NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 108, julio de 2021, páginas 291-307

# De la construcción, con el portasegmentos, a la demostración: una estrategia para fortalecer el aprendizaje en geometría

**Allan Gen Palma**
**Eric Padilla Mora**
(Universidad Estatal a Distancia. Costa Rica)

*Fecha de recepción: 06 de febrero de 2021*
*Fecha de aceptación: 30 de junio de 2021*

**Resumen**

El empleo de construcciones geométricas, como estrategia didáctica, fortalece la comprensión de conceptos, así como el desarrollo de habilidades. Además, si en dicha actividad se solicita la argumentación o bien la demostración de lo realizado, esto contribuye con el logro de objetivos de aprendizaje de un mayor nivel.
En este artículo, se plantean tres construcciones geométricas mediante el uso del portasegmentos; se enfatizará en la necesidad de la justificación como recurso que da validez y respaldo a cada uno de los procesos. Se destaca la construcción de un pentágono regular, en la cual para su validación se podrá emplear diversas áreas de la matemática: geometría, álgebra y trigonometría.
La implementación de este tipo de estrategias debe realizarse desde los primeros años de escolaridad, y su empleo con estudiantes en formación docente podría servirles de guía para que, en su ejercicio profesional, puedan valorarlas, modificarlas y adaptarlas para trabajar con sus estudiantes.

**Palabras clave** Geometría, demostración, construcciones geométricas, portasegmentos, didáctica.

**Title** **From construction, with the portasegmentos, to demonstration: a strategy to strengthen learning in geometry.**

**Abstract**

The use of geometric constructions, as a didactic strategy, strengthens the understanding of concepts, as well as the development of skills. In addition, if this activity requests the argumentation or the demonstration of what has been done, this contributes to the achievement of learning objectives of a higher level.
In this article, three geometric constructions are raised through the use of the portasegmentos (segment carrier); emphasis will be placed on the need for justification as a resource that validates and supports each of the processes. It highlights the construction of a regular pentagon, in which for its validation can be used various areas of mathematics: geometry, algebra and trigonometry.
The implementation of this type of strategy must be carried out from the first years of schooling, and its use with students in teacher training could serve as a guide so that, in their professional practice, they can assess, modify and adapt them to work with their students.

**Keywords** Geometry, proof, geometric constructions, portasegmentos, didactics.

Sociedad Canaria *Isaac Newton*
de Profesores de Matemáticas

## 1. Introducción

Durante los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, en ocasiones, se emplea la estrategia de las construcciones geométricas, con el fin de fortalecer el aprendizaje o bien para analizar, mediante una didáctica más flexible, el alcance cognitivo en los y las estudiantes.

Aunque existen diversos recursos, entre ellos programas informáticos, como: *GeoGebra*, *Geometer's Sketchpad, Cinderella, Geonext o Regla y compás*, el empleo de la regla, la escuadra y el compás, por su bajo costo siguen siendo una alternativa, sin embargo, existe otro recurso denominado: portasegmento o regla de bandas paralelas, el cual consiste en una tira rectangular, no graduada, que por comodidad puede tener por dimensiones: 1,5 cm de ancho por 15 cm de largo, aunque estas medidas pueden variar; la cual se podría crear con papel, cartulina, madera, metal o plástico. En la Figura 1 se muestran algunos portasegmentos construidos con cartulina.

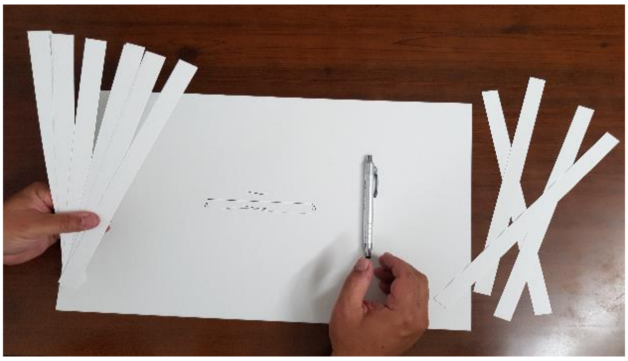

**Figura 1.** El portasegmentos o regla de bandas paralelas.

Dicho recurso, dentro de sus características, posee la de permitir el traslado de segmentos, de allí su nombre. Este paralelogramo tan particular aunado a las propiedades de sus diagonales: se bisecan, son perpendiculares y son bisectrices de sus ángulos; lo hacen ideal no solo para realizar construcciones geométricas, sino que además permite la integración de diversos conceptos fortaleciendo la compresión y el análisis. De acuerdo con Allan Gen y Ronald Sequeira

> … con esta herramienta se puede mostrar aquellas heurísticas que se encuentran implícitas en las construcciones geométricas y así propiciar el análisis de los distintos componentes que intervienen en su proceso, esto con el propósito de favorecer la enseñanza explícita de métodos de construcción de los distintos elementos geométricos. (Gen y Sequeira, 2017, p. 2).

Aunado al proceso de construcción, una estrategia valiosa es la justificación o argumentación de cada paso o procedimiento, de esta manera se evita que la actividad sea netamente procedimental. Se recomienda la implementación de este tipo de actividades desde los primeros años de escolaridad, para ello se deberá tener en consideración la habilidad, contenido u objetivo para cada nivel, de manera tal que el grado de dificultad de cada construcción aumente de forma gradual, así como, la cantidad de elementos teóricos que le permitan justificar cada procedimiento.

