema internacional, es decir, si h se escribe en* m, *la densidad se obtiene en* kg/m^3. *El valor h = 0 corresponde al nivel del mar.* ***¿Cuál será la masa de una columna cilíndrica de aire de 1 m² de base y que se eleva desde el nivel del mar hasta 2000 m de altura?***

ESTADILLO para analizar las respuestas de los problemas

¿Deja el problema (prácticamente) en blanco?	SÍ - NO
¿Se limita a intentar resolver el problema como si fuese una situación lineal, sin hacer uso del cálculo diferencial?	SÍ - NO
¿Usa el cálculo diferencial?	SÍ - NO
¿Intenta justificar la necesidad de ese uso?	1 2 3
1. Justifica correctamente **2.** Justifica incorrectamente **3.** No justifica	
¿Escribe expresiones diferenciales?	1 2 3 4
1. Correctas **2.** Equivocadas **3.** Innecesarias **4.** No escribe	
¿Qué significado asigna a la diferencial?	1 2 3 4 5
1. Estimación lineal del incremento **2.** Cantidad infinitesimal, así puede suponerse constante alguna magnitud **3.** Cantidad infinitesimal o muy pequeña, sin más comentario explicativo **4.** Ningún significado **5.** Otro significado	
¿Escribe integrales?	1 2 3 4
1. No escribe **2.** Directamente, sin expresiones diferenciales previas **3.** Paso automático desde la expresión diferencial **4.** Como suma de muchos términos	
¿Intenta argumentar el teorema fundamental?	SÍ - NO