En el caso particular de las asignaturas de geometría orientadas a procesos de formación docente, el empleo de este tipo de estrategia, tanto con material concreto o bien con software favorecen la comprensión de la teoría y el análisis en cada justificación, además, esto les permitirá trabajar con actividades didácticas que podrían adecuar para implementarlas durante su ejercicio profesional.

En este artículo se analiza tres construcciones geométricas para las cuales se empleará como recurso el portasegmentos, y para cada una se realizará una propuesta de justificación de manera que dé validez a cada uno de los procesos y por ende garantice la confiabilidad de las mismas. Se espera que la forma de trabajo sea una guía que oriente a los y las docentes sobre la forma del cómo implementar este tipo de estrategias. Se destaca la construcción de un pentágono regular, en la cual para su justificación o validación se recurrirá al empleo de la geometría, el álgebra y la trigonometría, entre otras áreas.

## 2. Las construcciones geométricas como estrategia didáctica

El empleo de las construcciones geométricas, desde hace ya varias décadas, ha propiciado el desarrollo de diversos estudios de investigación no solo para valorar el impacto de su implementación (con o sin el empleo de programas informáticos para geometría), sino, además, para analizar aspectos de su didáctica. Dentro de los trabajos más recientes se pueden citar los desarrollados por Marco Rosales y Ismenia Guzmán (2016); Mauricio Córdova (2017), así como Martha Iglesias y José Ortiz (2019), con los cuales se ha llegado a determinar que su implementación favorece en los y las estudiantes el profundizar las definiciones, postulados, axiomas, teoremas, propiedades y características de las figuras, y no solo su memorización. De acuerdo con Fabiana Ortiz y Ronald Sequeira (2013), con su implementación:

> … se busca una metodología donde el estudiante construya, manipule los objetos matemáticos de manera que logre aprender por su propia manipulación y análisis, lo que se ha llamado “geometría por descubrimiento”, para evitar enseñarle al estudiante sólo a memorizar, lo cual lo llevaría a la adquisición de conceptos limitados o erróneos y el desinterés a mediano y largo plazo. (p. 5).

Para Nahuel Ayala (2008) esto se logra dado que mediante el empleo de este tipo de estrategias

> … el alumno se encuentra frente a la tarea de visualizar los distintos pasos a realizar, comprender el motivo de cada línea, poner en práctica su precisión y el concepto que tiene de ella, aprovechar los recursos con que cuenta, tener claro el objetivo a alcanzar, etc. Son sólo algunos de los muchos desafíos que surge de un solo ejercicio, de una sola construcción. (p. 11).

Por su parte Martha Iglesias y José Ortiz (2019, p. 22) señalan que en cada construcción es clave, para el y la estudiante, el poder identificar tres elementos: lo que se da, es decir, los objetos iniciales; el procedimiento de construcción el cual incluye los objetos auxiliares, y que tenga muy claro lo que se quiere construir, o sea, los objetos finales. Sin ello es probable que el proceso no se logre.

Además, el o la estudiante deberá valorar cada uno de los elementos teóricos con los que dispone e interrelacionarlos de forma lógica para lograr el objetivo. Esto se convierte en una estrategia que le permite al y la docente analizar, valorar y hasta evaluar el nivel de comprensión y madurez conceptual y operacional alcanzado. Sin olvidar el aporte al desarrollo de habilidades como: la visualización, la creatividad, el ingenio, el orden y la precisión.

Duval (2003, citado por, Lucía Brusa, 2012, p. 2) plantea que las construcciones geométricas deben ser la entrada a la geometría, esto porque el uso de instrumentos de construcción (o bien mediante el empleo de software) conlleva, en cada construcción, una serie de pasos que deben tener un orden específico y moviliza determinadas propiedades geométricas, que adquieren mayor significado dado que si no se cumplen con las condiciones para su empleo no se podrá usar situación sobre la cual el y la estudiante debe crear consciencia.

La implementación de esta estrategia podría contemplar, de acuerdo con el nivel de escolaridad, los fines y los objetivos, la argumentación como parte fundamental del proceso. Esto contribuye entre otros aspectos a que verifiquen que lo realizado satisface las condiciones teóricas, fomentando el análisis y la discusión, para que el proceso de construcción pueda llevarlos al logro de objetivos de un alto nivel.

## 3. La demostración en matemáticas: algunas consideraciones

Dentro de los propósitos de la demostración está el incluir una afirmación o resultado en un sistema teórico y reconocido por la comunidad científica, además, de ser un proceso que conlleva al auto convencimiento y convencer a otros de su veracidad, es decisivo para el desarrollo de diversas áreas.

Dentro de los principales investigadores relacionados con la demostración se encuentran: Fischbein (1980), De Villiers (1993), Harel y Sowder (1998), Balacheff (1987 y 2008), Godino y Recio, (2001), Martínez (2001), Sanabria (2006), Fiallo, Camargo y Gutiérrez (2013) y Arnal-Bailera y Oller-Marcen (2017), los cuales han abordado la temática desde diversas aristas.

Para De Villiers (1993, citado por Habib, Alfaro y Treviño, 2018; Crespo y Ponteville, 2005) a la demostración se le pueden atribuir cuatro funciones básicas:

> **1.** Medio de verificación/convicción, después de haber verificado un problema utilizando diferentes procedimientos, se obtienen evidencias de que se está diciendo la verdad ante el resultado o afirmación.
> **2.** Medio de explicación, fundamentar porque es verdadero ese resultado.
> **3.** La sistematización de varios resultados, mediante un sistema de teoremas.
> **4.** La demostración como medio de descubrimiento y comunicación, cuando no se conoce a fondo el origen del teorema y consideran descubierta una forma de demostrar las matemáticas, y la comunicación a otros conocedores de las matemáticas los nuevos modelos matemáticos, para la solución de problemáticas. (p. 1).

A partir del estudio realizado por Harel y Sowder en 1998, en el cual analizaron la dimensión personal o subjetiva de la demostración matemática, Ángel Martínez (2001) logró establecer cuatro tipos básicos de esquemas personales, estos son:

- La argumentación explicativa: la cual corresponde a una de las formas muy básicas de argumentación, sirve para explicar el significado de la proposición a demostrar mediante algunos casos particulares. No obstante, no existe intención de validar, sino que la intención es solo explicativa. Esto se da cuando el estudiante emplea ejemplos o casos particulares que le orienten el proceso.
- La argumentación empírico-inductiva: está centrada en el cumplimiento del teorema o resultado en una serie de casos particulares, con la intención no de explicar sino de realizar la comprobación general.
- La prueba deductiva informal: los esquemas de este tipo están apoyados en argumentaciones lógicas, pero de tipo informal, basada en analogías con otros modelos muy similares ya estudiados.
- La demostración deductiva formal: son argumentaciones en los cuales se da mucha importancia de validez al encadenamiento axiomático, aunque en ocasiones podrían emplearse elementos basados en la intuición que ayudan a la demostración "lógico-formal", pero no la sustituyen.

Por su parte Geovany Sanabria (2006, p. 1) manifiesta que el estudio de la enseñanza de la demostración, se da cuando lo que se pretende es ver la esencia y estructura de la Matemática como disciplina que conlleva a formular, estructurar y sintetizar modelos más generales con los que se puede dar solución a otros problemas mediante simulaciones y representaciones. Proceso que sin duda requiere que la o el estudiante tenga un amplio dominio de los conceptos, definiciones, axiomas, postulados y teoremas que deberá poner en juego, así como la habilidad de estructurarlos y concatenarlos de manera tal que, estos en conjunto, den validez a lo que se desea demostrar, y de acuerdo con Hugo Ortiz y Francy Jiménez (2006):

> En la discusión de la demostración de un enunciado matemático el alumno debe poner en práctica un correcto lenguaje oral y escrito, debe a la vez ordenar cada una de sus proposiciones de una manera lógica y coherente y debe poder discernir de una manera satisfactoria la diferencia entre una verdad absoluta y una relativa. El desarrollo de estas habilidades será sin duda de gran importancia en su desempeño académico profesional y humano. En adición, tiene la demostración gran influencia en el desarrollo de habilidades fundamentales como el refutar, deducir, inferir y argumentar. (p. 3).

Esto, contribuye con el desarrollo de habilidades como: concretar, abstraer, analizar, sintetizar, comparar, clasificar, particularizar, generalizar; las cuales se ponen de manifiesto en cada una de las acciones que conforman el desarrollo de la habilidad de demostrar. Permite también, potenciar el desarrollo del pensamiento creativo y de heurísticas, pero sobre todo al empoderamiento del conocimiento, dado que en una demostración no solo se deberá tener clara la teoría sino además el cómo poderla estructurar de manera tal que permita dar validez a lo que se ha propuesto. Bien lo señala Luis Armella (1996), al indicar:

> La demostración no es una actividad sintáctica, un mero juego deductivo; por el contrario, en la actividad demostrativa, la cognición se dirige a la construcción de un universo matemático que funciona de modo significativo para el sujeto. La demostración conlleva, entonces, la construcción misma de los objetos que intervienen en el discurso demostrativo. (p. 3).

## 4. Una propuesta para el empleo de la construcción y la demostración

Esta propuesta está amparada en la función definida por De Villiers (1993, citado por Habib, Alfaro y Treviño, 2018; Crespo y Ponteville, 2005) para la demostración, en la cual se le confiere como un medio de explicación: el cual permite fundamentar porque es verdadero un resultado o bien, como es en este caso, la construcción que se propone.

Además, es común notar que al realizar demostraciones en el campo de la Matemática el uso de elementos auxiliares, o bien nociones o resultados de otras áreas es un recurso de uso frecuente. Por ejemplo, en álgebra se puede recurrir al empleo de la geometría para justificar algunas fórmulas notables o bien una de las demostraciones del teorema de Pitágoras recurre al empleo recursos de álgebra. Esto no solo permite comprender la esencia del contenido, sino además de establecer conexiones entre las diversas áreas de la matemática.

Es este apartado se mostrarán tres construcciones realizadas con el portasegmento, se describirá paso a paso cada procedimiento, pero además se realizará la justificación y argumentación respectiva, en las cuales se destaca la interrelación de diversas áreas de la Matemática. Téngase en cuenta que el procedimiento puede tener variantes por lo que se invita al lector a proponer otras estrategias de construcción y su respectiva argumentación. Se pretende que esta forma de trabajo constituya una propuesta que sirva de guía y que podría orientar al futuro docente para que implemente este tipo de actividades desde los primeros años de escolaridad, claro está en esta tarea deberá adecuar la estrategia en función de las habilidades por desarrollar, los conocimientos previos y el nivel de dificultad de los contenidos.

### Construcción 1

Trazar, mediante el empleo del portasegmentos, una recta perpendicular a un segmento en un punto que pertenezca al segmento.

### Procedimiento

- Con el portasegmentos trace un segmento de recta, denótelo $\overline{AB}$ y destaque un punto $C$ del segmento, tal como se muestra en la Figura 2.

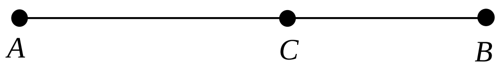


**Figura 2.** Punto en un segmento.

- Se elige una medida arbitraria con el portasegmentos y tomando como punto de partida el punto $C$ se determina sobre el $\overline{AB}$ otro segmento de extremos $A'$, $B'$ y de punto medio $C$.
- Luego se coloca el portasegmentos de forma que la parte o borde inferior de éste coincida con el extremo $B'$ y la parte o borde superior coincida con el extremo $A'$.
- Se traza marcas (líneas discontinuas) a ambos lados o bordes del portasegmentos, estimando que éstos intersequen a la recta mediatriz del segmento.
- Se repite el procedimiento anterior, pero esta vez colocando la parte inferior del portasegmentos sobre el punto $A'$ y la parte superior sobre la parte $B'$.

- Se marca los puntos en los cuales se cortan las líneas discontinuas o marcas. Esto se denotarán con las letras $D$ y $E$.
- Se traza la recta que contenga los puntos de intersección de las marcas (puntos $D$ y $E$) y se denotará con la letra $l$. Dicha recta corresponde a la mediatriz del $\overline{AB}$ y contiene al punto $D$ y $C$. Por tanto, por definición de mediatriz es perpendicular al segmento en el punto dado.

La construcción realizada podría quedar similar a la mostrada en la Figura 3.

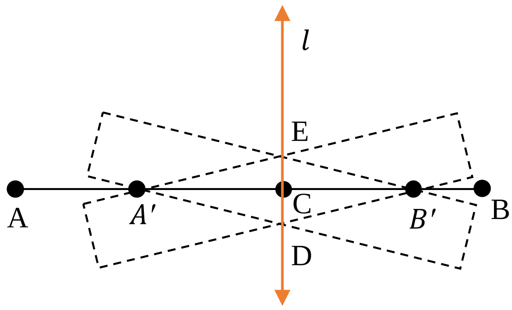


**Figura 3.** Portasegmentos y construcción de la perpendicular a un segmento por un punto dado.

## Justificación o argumentación

Se deberá tener claro el concepto de perpendicular o bien el de mediatriz de un segmento, el cual corresponde a la recta que biseca perpendicularmente al segmento.

Para la justificación o argumentación considere lo siguiente

- Como el ancho de los portasegmentos es el mismo y estos son cuadriláteros paralelogramos, se satisface que $\overline{A'D} \cong \overline{EB'} \cong \overline{A'E} \cong \overline{DB'}$. Esto permite concluir que el cuadrilátero $A'EB'D$ que se forma es un rombo.
- Por definición de diagonal se tiene que $\overline{ED}$ y $\overline{A'B'}$ corresponden a las de dicho rombo.
- Por propiedades de las diagonales del rombo se tiene que $\overline{ED} \perp \overline{A'B'}$.

Así se verifica que la recta $l$ es perpendicular al $\overline{AB}$ en el punto $C$, lo cual permite justificar que los procedimientos, efectivamente, conllevan a la construcción solicitada.

## Construcción 2

Trazar, mediante el uso del portasegmento, la bisectriz de uno de los ángulos internos en un triángulo cualquiera.

## Procedimiento

- Con el portasegmentos se construye un triángulo y se denotará $\Delta ABC$, podría ser similar al mostrado de la siguiente Figura 4.



P R O P U E S T A S P A R A E L A U L A

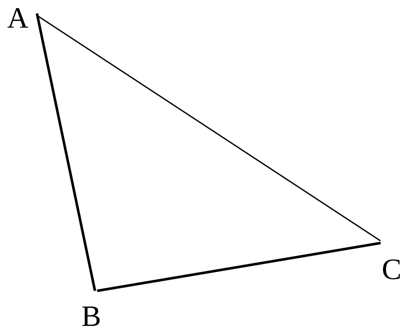


**Figura 4.** Triángulo $ABC$.

- Se trazará la bisectriz del $\angle ABC$.
- Se colocan dos portasegmentos en el interior del ángulo de forma tal que se haga coincidir un borde de uno de los portasegmentos con el lado $AB$ y el otro con el lado $BC$, tal y como se ilustra en la Figura 5.
- En el interior del ángulo, se identificará el punto extremo de intersección de los bordes de los portasegmentos y se denotará con la letra $D$.
- Finalmente, se traza el rayo $BD$. Este corresponde a la bisectriz del $\angle ABC$.

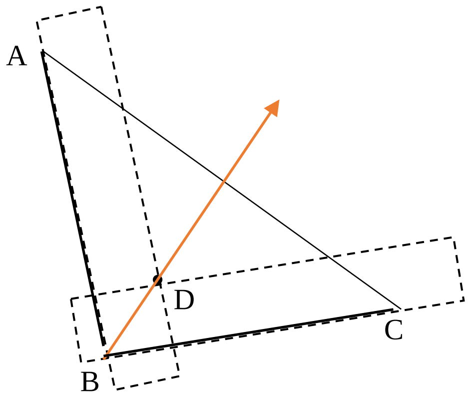


**Figura 5.** Proceso de construcción de la bisectriz de un ángulo.

## Justificación o argumentación

El concepto por reforzar es el de bisectriz, el cual corresponde al rayo que biseca el ángulo.

Para la justificación se destacarán dos puntos más: el $E$ y el $F$, que corresponden a los otros dos puntos extremos en los cuales se cortan los portasegmentos. Tal como se muestra en la Figura 6.

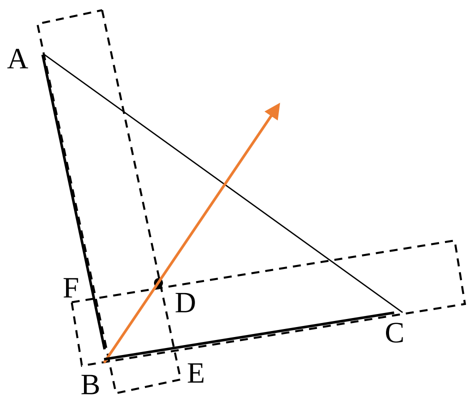


**Figura 6.** Portasegmentos y la construcción de la bisectriz.

- Nótese que $\overline{FB} \cong \overline{DE}$, dado que corresponden al ancho del portasegmentos y por la misma razón se tiene que $\overline{FD} \cong \overline{BE}$, como los portasegmentos tienen el mismo ancho se establece que el cuadrilátero $FDEB$ es un rombo.
- Ahora bien, como las diagonales de un rombo son bisectrices de sus ángulos, al trazar la diagonal $\overline{BD}$ que está contenida en el rayo que inicia en $B$ y pasa por $D$, se satisface que $\angle FBD \cong \angle DBE$.

De acuerdo con lo anterior y por definición de bisectriz ese rayo corresponde a la del $\angle ABC$.

La siguiente construcción resulta muy interesante pero más aún la justificación, dado que se requiere del empleo de argumentos que involucran diversas áreas de la Matemática.

## Construcción 3

Construir, mediante el empleo del portasegmentos, un pentágono regular.

## Procedimiento

- Con los portasegmentos, se trazan dos rectas perpendiculares, se denotarán con las letras $l$ y $m$. Además, se denotará con la letra $O$ la intersección de ambas rectas. Para efectos de la construcción que se expone en este artículo los pasos se realizarán tomando como referencia la Figura 7, no obstante, como en toda construcción tome en cuenta que existen múltiples variantes al iniciarla.

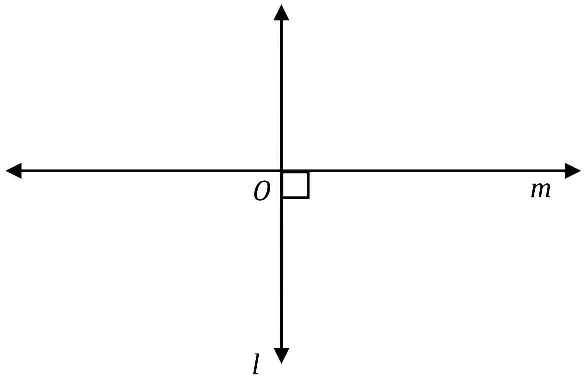


**Figura 7.** Rectas perpendiculares.

- Sobre la recta $l$ se trazará $\overline{OA}$, de manera que su medida sea equivalente a la del radio del pentágono regular por construir (puede colocar a $A$ hacia arriba de $O$), además denote con $r$ dicha medida.
- Sobre la recta $m$ se trazará el $\overline{OF}$, de manera que $F$ esté a la izquierda de $O$ y además se cumpla que su longitud corresponda a $\frac{r}{2}$.
- Desde $F$ hasta $A$ se mide la distancia.
- Se marcará un punto $G$ trasladando, con el portasegmentos, la medida del $\overline{FA}$ sobre la recta $m$ y hacia la derecha de $F$.
- Luego se traza $\overline{AG}$, ese segmento corresponde a la medida del lado del pentágono.
- Lo descrito se muestra en la siguiente Figura 8.

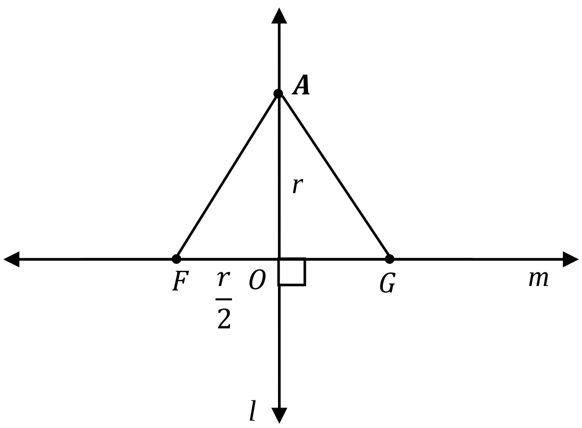


**Figura 8.** Base para la construcción del pentágono regular.

- Para construir los lados del pentágono regular $ABCDE$ se marcará, hacia la izquierda de $A$, un punto $B$ que permitirá generar el primero de los lados del pentágono, los pasos se detallan a continuación.
- Para determinar el vértice $B$, se copia en un portasegmentos la medida $\overline{AG}$ y en otro la medida $\overline{OA}$. Tómese las medidas copiadas y se hace coincidir un extremo de la de $\overline{AG}$ con el punto $A$

y la del $\overline{OA}$ con el punto $O$, tal como se muestra en la Figura 9. La intersección de estos segmentos es el punto $B$.

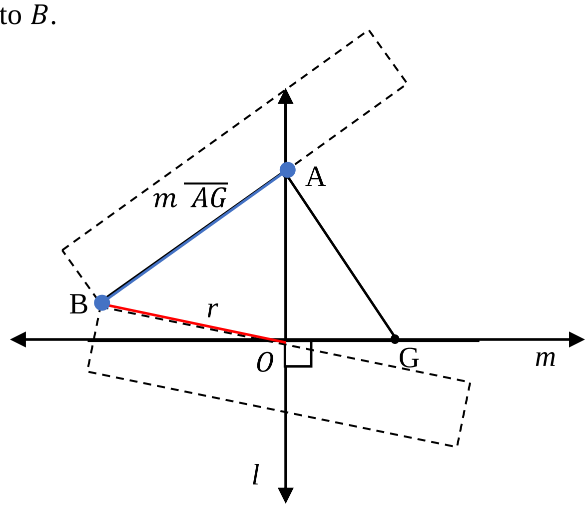


**Figura 9.** Lado $AB$ del pentágono regular.

- Se repite el procedimiento anterior para obtener los otros lados, tomando como punto de referencia el vértice o extremo del nuevo lado generado.
- Al finalizar la construcción, esta podría ser similar a la mostrada en la Figura 10.

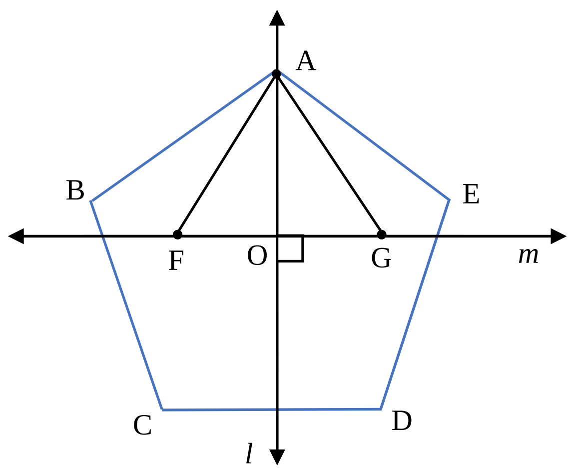


**Figura 10.** Pentágono regular.

En la propuesta de construcción se tomó el $\overline{FO}$ de manera que su medida sea $\frac{r}{2}$, pero ¿Por qué esta medida es correcta para construir el pentágono? Esto se analizará a continuación.

## Justificación o argumentación

De acuerdo con lo propuesto en la construcción y la información destacada en la Figura 11, la justificación se basa en lograr demostrar que $\overline{AG} \cong \overline{AB}$.

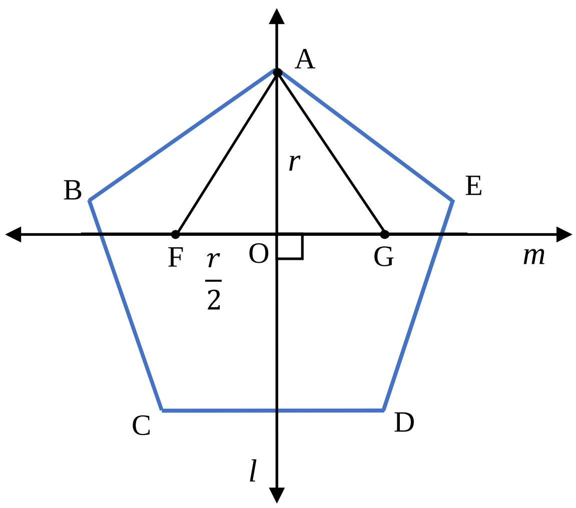


**Figura 11.** Pentágono regular e información destacada.

De acuerdo con los datos en la figura y aplicando el teorema de Pitágoras se tiene que

$$\left(m\,\overline{FA}\right)^2 = \left(m\,\overline{OA}\right)^2 + \left(m\,\overline{FO}\right)^2$$
$$\Rightarrow \left(m\,\overline{FA}\right)^2 = r^2 + \frac{r^2}{4}$$
$$\Rightarrow \left(m\,\overline{FA}\right)^2 = \frac{5r^2}{4}$$
$$\Rightarrow m\,\overline{FA} = \frac{r\sqrt{5}}{2}$$

Además

$$\left(m\,\overline{AG}\right)^2 = \left(m\,\overline{OA}\right)^2 + \left(m\,\overline{OG}\right)^2$$
$$\Rightarrow \left(m\,\overline{AG}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{r\sqrt{5}}{2} - \frac{r}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow \left(m\,\overline{AG}\right)^2 = r^2 + \frac{5r^2}{4} - \frac{r^2\sqrt{5}}{2} + \frac{r^2}{4}$$
$$\Rightarrow \left(m\,\overline{AG}\right)^2 = \frac{5r^2}{2} - \frac{r^2\sqrt{5}}{2}$$
$$\Rightarrow m\,\overline{AG} = r\sqrt{\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}$$
$$\Rightarrow m\,\overline{AG} = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

Por tanto, faltaría demostrar que $m\,\overline{AB} = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, para ello se iniciará trazando el radio $\overline{OB}$ con el fin de forma el triángulo isósceles $AOB$, en el cual $m\,\angle AOB = 72°$.

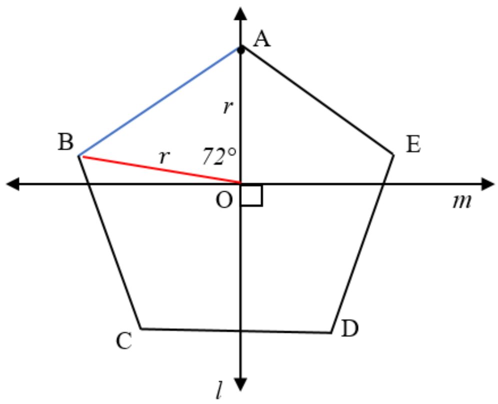


**Figura 12.** Pentágono regular e información destacada.

Al aplicar la ley de cosenos se tiene que

$$\left(m\,\overline{AB}\right)^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cdot cos(72°)$$
$$\Rightarrow \left(m\,\overline{AB}\right)^2 = 2r^2 - 2r^2 \cdot cos(72°)$$

Ahora, ¿A qué equivalente $cos(72°)$? Para ello considere el siguiente triángulo isósceles $ABC$ y los datos mostrados en la Figura 13.

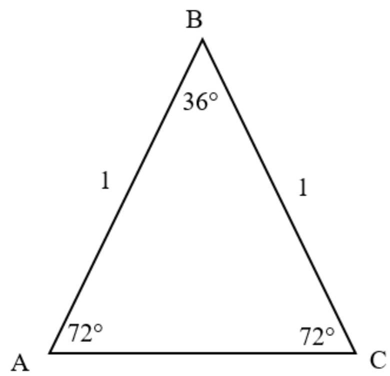


**Figura 13.** Triángulo isósceles $ABC$.

Al trazar la bisectriz del $\angle BCA$, marcar con $E$ el punto de intersección de la bisectriz con el lado $AB$ y denotar con “$x$” la medida de $\overline{EB}$, se logra lo mostrado en la Figura 14.

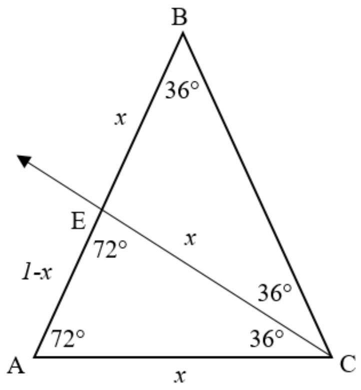


**Figura 14.** Bisectriz del ángulo $BCA$.

Además, de dicha figura se puede verificar que $\Delta ABC \cong \Delta ACE$ (o bien aplicar el teorema de la bisectriz), por tanto $\frac{m\,\overline{AB}}{m\,\overline{AC}} = \frac{m\,\overline{AC}}{m\,\overline{AE}}$ , con lo cual

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Las soluciones de la ecuación son $x = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, como "$x$" es una medida entonces $x = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Además, si el triángulo $ABC$ se traza la altura sobre el lado $AC$, se obtiene lo mostrado a continuación:

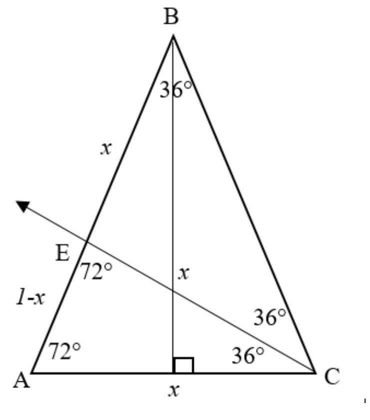


**Figura 15.** Altura sobre el lado AC.

Por tanto, se satisface que $x = 2\,cos(72°)$, así $\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = 2\,cos(72°) \Rightarrow \frac{-1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} = cos(72°)$y como $\left(m\,\overline{AB}\right)^2 = 2r^2 - 2r^2 \cdot cos(\,72°)$, entonces se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&\left(m\,\overline{AB}\right)^2 = 2r^2 - 2r^2 \cdot \cos(72°)\\
&\Rightarrow \left(m\,\overline{AB}\right)^2 = 2r^2 - 2r^2 \cdot \left(\frac{-1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right)\\
&\Rightarrow \left(m\,\overline{AB}\right)^2 = 2r^2 + \frac{r^2}{2} - \frac{r^2\sqrt{5}}{2}\\
&\Rightarrow \left(m\,\overline{AB}\right)^2 = \frac{5r^2}{2} - \frac{r^2\sqrt{5}}{2}\\
&\Rightarrow m\,\overline{AB} = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

Con lo cual se verifica que $\overline{AG} \cong \overline{AB}$, por tanto, la construcción propuesta permite generar el pentágono regular deseado.

## 5. Conclusiones o recomendaciones

Las construcciones geométricas como estrategia didáctica, podría no solo contribuir a la motivación de los y las estudiantes, sino que, además, mediante una adecuada orientación pedagógica puede favorecer el aprendizaje de conceptos, postulados y teoremas en el área de la geometría.

El empleo de estrategias didácticas como la construcción deberá ser implementada desde los primeros niveles de escolaridad. Pero es importante que se capacite al y la docente o futuro docente en el cómo se podría realizar. Este tipo de actividades deben trabajarse desde el proceso de formación o bien mediante formación continua.

Con el empleo de materiales concretos o bien de programas informáticos, se pueden diseñar actividades o estrategias didácticas orientadas a cada una de las funciones atribuidas por De Villiers a la demostración, por ejemplo: talleres con ejercicios de verificación o convicción, talleres que conlleven a la explicación o fundamentación de los procesos tal como el realizado en esta propuesta o bien como medio de descubrimiento y comunicación, elementos muy propios del área de la Geometría. Esto debe constituirse en una herramienta indispensable para los y las futuras docentes, por tanto, deberá ser parte de la formación docente y que el trabajo realizado por ellos les sirva de guía u orientación y puedan realizar las modificaciones para implementarlas en las aulas.

Aunque este tipo de actividades puede implementarse en cualquier nivel educativo, como parte de la planificación e implementación, se deberá tener en consideración la habilidad, contenido u objetivo de por alcanzar, de manera tal que el grado de dificultad de cada construcción aumente de forma gradual, así como, la cantidad de elementos teóricos que le permitan justificar cada procedimiento. Esto dado que no solo se deberá tener clara la teoría sino además el cómo poderla estructurar de manera tal que permita dar validez a lo que se ha propuesto.

En el área de Geometría, es necesario el diseño de actividades didácticas en las cuales la argumentación de las relaciones entre los conceptos que componen la figura sea fundamental, en contraparte de centrar la atención en la producción o creación de un dibujo. Esto propiciará la comprensión de los diversos conceptos y permitirá establecer las diferencias entre dibujar y construir.

La implementación de este tipo de estrategias, sin duda, contribuyen a fortalecer la comprensión de los conceptos o bien el motivo de cada línea tal y como lo semana Nahuel Ayala, así como establecer interrelaciones argumentadas entre ellos. Además, propicia el desarrollo de habilidades como: la argumentación, el razonamiento, la visualización, la creatividad, el ingenio, el orden y la presión, entre otras; lo cual a su vez permite al y la docente analizar, valorar y hasta evaluar el nivel de comprensión y madurez conceptual y operacional alcanzado por sus discentes.

## Bibliografía

Armella, L. (1996). Una perspectiva sobre la demostración. *Revista Mexicana de Investigación Educativa. 1(1).*

Arnal-Bailera, A. y Oller-Marcen, A. (2017). Formación del Profesorado y Demostración Matemática. Estudio Exploratorio e Implicaciones. *Bolema*, 31(57).

Ayala, N. (2008). *Construcciones geométricas con regla y compás*. [Tesina para optar al título de profesor de matemática, Instituto Superior Fundación Suzuki, Argentina].

Balacheff, N. (1987). *Processus de preuve et situations de validation. Educational Studies in Mathematics*.

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. ZDM, 40, 501-512.

Brusa, L. (2012). Aprender Geometría a través de las construcciones. Circunferencia y círculo. *Revista QUEHACER EDUCATIVO.*

Córdova, M. (2017). Construcción y comprensión de figuras geométricas. *Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa*, 4(8).

Crepo, C. y Ponteville, C. (2005). *Las Funciones de la Demostración en el Aula de Matemática*. Acta Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18.

De Villiers, M. (1993). El papel y función de la demostración en Matemática, *Epsilon* 26, 15-30.

Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*, *3*(2), 9-24.

Gen, A. y Sequeira, R. (2017). *Construcciones geométricas con el uso del portasegmentos*. Quinto Encuentro de Enseñanza de la Matemática, UNED, Costa Rica.

Godino, Juan. y Recio, M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Revista de investigación y experiencias didácticas*, *19*(3), pp. 405-14.

Fiallo, J., Camargo, L. y Gutiérrez, A. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Revista integración, 31*(2), 181-205.

Habid, L., Alfaro, N. y Treviño, A. (2018). Importancia del conocimiento del fundamento de las demostraciones matemáticas para los estudiantes de ingeniería. *Espiral, Revista multidisciplinaria de investigación científica, 23*(2).

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Studets' Proof Schemes: Results fron Exploraqtory Studies. En Schoenfeld, A. H., Kaput, J., Dubinsky, E. (Ed.) *Research in Collegiate Mathematics Education III*, 234-283. American Mathematical Asociation.

Iglesias, M. y Ortiz, J. (2019). La Demostración en Geometría desde una Perspectiva Didáctica. *Revista Unión.org*, 55, 159-183.

Martínez, A. (2001). *La demostración en Matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica*. Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Almería.

Ortiz, F. y Sequeira, R. (2013). *Uso del portasegmento y la técnica del doblado de papel en el curso de geometría euclídea del programa de enseñanza de la matemática de la universidad estatal a distancia de Costa Rica*. Actas del VII SIBEM, Uruguay.

Ortiz, H. y Jiménez, F. (2006). La demostración elemento vivo en la didáctica de la Matemática. *Scientia et Technica. 31*, 237-240.

Rosales, M. y Guzmán, I. (2016). Resolución de problemas de Construcción Geométrica con Estudiantes de Pedagogía en Educación Básica. *Revisa SciELO*, 37(1), 135-160.

Sanabria, G. (2006). Propuesta sobre la enseñanza de la demostración de implicaciones. *Revista digital Matemática. Educación e internet*, *7*(1).

**Allan Gen Palma**, Universidad Estatal a Distancia, UNED, Costa Rica. Licenciado en Enseñanza de la Matemática y Máster en Psicopedagogía. Coordinador de la Cátedra de Matemática Educativa.
Email: agen@uned.ac.cr

**Eric Padilla Mora**, Universidad Estatal a Distancia, UNED, Costa Rica. Licenciado en Enseñanza de la Matemática y Máster en Tecnología e Informática Educativa. Coordinador de la Cátedra de Investigación en Educación Matemática.
Email: epadilla@uned.ac.cr

PROPUESTAS PARA EL AULA